

1 Βασικές Έννοιες

- Κατανοήστε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε την μέθοδο του τραπεζίου (με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης). Γιατί η μέθοδος είναι πεπλεγμένη;
- Γιατί η μέθοδος Heun ονομάζεται πρόβλεψης-διόρθωσης;
- Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου του μέσου;
- Ποιά είναι η γενική φιλοσοφία κατασκευής των μεθόδων Rounge-Kutta (RK); Τί σημαίνουν τα ενδιάμεσα στάδια σε μία μέθοδο Rounge-Kutta και γιατί λέμε ότι οι μέθοδοι RK ανήκουν στη κατηγορία των μονοβηματικών μεθόδων;
- Τί αντιπροσωπεύει το μητρώο του Butcher για τις μεθόδους RK.
- Πότε μια μέθοδος RK ονομάζεται *άμεση* και πότε *πεπλεγμένη*; Τί σημαίνει αυτό στην πράξη (υλοποίηση);
- Ποιά είναι τα μητρώα του Butcher για τις μεθόδους: Euler, πεπλεγμένης Euler, μέσου, τραπεζίου και Heun;
- Η μέθοδος Rounge-Kutta 4 βημάτων (κλασσική) έχει ακρίβεια 4, τί σημαίνει αυτό;
- Ποιά είναι τα μητρώα του Butcher για τη μέθοδο Rounge-Kutta 4 βημάτων (κλασσική); Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου;
- Πώς μπορούμε να υλοποιήσουμε την μέθοδο Rounge-Kutta 4 βημάτων σαν σταθμισμένο άθροισμα κλίσεων;
- Ποιά μέθοδος έχει μεγαλύτερο διάστημα απόλυτης ευστάθειας: η άμεση Euler ή η Rounge-Kutta 4 βημάτων;

2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: (α) Εφαρμόστε τη μέθοδο Heun για να προσεγγίσετε τη λύση της παρακάτω Δ.Ε. στο $t = 0.9$ με βήμα $h = 0.3$

$$3y' + 5y^2 = \sin t, \quad y(0.3) = 5 \quad (\text{Υποδ. γράψτε τη Δ.Ε. στη μορφή } y' = f(t, y))$$

(β) Για τη παραπάνω Δ.Ε. εφαρμόστε τη μέθοδο Rounge-Kutta 4 βημάτων (κλασσική).

Ποιά από τις 2 μεθόδους θα εμπιστευόσασταν περισσότερο και γιατί;;

(Απαν: (α) $y(0.9) = -4297.5$), (β) $y(0.9) = -1261.5$

Άσκηση 2: Εφαρμόστε τη μέθοδο του μέσου για να προσεγγίσετε τη λύση της παρακάτω Δ.Ε. στο $t = 0.9$ με βήμα $h = 0.3$

$$3y' + \sqrt{y} = e^{0.1t}, \quad y(0.3) = 5$$

(Απαν: $y(0.9) = -2.6188$)

Άσκηση 3: Η ταχύτητα πτώσης ενός αλεξιπτωτιστή, σε m/s , συναρτήση του χρόνου t δίνεται ως

$$u(t) = 55.8 \tanh(0.17t), \quad t \geq 0.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Rounge-Kutta 4 βημάτων με χρονικό βήμα $h = 5s$, υπολογίστε την απόσταση που διάνυσε ο αλεξιπτωτιστής από το χρόνο $t = 2s$ μέχρι το χρόνο $t = 12s$.

(Απαν: $429.05m$)

Άσκηση 4: Για τη παρακάτω Δ.Ε. εφαρμόστε τη μέθοδο Runge-Kutta 4 βημάτων με βήμα $h = 0.3$ για να προσεγγίσετε τη λύση της παρακάτω Δ.Ε. στο $t = 0.9$

$$3y' + y^2 = e^t, \quad y(0.3) = 5.$$

Ποιά είναι η προσέγγιση της $y'(0.9)$;

(Απαν: $y(0.9) = 2.72779$), $y'(0.9) = -1.6604$