

1 Βασικές Έννοιες

- Πώς κατασκευάζουμε τους **ανοιχτούς** τύπους Newton-Cotes;
- Κατανοήστε πώς κατασκευάζεται ο *τύπος του μέσου* και του Milne.
- Κατανοήστε ότι η *μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών* είναι ένας ισοδύναμος τρόπος κατασκευής κανονων ολοκλήρωσης για την προσέγγιση ολοκληρωμάτων και ότι με δεδομένους τους κόμβους οι άγνωστοι είναι τα βάρη του κανόνα ολοκλήρωσης.
- Πώς κατασκευάζεται ο αριστερός (δεξιός) τύπος του ορθογωνίου;
- Κατανοήστε τη μέθοδο Romberg και ότι ξεκινώντας από τον τύπο του Τραπεζίου κατασκευάζουμε διαδοχικά βελτιωμένες προσεγγίσεις, μέχρι την τάξη ακρίβειας που θέλουμε.
- Ποιές είναι οι διαφορές των τύπων ολοκλήρωσης Newton-Cotes και αυτών των Gauss-Legendre;
- Γιατί οι τύποι Gauss-Legendre είναι καλύτεροι από τους (απλούς) τύπους Newton-Cotes;
- Πώς παράγουμε του τύπους Gauss-Legendre και γιατί χρειάζεται να κάνουμε (συνήθως) αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα που θέλουμε να προσεγγίσουμε; Πώς γίνεται αυτή η αλλαγή μεταβλητής;

2 Ασκήσεις

Άσκηση 0: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_{0.5}^{1.5} 14^{2x} dx$ με τον ανοιχτό τύπο Newton-Cotes 2-σημείων (3-διαστημάτων) και με τον τύπο του Milne.
(Απαν: 276.8554, 458.4987)

Άσκηση 1: Κατασκευάστε το δεξιό τύπο του ορθογωνίου με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών.

Άσκηση 2: Κατασκευάστε τον απλό τύπο του Simpson 1/3 με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών.

Άσκηση 3: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ με ακρίβεια $O(h^8)$ με τη μέθοδο Romberg.
(Απαν: $I(f) = 0.74682403$)

Άσκηση 4: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_1^2 x e^x dx$ με σχετικό σφάλμα μικρότερο του 0.5% με τη μέθοδο Romberg. (Υποδ. Υπολογίστε την ακριβή λύση)
(Απαν: $I(f) = 41.17125852$)

Άσκηση 5: Η τιμή ενός ολοκληρώματος $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ με χρήση του κανόνα του τραπέζιου για $n = 1, 2$ και 4 υποδιαστήματα είναι αντίστοιχα, 5.3460, 2.7708 και 1.7536. Ποιά είναι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να πάρουμε με τη μέθοδο Romberg;
(Απαν: $I(f) \approx 1.3813$)

Άσκηση 6: Το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_5^{10} f(x)dx$ πώς μετασχηματίζεται στο $[-1, 1]$;

(Απαν: $I(f) = 2.5 \int_{-1}^1 f(2.5x + 7.5)dx$)

Άσκηση 7: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_{0.2}^{2.2} xe^x dx$ με χρήση Gauss-Legendre 2-σημείων

(Απαν: 11.672)

Άσκηση 8: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ με χρήση των κανόνων Gauss-Legendre (α) 1-σημείου, (β) 2-σημείων και (γ) 3-σημείων.

(Απαν: (α) 0.77880079, (β) 0.746959467 και (γ) 0.74681461)

Άσκηση 9: Για να εκτιμήσετε την ροή νερού, Q , σε έναν αγωγό ακτίνας $r = 2m$ ($r = 0$ στο κέντρο του αγωγού) σε μία απομονωμένη περιοχή, γνωρίζετε ότι αυτή δίνεται από τον τύπο

$$Q = \int_0^2 2\pi r V(r) dr$$

όπου $V(r)$ η ταχύτητα της ροής η οποία μεταβάλλεται κατα μήκος της ακτίνας, r , του αγωγού. Για λόγους οικονομίας μπορείτε να βάλετε μόνο 2 μετρητές (probes) της ταχύτητας κατα μήκος της ακτίνας του αγωγού για να εκτιμήσετε τη ροή (ολοκλήρωμα). Σαν μηχανικός, ποιές είναι οι δύο αυτές θεσεις που θα προτείνετε, ώστε στη συνέχεια να έχετε όσο το δυνατόν ακριβέστερο υπολογισμό;

(Απαν: 0.42 και 1.58)

Άσκηση 10: Θεωρείστε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, 1]$ ο οποίος παράγεται ως εξής:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 P_1(x)dx,$$

όπου $P_1(x)$ το γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλλει την $f(x)$ στο $x_0 = 0$ και $x_1 = 3/4$.

(α) Υπολογίστε αυτόν το κανόνα στη συνήθη μορφή, $Q_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$, και μετασχηματίστε τον για να κατασκευάσετε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x)dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$. Πώς μπορεί να παραχθεί ένας σύνθετος κανόνας ολοκλήρωσης από τον απλό αυτό κανόνα που να προσεγγίζει το $\int_a^b f(x)dx$;

(β) Για τον κανόνα ολοκλήρωσης $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha)$, αποδείξτε για ποιές τιμές ή τιμή του α ο κανόνας ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμο βαθμού ένα ή μικρότερου και για ποιές τιμές (ή τιμή) του α ο κανόνας ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμο 3ου βαθμού (και μικρότερου).

(Απαν: (α) $w_0 = 1/3, w_1 = 2/3$, (β) $\alpha = 1/\sqrt{3}$)