



1^ο Εργαστήριο CAM



*Δρ. Γεώργιος Τσιναράκης
ΕΔΙΠ Σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης*



Διδάσκοντες

1^ο και 2^ο κομμάτι

Δρ. Γεώργιος Τσιναράκης

ΕΔΙΠ Σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

Email: tsinar@dpem.tuc.gr

2^ο κομμάτι

Θεόδωρος Παπαδουλής

Email: papadoulis_85@hotmail.com



Διάρθρωση Μαθήματος

- Διαδικαστικά Εργαστηρίου – Τρόπος διεξαγωγής
- Βαθμολόγηση - Διάρθρωση Εργαστηρίου
- **1^ο Εργαστήριο – Μαθηματικά προαπαιτούμενα**
 - Αριθμητικές πρόοδοι
 - Γεωμετρικές πρόοδοι
 - Τυχαίες μεταβλητές
 - Κατανομές τυχαίων μεταβλητών και συναρτήσεις
 - Παράγωγοι
 - Ολοκληρώματα



Διαδικαστικά Εργαστηρίου

- Το εργαστήριο είναι υποχρεωτικό και θα διεξαχθεί μέσω Zoom.
- Μετράει **20% στον τελικό βαθμό του μαθήματος.**
- Η επιτυχής ολοκλήρωση του εργαστηρίου αποτελεί **προαπαιτούμενο** για τη συμμετοχή στις εξετάσεις της θεωρίας ενώ σε περίπτωση αποτυχίας σε αυτές δε χρειάζεται να επαναληφθεί (ο βαθμός κρατιέται).
- Αποτελείται από 2 μέρη.
- Το πρώτο κομμάτι είναι θεωρητικό κι αποτελείται από **2 διαλέξεις** πάνω σε αναγκαία για τη θεωρία προαπαιτούμενα.
- Οι φοιτητές οφείλουν να παραδώσουν **2 ατομικές εργασίες** με τη μορφή αναφορών.
- Το δεύτερο κομμάτι αναφέρεται στη χρήση και τον προγραμματισμό εργαλειομηχανών CNC και αποτελείται από **5 διαλέξεις.**



Βαθμολόγηση Εργαστηρίου

- Καθεμία από τις δύο εργασίες του πρώτου κομματιού συμμετέχει κατά **15% στον τελικό βαθμό** εργαστηρίου. Σε περίπτωση που δεν παραδοθεί βαθμολογείται με **0**.
- Η ενεργή συμμετοχή στο δεύτερο κομμάτι του εργαστηρίου βαθμολογείται με το **20% του βαθμού**.
- Η **τελική γραπτή εξέταση** συμμετέχει με το **υπόλοιπο 50%** του βαθμού εργαστηρίου.
- **Τελικός βαθμός Εργαστηρίου = Εργ1 * 0.15 + Εργ2 * 0.15 + Συμμετοχή β μέρους * 0.2 + Βαθμός τελικής εξέτασης * 0.5.**
- Προϋπόθεση για να μετρήσουν οι εργασίες αποτελεί ο **βαθμός τελικής εξέτασης εργαστηρίου** να είναι **≥ 4** .



Πρόοδοι

- Οι πρόοδοι είναι **ακολουθίες** αριθμών.
- Γενικά, μια ακολουθία είναι μια **διατεταγμένη** λίστα αντικειμένων.
- Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$.
- Οι ακολουθίες μπορεί να είναι άπειρες ή πεπερασμένες.
- Για τις ανάγκες του μαθήματος θα θεωρηθούν 2 τύποι προόδων.
 - Αριθμητική Πρόοδος
 - Γεωμετρική Πρόοδος
- Κύρια προβλήματα:
 - Υπολογισμός συγκεκριμένων όρων προόδου
 - Υπολογισμός αθροισμάτων όρων προόδου



Αριθμητική Πρόοδος

- Μία ακολουθία αριθμών ονομάζεται αριθμητική πρόοδος, όταν ο κάθε όρος της, προκύπτει από τον αμέσως προηγούμενο προσθέτοντας τον ίδιο πάντοτε σταθερό αριθμό.
- Οι όροι μιας αριθμητικής προόδου συμβολίζονται $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
- Ο σταθερός αριθμός που προστίθεται (διαφορά) συμβολίζεται με τον όρο ω . Αν ο ω είναι θετικός έχουμε αύξουσα αριθμητική πρόοδο κι αν είναι αρνητικός φθίνουσα.
- **Ορισμός ν-οστου όρου αριθμητικής προόδου:**
 - Αναδρομικά $\alpha_v = \alpha_{v-1} + \omega$
 - Σε σχέση με τον πρώτο όρο: $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$
- **Άθροισμα ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου για ω διάφορο του 0:**
 - $S = \frac{v}{2} (\alpha_1 + \alpha_v)$
 - $S = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$
- **Αν $\omega=0$ το άθροισμα είναι $S=v\alpha_1$**



Γεωμετρική Πρόοδος

- Μία ακολουθία αριθμών ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος, όταν ο κάθε όρος της, προκύπτει από τον αμέσως προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.
- Οι όροι μιας γεωμετρικής προόδου συμβολίζονται $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
- Ο σταθερός αριθμός που πολλαπλασιάζεται συμβολίζεται με τον όρο λ .
- **Ορισμός n-οστου όρου γεωμετρικής προόδου:**
 - Αναδρομικά $\alpha_n = \alpha_{n-1} \lambda$
 - Σε σχέση με τον πρώτο όρο: $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1}$
- **Άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου για λ διάφορο του 1:**
 - $$S = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$
- **Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου:**
 - μόνο αν ισχύει $|\lambda| < 1$, τότε
$$S = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$$



Πρόοδοι – Ασκήσεις (I)

Μεθοδολογία Επίλυσης Ασκήσεων

- α) Έλεγχος αν πρόκειται για αριθμητική πρόοδο (**διαφορές όρων**)
- β) Έλεγχος αν πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο (**λόγος όρων**)
- γ) Κατάστρωση αντίστοιχων εξισώσεων αξιοποιώντας ωφέλιμες ιδιότητες των προόδων
 - Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν ισχύει $\beta = (\alpha + \gamma)/2$ (**αριθμητικός μέσος**)
 - Τρεις **μη μηδενικοί** αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$ (**γεωμετρικός μέσος**)
- δ) Επίλυση συστήματος και προσδιορισμός χαρακτηριστικών στοιχείων προόδου
- ε) Υπολογισμός ζητούμενων



Πρόοδοι – Ασκήσεις (II)

- Άθροισμα 3 διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου ίσο με 12
 - Γινόμενο των όρων αυτών ίσο με 28
 - Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά της προόδου και να υπολογιστεί ο όρος a_{12}
 - Να υπολογιστεί το άθροισμα των 12 πρώτων όρων
- $\alpha + \beta + \gamma = 12$
 - $\alpha\beta\gamma = 28$
 - $\beta = \alpha + \omega$
 - $\gamma = \alpha + 2\omega$

→

- $\alpha + \alpha + \omega + \alpha + 2\omega = 12$

→

- $\alpha + \omega = 4$



Πρόοδοι – Ασκήσεις (III)

- **Άθροισμα 3 διαδοχικών** όρων αριθμητικής προόδου ίσο με **12**
- **Γινόμενο** των όρων αυτών ίσο με **28**
- Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά της προόδου και να υπολογιστεί ο όρος a_{12}
- Να υπολογιστεί το **άθροισμα των 12 πρώτων όρων**

$$\begin{array}{llll} \bullet (\beta - \omega) + \beta + (\beta + \omega) = 12 & \longrightarrow & \bullet \beta = 4 & \longrightarrow & \bullet \beta = 4 & \longrightarrow & \bullet \beta = 4 \\ \bullet (\beta - \omega)\beta(\beta + \omega) = 28 & & \bullet (\beta - \omega)(\beta + \omega) = 7 & & \bullet (4 - \omega)(4 + \omega) = 7 & & \bullet 16 - \omega^2 = 7 \\ \bullet \beta = 4 & & & & & & \\ \bullet \omega = 3 \text{ ή } \omega = -3 & & & & & & \end{array}$$

$$\bullet \beta = 4 \quad \omega = 3 \quad \alpha = 1 \quad \gamma = 7$$

$$\alpha_{12} = 1 + 11 \cdot 3 = 34$$

$$S_{12} = (12/2) \cdot (1 + 34) = 210$$

$$\bullet \beta = 4 \quad \omega = -3 \quad \alpha = 7 \quad \gamma = 1$$

$$\alpha_{12} = 7 - 11 \cdot 3 = -26$$

$$S_{12} = (12/2) \cdot (7 - 26) = -114$$



Πρόοδοι – Ασκήσεις (IV)

- α) Να βρεθεί το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της ακολουθίας: 1, 2, 4, 8
- β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 1023;

• $\alpha_1=1$ • $\alpha_2=2$ • $\alpha_3=4$ • $\alpha_4=8$	$\longrightarrow$	• $\alpha_2-\alpha_1=1$ • $\alpha_4-\alpha_3=4$ • $\alpha_2/\alpha_1=2$ • $\alpha_3/\alpha_2=2$ • $\alpha_4/\alpha_3=2$	$\longrightarrow$	Άρα γεωμετρική πρόοδος, με $\alpha_1=1$ και $\lambda=2$ $S = a_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} = 1(2^8-1)/(2-1) = 255$
---	-------------------	--	-------------------	--

$$S = a_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} \rightarrow 1023 = 1 \frac{2^v - 1}{2 - 1} \rightarrow 1023 = 2^v - 1 \rightarrow 1024 = 2^v \rightarrow v = 10$$



Τυχαίες Μεταβλητές (I)

- Στα πειράματα τύχης μας ενδιαφέρει να γνωρίσουμε τη συνάρτηση του αποτελέσματος περισσότερο από το ίδιο το αποτέλεσμα.
- Μεταβλητές η τιμή των οποίων καθορίζεται από το αποτέλεσμα κάποιου στοχαστικού πειράματος ονομάζονται τυχαίες μεταβλητές.
- Η τιμή αυτή μπορεί να είναι ποσοτική (πχ ένδειξη ζαριού ή ποιοτική (πχ ρίψη κέρματος).
- Πχ το πλήθος ελαττωματικών αντικειμένων σε μια δειγματοληψία κατά την προμήθεια ή παραγωγή ενός προϊόντος. Δεν ενδιαφέρει ποια συγκεκριμένα αντικείμενα είναι ελαττωματικά αλλά πόσα στα n της δειγματοληψίας.
- Το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων της δειγματοληψίας (δυνατά αποτελέσματα) ορίζουν το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης.
- Η συνάρτηση X η οποία σε κάθε σημείο ω του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $X(\omega)$ ονομάζεται τυχαία μεταβλητή.



Τυχαίες Μεταβλητές (II)

- Κύριες κατηγορίες τυχαίων μεταβλητών
 - **Διακριτές** (πεπερασμένο σύνολο τιμών) – αριθμός επιτυχιών σε δειγματοληψία
 - **Συνεχείς** (πεδίο τιμών υποσύνολο των πραγματικών αριθμών) – κατανάλωση καυσίμου σε συγκεκριμένη περίοδο
- Ο υπολογισμός πιθανοτήτων που σχετίζονται με μία τυχαία μεταβλητή X είναι εφικτός αν βρεθεί μία έκφραση για τις πιθανότητες $P(X \leq x)$ για όλα τα $x \in \mathcal{R}$.
- Παράμετροι κατανομής τυχαίας μεταβλητής:
 - **Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $f(x)$**
 - Διακριτή ΤΜ: $f(x) = P(X=x) = P_x$ (Πιθανότητα η ΤΜ να πάρει την τιμή x)
 - Συνεχής ΤΜ: $f(x) = f(x) = P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$
 - **Αθροιστική συνάρτηση κατανομής: $F(x)$**
 - Διακριτή ΤΜ: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x \in B} P(X = x)$ (Άθροισμα πιθανοτήτων)
 - Συνεχής ΤΜ: $F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ (τιμές στο διάστημα μέχρι το x)



Τυχαίες Μεταβλητές (III)

- Πείραμα τύχης με τη ρίψη ζαριού με ισοπίθανα ενδεχόμενα
- $P(X=x)=1/6$, με $x=1,\dots,6$
- Να υπολογιστούν οι $F(1)$, $F(3)$, $F(6)$
- $F(1)= P(X\leq 1)=P(X=1)=1/6$
- $F(3)= P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1/6+1/6+1/6=1/2$
- $F(6)= P(X\leq 6)= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1$



Τυχαίες Μεταβλητές (IV)

- Ιδιότητες συναρτήσεων κατανομής και πιθανότητας

- $f(x) \geq 0$

- $0 \leq F(x) \leq 1$

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a), \quad a < b$

- Διακριτές ΤΜ: $\sum_{x \in A} f(x) = P(X \in A) = 1$

- Συνεχείς ΤΜ: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$

- $F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$



Τυχαίες Μεταβλητές (V)

- Χαρακτηριστικά τυχαίας μεταβλητής:
 - Μέση τιμή διακριτής ΤΜ: $\mu = E(x) = \sum x_i P(x_i)$
 - Μέση τιμή συνεχούς ΤΜ: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
 - Διασπορά $Var(X)$ ή σ^2 : $V(x) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2$
ή $V(x) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X)^2 - \mu^2$
 - Τυπική απόκλιση: θετική τετραγωνική ρίζα διασποράς



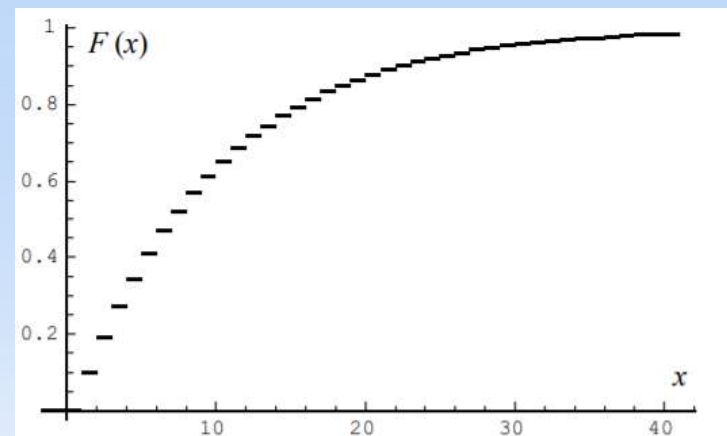
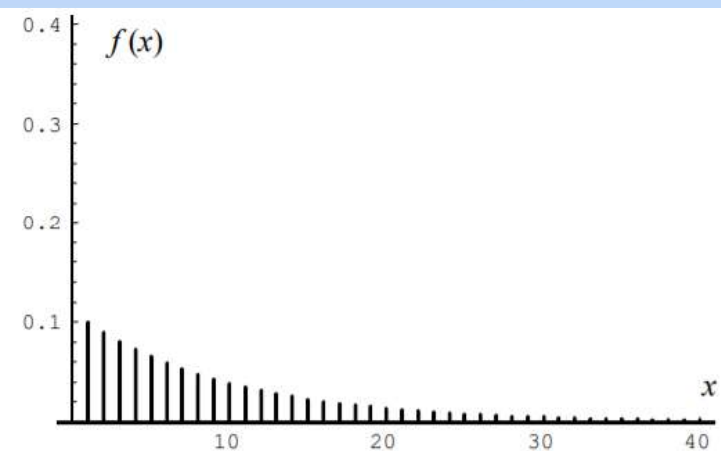
Κατανομές τυχαίων μεταβλητών (I)

- Διακριτές Κατανομές

- Poisson:** κατάλληλη για να περιγράψει αριθμό κλήσεων σε τηλεφωνικό κέντρο σε δεδομένη περίοδο, επισκέπτες σε μαγαζί, αριθμό ελαττωματικών προϊόντων κτλ

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad \lambda > 0 \text{ και } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^x f(i)$$





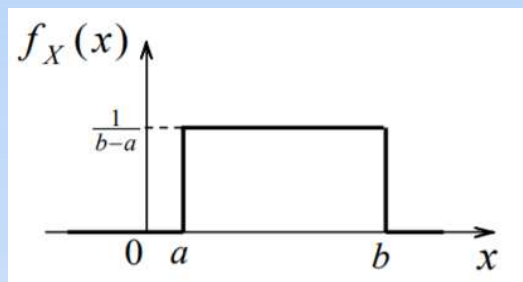
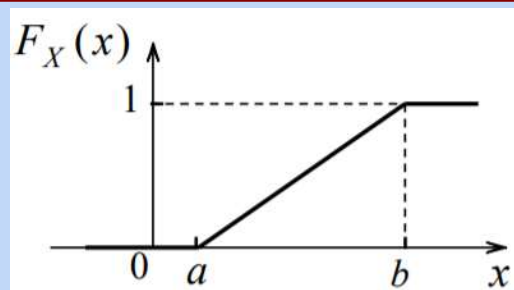
Κατανομές τυχαίων μεταβλητών (II)

- Συνεχείς Κατανομές
 - Ομοιόμορφη Κατανομή

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

- $E(x) = (a+b)/2$
- $\text{Var}(x) = (b-a)^2/12$

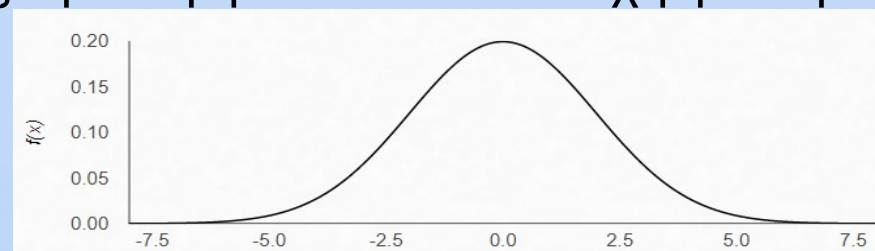




Κατανομές τυχαίων μεταβλητών (III)

- Συνεχείς Κατανομές
 - Κανονική Κατανομή
 - Πολύ σημαντική γιατί προσεγγίζει με ακρίβεια πολλά συνεχή φαινόμενα
 - Έχει κωδωνοειδή μορφή

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- Συμβολίζεται $N(\mu, \sigma^2)$
- Είναι συμμετρική γύρω από το μ
- $E(x) = \mu$
- $\text{Var}(x) = \sigma^2$
- Ειδική περίπτωση η $N(0, 1)$ τυπική ή τυποποιημένη κανονική κατανομή, για την συνάρτηση κατανομής της οποίας υπάρχουν πίνακες





Κατανομές τυχαίων μεταβλητών (IV)

- Συνεχείς Κατανομές
 - Κανονική Κατανομή: μετατροπή από τη $N(\mu, \sigma^2)$ στην $N(0,1)$ με αλλαγή μεταβλητής από τη X στην $Z=(X-\mu)/\sigma$.
 - Συνήθης πρακτική για να γίνει χρήση πινάκων για υπολογισμούς.
 - Ο χρόνος εξυπηρέτησης σε τράπεζα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=17\text{min}$ και τυπική απόκλιση $\sigma=3\text{min}$. Να βρεθεί η πιθανότητα ο χρόνος σε μια εξυπηρέτηση να είναι το πολύ 15min .

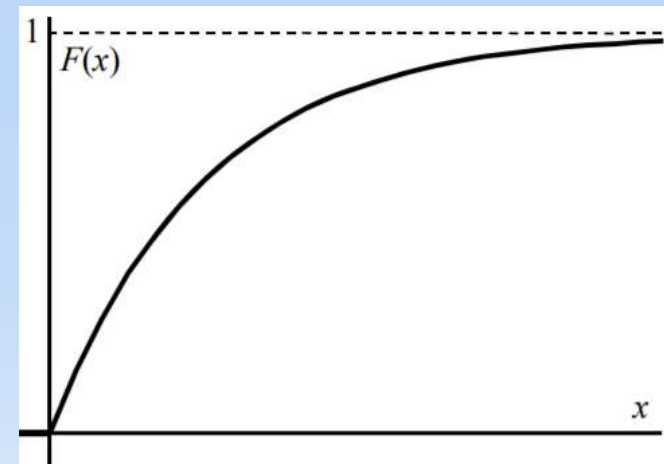
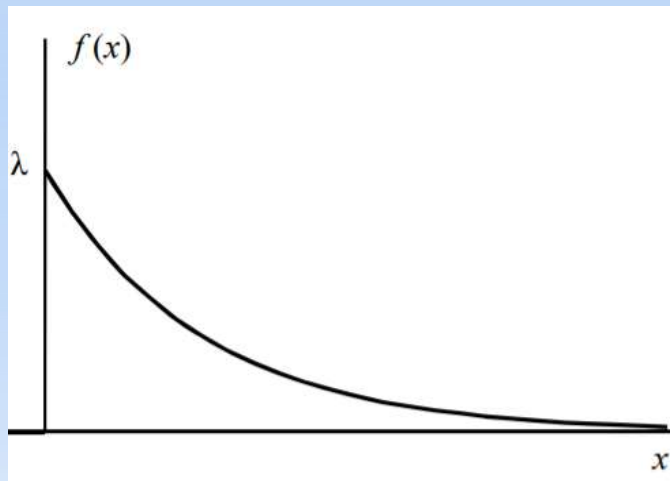
$$P(x \leq 15) = P(x - 17 \leq 15 - 17) = P\left(\frac{x - 17}{3} \leq \frac{-2}{3}\right) = P(z \leq -0.67) = 1 - 0.75 = 0.25$$



Κατανομές τυχαίων μεταβλητών (V)

- Συνεχείς Κατανομές

- Εκθετική Κατανομή: Εμφανίζεται συχνά σε περιπτώσεις που μελετάται ο χρόνος αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος.
- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ και $\lambda > 0$
- Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ και $\lambda > 0$
- $E(x) = 1/\lambda$
- $V(x) = 1/\lambda^2$





Κατανομές τυχαίων μεταβλητών (VI)

- Διακριτές Κατανομές
 - Διωνυμική Κατανομή
 - Γεωμετρική Κατανομή
- Συνεχείς Κατανομές
 - Weibull
 - Κατανομή Γάμμα



Thank
you