

Αθροίσματα: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ με $0! \triangleq 1$, $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Αν $|x| < 1$ τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Νόμος του Little: Για κάθε ευσταθές σύστημα αναμονής, στη μόνιμη κατάσταση ισχύει: (μέσο απόθεμα, N) = (μέσος ρυθμός αφίξεων, $\bar{\lambda}$) $\times$ (μέσος χρόνος πελάτη στο σύστημα, T) **M/M/1:** $P_n = \rho^n(1-\rho)$ και $N = \frac{\rho}{1-\rho}$, όταν $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

M/M/1/K: $P_n = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$, όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. **M/M/∞:** $P_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}$ και $N = \rho$, όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. **M/M/m:** Αν $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$, $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$, $P_n = P_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}$ για $n \leq m$, $P_n = P_0 \frac{\rho^n m^m}{m!}$ για $n \geq m$ και

$$P[\text{σύστημα πλήρες}] = P_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho}.$$

M/M/m/m: $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!} \right]^{-1}$. **M/M/1/∞/L:** $P_n =$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{L!}{(L-n)!} \left[\sum_{n=0}^L \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{L!}{(L-n)!} \right]^{-1}.$$

M/M/∞/∞/L: $P_n = \frac{\binom{L}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right)^L}$. **M/M/m/K/L:** $P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \binom{L}{n}$ για $n \leq$

m και $P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \binom{L}{n} \frac{n!}{m!} m^{m-n}$, για $m \leq n \leq K \leq L$. **Κατανομή Erlang-n:** πυκνότητα

$$b(x) = \frac{n\mu(\eta\mu x)^{n-1} e^{-\eta\mu x}}{(n-1)!}, \quad E(X) = n \frac{1}{\eta\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad \text{Var}(X) = n \left(\frac{1}{\eta\mu} \right)^2 = \frac{1}{\eta\mu^2}.$$

Μετασχηματισμός z της ακολουθίας f_n: $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. **Ιδιότητες:** (α) $F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, $F'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n$. (β) Αν ο μετασχηματισμός είναι πηλίκο πολυωνύμων $F(z) = N(z)/D(z)$ και βαθμός(D) > βαθμός(N) και

$$D(z) = D_0 \prod_{i=1}^n (1 - a_i z)^{m_i}, \quad \text{τότε το κλάσμα } F(z) \text{ διασπάται ως εξής: } F(z) =$$

$$\left[\frac{A_{11}}{(1-a_1 z)^{m_1}} + \frac{A_{12}}{(1-a_1 z)^{m_1-1}} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(1-a_1 z)} \right] + \dots + \left[\frac{A_{n1}}{(1-a_n z)^{m_n}} + \frac{A_{n2}}{(1-a_n z)^{m_n-1}} + \dots + \frac{A_{nm_n}}{(1-a_n z)} \right], \quad \text{όπου } A_{ij} =$$

$$\frac{1}{(j-1)!} \left(-\frac{1}{a_i} \right)^{j-1} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[(1-a_i z)^{m_i} \frac{N(z)}{D(z)} \right] \Bigg|_{z=\frac{1}{a_i}}.$$

$$(y) \text{ Αν } f_n \Leftrightarrow F(z) \text{ και } g_n \Leftrightarrow G(z), \text{ τότε για τη συνέλιξη ισχύει } f_n \otimes g_n \Leftrightarrow F(z)G(z). \quad (\delta) \text{ α}^n f_n \Leftrightarrow F(az) \text{ και επίσης για } f_n = \frac{(n+m)(n+m-1)\dots(n+1)}{m!} \alpha^n \Leftrightarrow \frac{1}{(1-\alpha z)^{m+1}}.$$

$$\textbf{M/E}_n\textbf{/1: } \pi_i \Leftrightarrow \Pi(z) \text{ όπου } i = \text{βαθμίδες εξυπηρέτησης, } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ και } \Pi(z) = \frac{n\mu(1-\rho)}{n\mu - \lambda(z + z^2 + \dots + z^n)}$$

$$= \frac{1-\rho}{\left(1-\frac{z}{z_1}\right) \dots \left(1-\frac{z}{z_n}\right)} = (1-\rho) \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{1-\frac{z}{z_j}}. \text{ Τότε } \pi_i = (1-\rho) \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{(z_j)^i} \text{ και } \pi_0 = 1-\rho. \textbf{E}_n\textbf{/M/1: } P_0 = 1-\rho \text{ και } P_k = \rho(z_0^n - 1)/(z_0)^{nk}, k \geq 1, \text{ όπου } z_0 \text{ είναι η μόνη ρίζα } > 1 \text{ της } n\rho z^{n+1} - (1+n\rho)z^n + 1 = 0. \textbf{Ομαδικές αφίξεις:}$$

$$\text{Αν } q_n = P(n \text{ αφίξεις}), q_n \Leftrightarrow Q(z) \text{ και } \rho = \frac{\lambda}{\mu} Q'(1), \text{ τότε } P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z[1-Q(z)]}.$$

Ομαδικές εξυπηρετήσεις: $P_k = \left(1 - \frac{1}{z_0} \right) \left(\frac{1}{z_0} \right)^k, k \geq 0, z_0 > 1$ ρίζα της $n\rho z^{n+1} - (1+n\rho)z^n + 1 = 0, \rho =$

$$\frac{\lambda}{n\mu}. \textbf{M/G/1: } P_0 = 1 - \rho, \quad N = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_x^2}{2(1-\rho)}, \quad T = \frac{N}{\lambda} \text{ και για την ουρά } W = T - \frac{1}{\mu}, \quad N_q = \lambda W.$$

M/G/m/m και M/G/∞: Πιθανότητες ίδιες με των M/M/m/m και M/M/∞ αντιστοίχως. **G/G/1:** Χρόνοι μεταξύ αφίξεων t: $E(t) = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}(t) = \sigma_t^2$. Χρόνοι εξυπηρέτησης X: $E(X) = \frac{1}{\mu}, \text{Var}(X) = \sigma_X^2$.

$$\text{Φράγματα για το μέσο χρόνο στην ουρά: } \frac{\rho^2(1+\sigma_x^2\mu^2)-2\rho}{2\lambda(1-\rho)} \leq W \leq \frac{\lambda(\sigma_t^2+\sigma_x^2)}{2(1-\rho)} = A, \text{ για } \rho = \lambda/\mu < 1.$$

$$\text{Αν } E(t-t_0|t>t_0) \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ τότε } A - \frac{1+\rho}{2\lambda} \leq W \leq A. \textbf{G/G/m:}$$

$$\text{Αν } \lambda < m\mu, \text{ τότε } W_1 - \frac{(m-1)\mu E(X^2)}{2m} \leq W \leq \frac{[\sigma_t^2 + (\sigma_x^2/m) + [(m-1)/(m\mu)^2]]\lambda}{2(1-\lambda/m\mu)}, \text{ όπου } W_1 \text{ είναι ο μέσος χρόνος αναμονής ουράς ενός G/G/1 με}$$

χρόνο εξυπηρέτησης ίσο με την τυχαία μεταβλητή $\frac{X}{m}$. Θεώρημα Burke για n συστήματα ·/M/1

εν σειρά: Στην είσοδο κάθε κόμβου έχουμε αφίξεις Poisson. **Δίκτυα Jackson:** Έχουμε M κόμβους ·/M/m_i: i = 1, 2, ..., M. Ο κόμβος i έχει m_i παράλληλους εξυπηρετούντες με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με μέση τιμή 1/μ_i. Πελάτης που εξυπηρετήθηκε στον κόμβο i προχωρεί στον κόμβο j με πιθανότητα P_{ij} j = 1, ..., M ή φεύγει από το σύστημα με πιθανότητα $1 - \sum_{j=1}^M P_{ij}$.

Αφίξεις στον κόμβο i γίνονται είτε απ' έξω κατά Poisson με μέσο ρυθμό γ_i είτε από άλλους κόμβους. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τον αριθμό πελατών n_i σε κάθε κόμβο i. **Θεώρημα για ανοικτά δίκτυα:** Κάθε κόμβος i συμπεριφέρεται ως αναμονητικό σύστημα M/M/m_i με μέσο ρυθμό εισόδου $\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^M \lambda_j P_{ji}$ i = 1, ..., M. Στη μόνιμη κατάσταση, P(n₁, ..., n_M) =

$$\prod_{i=1}^M P_i(n_i) \text{ όπου } P_i(n_i) \text{ η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης του M/M/m}_i. \textbf{FMS (κλειστά δίκτυα):}$$

Σε ένα κλειστό δίκτυο με M κόμβους, οι πιθανότητες να φύγει ένας πελάτης από το σύστημα είναι 0 και ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα είναι πάντα N. Όταν στον κόμβο i υπάρχουν n_i πελάτες, τότε ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι α_i(n_i)μ_i, όπου α_i(n_i) κατάλληλη συνάρτηση. Για παράδειγμα σε κόμβο ·/M/m_i, έχουμε α_i(n_i) = min(n_i, m_i) ενώ αν n_i = 1 τότε α_i(n_i) = 1 για κάθε n_i ≥ 1.

$$\textbf{Θεώρημα για κλειστά δίκτυα:}$$

$$\text{Στη μόνιμη κατάσταση, } P(n_1, \dots, n_M) = G^{-1}(N) \prod_{i=1}^M \frac{(U_i/\mu_i)^{n_i}}{\beta_i(n_i)},$$

$$\text{όπου } \beta_i(0) = 1 \text{ και } \beta_i(n) = \prod_{k=1}^n \alpha_i(k) \text{ για κάθε } n \geq 1. \text{ Τα } U_i \text{ είναι θετικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις}$$

$$U_i = \sum_{j=1}^M U_j P_{ji}, \text{ για } i=1, \dots, M. \text{ Η } G(N) \text{ είναι τέτοια ώστε } \sum_{n_1+\dots+n_M=N} P(n_1, n_2, \dots, n_M) = 1 \Rightarrow G(N) =$$

$$\sum_{n_1+\dots+n_M=N} \prod_{i=1}^M \frac{(U_i/\mu_i)^{n_i}}{\beta_i(n_i)}, \text{ όπου οι αθροίσεις είναι για όλους τους συνδυασμούς } n_i \geq 0 \text{ τέτοιους ώστε } n_1$$

$$+ \dots + n_M = N. \textbf{Ιδιότητες:}$$

$$\text{Σε FMS, αν ο κόμβος } j \text{ έχει μόνο μία μηχανή, τότε η πιθανότητα } n \text{ κομματιών στον κόμβο αυτό είναι } P_j(n) = G^{-1}(N) G_j(N-n) (U_j/\mu_j)^n. \text{ Η συνάρτηση } G_j(N-n) \text{ είναι όμοια με την } G(N-n) \text{ χωρίς τους όρους με δείκτη } j. \text{ Ο συνολικός ρυθμός παραγωγής της μηχανής } j \text{ είναι}$$

$$TH_j = \sum_{n=1}^N \mu_j(n) P_j(n) = U_j G(N-1) G^{-1}(N).$$