



2^ο Εργαστήριο CAM



*Δρ. Γεώργιος Τσιναράκης
ΕΔΙΠ Σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης*



Διάρθρωση Μαθήματος

- **2^ο Εργαστήριο – Μαθηματικά προαπαιτούμενα**
 - Πολυώνυμα
 - Αναπτύγματα Taylor και Mac Laurin
 - Μετασχηματισμοί Laplace
 - Διαφορικές Εξισώσεις



Πολυώνυμα (I)

- Τα πολυώνυμα είναι οι πιο απλές συναρτήσεις που εμφανίζονται στην ανάλυση και διευκολύνουν υπολογισμού.
- Για το λόγο αυτό είναι επιθυμητό να προσεγγιστεί μια πολύπλοκη συνάρτηση μέσω ενός πολυωνύμου.
- x μεταβλητή του πολυωνύμου που λαμβάνει κάθε πραγματική τιμή.
- Μονώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_n x^n$ όπου n φυσικός αριθμός.
- Μορφή πολυωνύμου: $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$, όπου n φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ (συντελεστές πολυωνύμου) είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Ο μεγαλύτερος εκθέτης στον οποίο εμφανίζεται η μεταβλητή του πολυωνύμου ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου.
- Θέτοντας $x=r$, r πραγματικός, υπολογίζεται αριθμητική τιμή του πολυωνύμου.
- Ρίζα πολυωνύμου r αν και μόνο αν $P(r)=0$.



Πολυώνυμα (II)

- Παραγοντοποίηση πολυωνύμου είναι η μετατροπή του από άθροισμα σε γινόμενο όρων.
- Ένα πολυώνυμο μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο παραγόντων που περιέχουν τις ρίζες του. Πολυώνυμο n -στου βαθμού με όχι αναγκαστικά διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες, μπορεί να γραφεί, $P(x)=a_n(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_n)$, όπου $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου.
- Πχ το $P(x)=x^5-11x^4+41x^3-49x^2-30x+72=(x+1)(x-2)(x-3)^2(x-4)$
- Μέθοδοι παραγοντοποίησης πολυωνύμου
 - Κοινός Παράγοντας
 - Ομαδοποίηση
 - Ταυτότητες
 - Σχήμα Horner



Μετασχηματισμοί Taylor & MacLaurin (I)

- Χρησιμοποιούνται για να προσεγγιστεί μια πολύπλοκη συνάρτηση με ένα πολυώνυμο $P(x)$.
- Έστω πραγματική συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα $[a,b]$ η οποία είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος αυτού.
- Ψάχνουμε το πολυώνυμο που είναι η καλύτερη προσέγγιση της $f(x)$ γύρω από το σημείο x_0 βάσει του ακόλουθου κριτηρίου:
 - $P(x_0)=f(x_0)$
 - $P'(x_0)=f'(x_0)$
 - $P''(x_0)=f''(x_0)$
 -
 - $P^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$
- Αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις αυτές ικανοποιούνται από το πολυώνυμο:
- $$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



Μετασχηματισμοί Taylor & MacLaurin (II)

- Για οποιοδήποτε x_0 είναι ανάπτυγμα Taylor ενώ για κέντρο της σειράς το 0 λέγεται ανάπτυγμα MacLaurin.
- Ισοδύναμη αναπαράσταση: $P(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$
- Στην περίπτωση που $x_0=0$ (MacLaurin) το ανάπτυγμα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως εξής:
- $$P(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$



Μετασχηματισμοί Taylor & MacLaurin (III)

- Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης $f(x)=\cos x$
- Υπολογίζω επαρκή αριθμό παραγώγων για να βρεθεί η γενική μορφή της παραγώγου

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f(0) &= \cos(0) = 1 \\f'(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow f'(0) &= -\sin(0) = 0 \\f''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\f'''(x) &= \sin(x) &\Rightarrow f'''(0) &= \sin(0) = 0 \\f^{(4)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \\f^{(5)}(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow f^{(5)}(0) &= -\sin(0) = 0 \\f^{(6)}(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f^{(6)}(0) &= -\cos(0) = -1\end{aligned}$$

- Αντικαθιστώ στην εξίσωση του πολυωνύμου:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \dots \Rightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

- Η γενική μορφή της εξίσωσης βρίσκεται με μαθηματική επαγωγή*.



Μετασχηματισμοί Taylor & MacLaurin (IV)

- Βασικά αναπτύγματα MacLaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$



Μετασχηματισμοί Laplace (I)

- Βασικό εργαλείο για επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων και την περιγραφή συστημάτων.
- Κάνει δυνατή τη μετατροπή γραμμικών διαφορικών με σταθερούς συντελεστές και ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές εξισώσεις η επίλυση των οποίων είναι ευκολότερη.
- Ονομάστηκε έτσι εξαιτίας του μαθηματικού και αστρονόμου Πιέρ Σιμόν Λαπλάς ο οποίος τον χρησιμοποίησε στη δουλειά του στη θεωρία πιθανοτήτων.
- Συμβολίζεται σαν $F(s)$ όπου η παράμετρος s είναι μιγαδικός αριθμός της μορφής $s=\sigma+i\omega$ ή σαν $\mathcal{L}\{f(t)\}$
- Έστω $f(t)$ πραγματική συνάρτηση[με πεδίο ορισμού $[0,\infty)$ και σταθερά $\sigma>0$. Ως μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται η συνάρτηση που υπολογίζεται σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$



Μετασχηματισμοί Laplace (II)

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)=t$ με χρήση του ορισμού:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} te^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} t(e^{-st})' dt = -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2} \quad s > 0\end{aligned}$$

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης a) $\cosh(at)$ b) $\sinh(at)$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad \cosh(at) &= \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \\ \mathcal{L}[\cosh(at)] &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right] = \frac{s}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad \sinh(at) &= \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \\ \mathcal{L}[\sinh(at)] &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right] = \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$



Μετασχηματισμοί Laplace (III)

- Βασικοί μετασχηματισμοί: (χρήση αν δε ζητείται με ορισμό)

	$f(x)$	$F(x)$
1)	$\delta(x)$	1
2)	1	$\frac{1}{s}, s>0$
3)	x	$\frac{1}{s^2}, s>0$
4)	$x^n (n=1,2,...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s>0$
5)	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} s^{-3/2}, s>0$
6)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\pi} s^{-1/2}, s>0$
7)	$x^{n-1/2} (n=1,2,...)$	$\frac{(1)(3)(5)...(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} s^{-n-1/2}, s>0$
8)	$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{s-\alpha}, s>0$

	$f(x)$	$F(x)$
9)	$\sin \alpha x$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, s>0$
10)	$\cos \alpha x$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}, s>0$
11)	$x \sin \alpha x$	$\frac{2\alpha s}{(s^2 + \alpha^2)^2}, s>0$
12)	$x \cos \alpha x$	$\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}, s>0$
13)	$x^n e^{-\alpha x} (n=1,2,...)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, s>0$
14)	$e^{bx} \sin \alpha x$	$\frac{\alpha}{(s-b)^2 + \alpha^2}, s>b$
15)	$e^{bx} \cos \alpha x$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + \alpha^2}, s>b$
16)	$\sin \alpha x - \alpha x \cos \alpha x$	$\frac{2\alpha^3}{(s^2 + \alpha^2)^2}, s>0$



Μετασχηματισμοί Laplace (IV)

- Ιδιότητες Μετασχηματισμών Laplace

- Γραμμικότητα $\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s) + \alpha_3 F_3(s)$

- Μετασχηματισμός Laplace πρώτης παραγώγου: $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$

- Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου n-τάξης

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)' dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

- Αλλαγή χρονικής κλίμακας $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

- Μετασχηματισμός Laplace συνέλιξης συναρτήσεων $\mathcal{L}\{f * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(s)\}\mathcal{L}\{g(s)\}$



Διαφορικές Εξισώσεις (I)

- Εξισώσεις που συσχετίζουν τις τιμές μιας άγνωστης συνάρτησης μίας ή περισσότερων μεταβλητών, και κάποιων από τις παραγώγους της.
- Στην περίπτωση μιας μεταβλητής x , στην εξίσωση εμφανίζεται μια άγνωστη συνάρτηση $y=f(x)$ και κάποιες από τις παραγώγους y' , y'' και μιλάμε για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.
- Η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων ορίζει την τάξη της διαφορικής εξίσωσης.
- Κάθε συνάρτηση $y=f(x)$ που την επαληθεύει ονομάζεται λύση της διαφορικής εξίσωσης.
- Στην περίπτωση που η συνήθης διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί σε γραμμικός συνδυασμός των παραγώγων του y ονομάζεται γραμμική.
- Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης περιέχουν μόνο την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και την παράγωγο της $y'(x)$.



Διαφορικές Εξισώσεις (II)

- Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} τάξης $\frac{dy}{dx} + u(x)y = w(x)$, $u(x)=\alpha$ και $w(x)=b$ πραγματικοί αριθμοί
 - Ομογενής ($b=0$). Γενική λύση $y = Ae^{-\alpha x}$
 - Μη ομογενής ($b \neq 0$). Γενική λύση $y = Ae^{-\alpha x} + \frac{b}{\alpha}$
- Αν $u(x)$ και $w(x)$ είναι μεταβλητές συναρτήσεις του x
 - Ομογενής ($w(x)=0$). Γενική λύση $y = Ae^{-\int u(x)dx}$
 - Μη ομογενής ($w(x) \neq 0$). Γενική λύση $y = Ae^{-\int u(x)dx} (A + \int w(x)e^{\int u(x)dx} dx)$
- Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli
- Διαφορικές εξισώσεις Riccati



*Thank
you*