

## 1 Βασικές Έννοιες

- Κατανοήστε ότι για την αριθμητική προσέγγιση ενός προβλήματος αρχικών τυπών,  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(a) = y^0$ ,  $t \in [a, b]$ , χρειάζεται να διακριτοποιήσουμε το  $[a, b]$  με βήμα (ολοκλήρωσης)  $h = (b - a)/N$  και να προσεγγίσουμε τη λύση στα  $t^n = a + nh$ ,  $n = 0, \dots, N$ .
- Κατανοήστε ότι η μέθοδος Euler μπορεί να παραχθεί προσεγγίζοντας την παράγωγο  $y'(t^n)$  με αριθμητική διαφόριση προς τα εμπρός διαφορών.
- Πώς μπορεί να παραχθεί η μέθοδος Euler από το ανάπτυγμα Taylor και πώς με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης με τον αριστερό κανόνα του ορθογωνίου;
- Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Euler για την προσέγγιση της λύσης στο  $t^{n+1}$  στηρίζεται στην προσέγγιση της εφαπτομένης της λύσης,  $y(t^n)$ , στο σημείο  $t^n$  από μία κλίση και την ευθεία με αυτή τη κλίση που οδηγεί στο  $t^{n+1}$ .
- Τι ονομάζουμε τοπικό σφάλμα αποκοπής και τί ολικό σφάλμα μίας μεθόδου;
- Η μέθοδος Euler έχει σφάλμα τάξης τουλάχιστον ένα δηλ. είναι  $O(h)$ .
- Τι είναι η έννοια της ευστάθειας για τη μέθοδο Euler, και για τις μεθόδους για Σ.Δ.Ε. γενικότερα, και τί σημαίνει στη πράξη αν μία μέθοδος είναι ευσταθής ή όχι;
- Πότε μία αριθμητική μέθοδος λέγεται *απόλυτα ευσταθής* και τί είναι το διάστημα απόλυτης ευστάθειας σε σχέση με το βήμα  $h$ ;
- Ποιό είναι το πρόβλημα δοκιμής και ποιά η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου Euler; Κατανοήστε γιατί αυτό αποτελεί σοβαρό περιορισμό για την εφαρμογή της μεθόδου (ιδιαίτερα για άκαμπτες διαφορικές εξισώσεις).
- Κατανοήστε ότι η *πεπλεγμένη* (υπονοούμενη) μέθοδος Euler μπορεί να παραχθεί προσεγγίζοντας την παράγωγο  $y'(t^n)$  με αριθμητική διαφόριση προς τα πίσω διαφορών.
- Κατανοήστε ότι η *πεπλεγμένη* μέθοδος Euler σε κάθε βήμα της χρειάζεται (όταν η Δ.Ε. είναι μή-γραμμική) τη λύση μίας *μη-γραμμικής εξίσωσης* (με τις μεθόδους του ΚΕΦ. 2, π.χ. Newton-Raphson, σταθερού σημείου κτλ.)
- Γιατί λέμε ότι η *πεπλεγμένη* μέθοδος Euler είναι Α-ευσταθής;

## 2 Ασκήσεις

**Άσκηση 0:** Για τη Δ.Ε.  $y' = yt^2 - 1.1y$  με  $y(0) = 1$ ,

(α) Υπολογίστε την αναλυτική λύση

(β) Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με βήμα  $h = 0.5$  για να προσεγγίσετε την λύση στο  $t = 2$ .

(γ) Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με βήμα  $h = 0.25$  για να προσεγγίσετε την λύση στο  $t = 2$ .

(Απαν: (α)  $y(t) = e^{t^3/3 - 1.1t}$ , (β) 0.387155, (γ) 0.398143)

**Άσκηση 1:** Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler για να προσεγγίσετε τη λύση της παρακάτω Δ.Ε. στο  $t = 0.9$  με βήμα  $h = 0.3$

$$3y' + 5y^2 = \sin t, \quad y(0.3) = 5 \quad (\text{Υποδ. γράψτε τη Δ.Ε. στη μορφή } y' = f(t, y))$$

(Απαν:  $y(0.9) = -35.318$ )

**Άσκηση 2:** Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler για να προσεγγίσετε τη λύση της παρακάτω Δ.Ε. στο  $t = 0.9$  με βήμα  $h = 0.3$

$$3y' + \sqrt{y} = e^{0.1t}, \quad y(0.3) = 5$$

(Απαν:  $y(0.9) = -0.36288$ )

**Άσκηση 3:** Η ταχύτητα ενός σώματος, σε  $m/s$ , συνάρτηση του χρόνου  $t$  δίνεται ως

$$u(t) = 200 \ln(1+t) - t, \quad t \geq 0.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler με χρονικό βήμα  $h = 5s$ , υπολογίστε την απόσταση που διάνυσε το σώμα από το χρόνο  $t = 2s$  μέχρι το χρόνο  $t = 12s$ .

(Απαν:  $3133.1m$ )

**Άσκηση 4:** Για το πρόβλημα αρχικών τιμών (π.α.τ.)  $y' = -1000y$ ,  $y(0) = 1$ , σε ποιά περιοχή πρέπει να ανήκει το  $h$  στη μέθοδο Euler για να είναι οι υπολογισμοί ευσταθής. Για το παραπάνω π.α.τ πώς εφαρμόζεται η *πεπλεγμένη* μέθοδος Euler; Κάντε 2 βήματα για την κάθε μέθοδο με βήμα  $h = 0.2$  και συγκρίνεται τα αποτελέσματά σας με την ακριβή λύση.

**Άσκηση 5:** Για τη Δ.Ε.  $y' = -200000y + 200000e^{-t} - e^{-t}$

(α) Εκτιμήστε το βήμα  $h$  που απαιτείται για να είναι η μέθοδος Euler ευσταθής.

(β) Εάν  $y(0) = 0$ , χρησιμοποιήστε την *πεπλεγμένη* μέθοδο Euler για να προσεγγίσετε το  $y(0.5)$  με βήμα  $h = 0.1$ .

(Απαν: (α)  $h < 1 \cdot 10^{-5}$ , (β)  $0.606531$ )

**Άσκηση 6:** Για το Π.Α.Τ

$$y' = \cos(y), \quad y(0) = 1,$$

προσεγγίστε το  $y(1)$  με βήμα  $h = 0.25$  με την

(α) την άμεση μέθοδο Euler και

(β) την πεπλεγμένη μέθοδο Euler χρησιμοποιώντας σε κάθε βήμα  $n+1$  της μεθόδου 2 επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson για να προσεγγίσετε την ρίζα της μη-γραμμικής εξίσωσης που προκύπτει και με αρχική τιμή την τιμή του  $y^n$ .

**Άσκηση 7:** Για το σύστημα Δ.Ε

$$\begin{aligned} x_1' &= 2tx_1 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες  $x_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = 2$ ,

(α) εφαρμόστε την άμεση μέθοδο Euler με βήμα  $h = 0.25$  για να προσεγγίσετε τις τιμές  $x_1(1)$  και  $x_2(1)$  και

(β) εφαρμόστε την πεπλεγμένη μέθοδο Euler με βήμα  $h = 0.25$  για να προσεγγίσετε τις τιμές  $x_1(1)$  και  $x_2(1)$ .