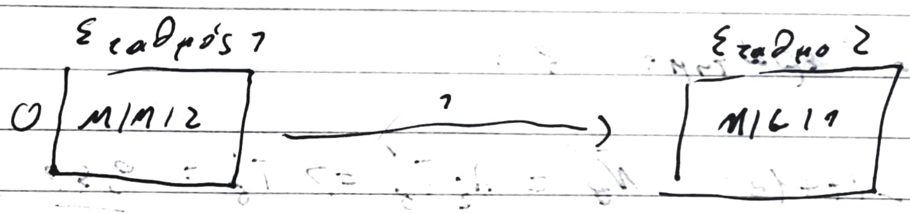
Αλέξανδρος Ρατούδης 2015010123 18/06/21

Δίκτυα Παραγωγής (CAM)

Θέμα 1

Δίκτυο Jackson

- Σταθμός 1 $M/M/2$ $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$ $\lambda_1' = ?$
- Σταθμός 2 $M/G/1$ $\mu_2' = ?$ $\lambda_2 = \frac{1}{2}$



- ~~Σταθμος~~

Δίκτυο Jackson : $\lambda_2 = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j P_{j1} = 1 \cdot \lambda_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = 1/2$$

- Σταθμος 1 : $P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{2-1} \frac{(2 \cdot 0,75)^k}{k!} + \frac{(2 \cdot 0,75)^2}{2!\,(1-0,75)} \right\}^{-1} \Rightarrow$

$\rho_1 = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow$ Ευσταθης

$$\Rightarrow P_0 = \left\{ 1 + 1,5 + 4,5 \right\}^{-1} = 7^{-1} = 0,14$$

$$N_{1q} = P_0 \left[\frac{2^2 \quad 0,75^{2+1}}{2!\,(1-0,75)^2} \right] = 0,14 \cdot 13,5 = 1,89$$

$$N_{1s} = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\bar{N}_1 = N_{1q} + N_{1s} = 3,39$$

• Σταθμός 2

$$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2_x}{2(1-\rho)} \qquad f(x) = 6(x-1)(2-x) \qquad 1 \le x \le 2.$$

$$\bar{x} = \int_1^2 x f(x)\, dx = \int_1^2 6x(x-1)(2-x)\, dx =$$

$$= \int_1^2 6x(2x - x^2 - 2 + x)\, dx = \int_1^2 18x^2 - 6x^3 - 12x\, dx$$

$$= \left[6x^3 - \frac{6}{4}x^4 - 6x^2 \right]_1^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{x} = \left(6\cdot 8 - \frac{6}{4}\cdot 16 - 6\cdot 4\right) - \left(6 - \frac{6}{4} - 6\right) =$

$= 0 + \frac{6}{4} = 1,5 \Rightarrow \bar{x} = 1,5 \Rightarrow \mu_2' = \frac{1}{1,5}$

$\sigma_x^2 = Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = \int_1^2 x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_1^2 6x^2(3x - x^2 - 2)\,dx =$

$= \int_1^2 18x^3 - 6x^4 - 12x^2\,dx =$

$= \left[\frac{18}{4}x^4 - \frac{6}{5}x^5 - 4x^3\right]_1^2 =$

$= \left(\frac{18\cdot 16}{4} - \frac{6}{5}\cdot 32 - 4\cdot 8\right) - \left(\frac{18}{4} - \frac{6}{5} - 4\right) =$

$= 1,6 - (-0,7) = 2,3$

$\sigma_x^2 = 2,3 - 1,5^2 = 0,05$

$\rho = \frac{\lambda_2}{\mu_2'} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1,5}} = \frac{1,5}{2} = 0,75$ -> ευσταθής

$$\bar{N}_2 = 0,75 + \frac{0,75^2 + 0,5^2 \cdot 0,05}{2(1-0,75)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{N}_2 = 1,9$$

$$\bar{N}_{\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}\varsigma} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 3,39 + 1,9 = 5,29$$

β) Νόμος του little.

$$\bar{N} = \lambda \cdot T$$

Άρα : $\bar{N}_1 = \lambda_1 T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{N_1}{\lambda_1} = \frac{3,39}{\frac{1}{2}} = 6,78$

$$\bar{N}_2 = \lambda_2 T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{N_2}{\lambda_2} = \frac{1,9}{\frac{1}{2}} = 3,8$$

$$T = T_1 + T_2 = 6,78 + 3,8 = 10,58$$

γ) Σταθμός 2 -> M/M/1

$\lambda_2 = 0,5$, $\bar{x}' = \bar{x} \Rightarrow \bar{x}' = 1,5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu_2 = \frac{1}{1,5}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,5}{1,5} \approx 0,34 \rightsquigarrow \text{Ευσταθές}$$

$$\bar{N}_B' = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,34}{1-0,34} = 0,51$$

Άρα στο ερώτημα (α) το αποτέλεσμα θα είναι:

$$\bar{N}_{\text{παραγωγής}} = \bar{N}_1 + \bar{N}_B' = 3,39 + 0,51 = 3,9$$

Ενώ στο ερώτημα β:

Νόμος Little: $\bar{N}_B' = \lambda_2 \cdot T_B' \Rightarrow T_B' = \frac{0,51}{0,5} = 1,02$

$T = T_1 + T_B' = 6,78 + 1,02 = 7,8$

Εαν οι χρόνοι παραγωγής μετατραπούν σε εκθετικούς τότε το μέσο πλήθος αλλά και ο μέσος χρόνος παραγωγής του σταθμού μειώνεται

Θέμα 2

α) Αρχική Κατάσταση: M/M/1 $\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{\rho}{1-\rho}$

Σενάριο 1 με χωρητικότητα k, $\bar{N}' = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$, M/M/1/K

$$\Rightarrow \bar{N}' = P_0 \sum_{n=0}^{k} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\bar{N} - \bar{N}' = \frac{\rho}{1-\rho} - P_0 \sum_{n=0}^{k} n \rho^n =$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \underbrace{P_0 \rho \sum_{n=0}^{k} (\rho^n)'}_{(1)}$$

$$(1) \Rightarrow P_0 \rho \left(\sum_{n=0}^{k} \rho^n\right)' = P_0 \rho \left(\frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}\right)' = \cancel{P_0 \rho (-k\rho^k (1-\rho)(1-}$$

$$= P_0 \rho \left[\frac{\rho^k (1-\rho) + (1-\rho^{k+1})}{(1-\rho)^2}\right] =$$

$$= P_0 \rho \left[\frac{\cancel{\rho^{k+1}} - \rho + 1 - \cancel{\rho^{k+1}}}{(1-\rho)^2}\right] = P_0 \frac{\rho - \rho^2}{(1-\rho)^2} \quad (2)$$

$$\bar{N} - \bar{N}' = \frac{\rho}{1-\rho} - P_0 \frac{(\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2} = \rho \frac{(1-\rho)(1-P_0)}{(1-\rho^2)^2} =$$

$$= \frac{\rho(1-P_0)}{(1-\rho)}$$

γ) Σενάριο 2

$$P_n = \begin{cases} P_0 \rho_1^n & 0 \le n \le m \\ P_m \rho_2^{n-m} & n > m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & 0 \le n \le m \\ P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \left(\frac{\lambda}{\mu+\mu_1}\right)^{n-m} & n > m \end{cases}$$

Συνέχεια ->

γ)

δ) Δεν εφαρμόζουν θεωρήματα στο σενάριο 1 διότι εφαρμόζεται η ~~...~~ ιδιότητα του κατωφλίου

=.

$$\bar{N} - \bar{N}' = \frac{\rho}{1-\rho} - P_0 \frac{(\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho\,(1-\rho)(1-P_0)}{(1-\rho)^2} =$$

$$= \frac{\rho\,(1-P_0)}{(1-\rho)}$$

γ) Σενάριο 2

$$P_n = \begin{cases} P_0\, \rho_1^{\,n} & 0 \le n \le m \\ P_m\, \rho_2^{\,n-m} & n > m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & 0 \le n \le m \\ P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \left(\frac{\lambda}{\mu+\mu_1}\right)^{n-m} & n > m \end{cases}$$

Συνέχεια ->

δ) Δεν εφαρμόζουν φαρμγγίδες στο σενάριο 1 διότι εφαρμόζεται η ~~[illegible]~~ πολιτική του κατωφλίου δ) $N_q = ?$ $M/M/m$ -> ξενάριο 2

$$N_q = P_0 \left[\frac{m^m \rho^{m+1}}{m!\,(1-\rho)^2} \right]$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu+\mu_1} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda < \mu + \mu_1$ ->

-> ώστε να υπάρχει ευστάθεια.

γ) ~~$N = \lambda T$~~

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu+\mu_1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow 1 = P_0 \sum_{n=0}^{n=m} \rho_1^n + P_0 \sum_{n=m+1}^{\infty} \rho_1^m \cdot \rho_2^{n-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \left\{ \frac{1-\rho_1^{m+1}}{1-\rho_1} + \rho_1^m \left(\frac{\rho^{n-m}}{1-\rho} \right) \right\}^{-1}$$