

1 Βασικές Έννοιες

- Κατανοήστε τη γενική μορφή των τύπων Newton-Cotes και την έννοια ότι ένας τύπος *ολοκληρώνει ακριβώς* σημαίνει ότι αν η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι πολυώνυμο συγκεκριμένου βαθμού η ολοκλήρωση με χρήση του τύπου θα είναι ακριβής.
- Κατανοήστε ότι ο (απλός) τύπος του Τραπεζίου παράγεται από ολοκλήρωση του (γραμμικού) πολυωνύμου παρεμβολής στα άκρα ολοκλήρωσης (και συμφωνεί με το γεωμετρικό τύπο υπολογισμού του εμβαδού τραπεζίου).
- Ο σύνθετος τύπος του Τραπεζίου είναι στην ουσία άθροισμα απλών τύπων (εμβαδών).
- Τι πληροφορίες μας δίνει το σφάλμα του σύνθετου τύπου του Τραπεζίου και πώς μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να προβλέψουμε πόσα διαστήματα χρειαζόμαστε για να πετύχουμε ζητούμενη ακρίβεια στον υπολογισμό (προσέγγιση) ενός ολοκληρώματος;
- Κατανοήστε ότι ο (απλός) τύπος του Simpson 1/3 παράγεται από ολοκλήρωση του (δεύτερης τάξης) πολυωνύμου παρεμβολής στα άκρα και το μέσο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Μεχρι τί βαθμού πολυώνυμα ολοκληρώνει ακριβώς αυτός ο τύπος;
- Χρειαζόμαστε άρτιο αριθμό διαστημάτων (περιττό αριθμό κόμβων) για να εφαρμόσουμε το σύνθετο κανόνα του Simpson 1/3 με βήμα h .
- Τι πληροφορίες μας δίνει το σφάλμα του σύνθετου τύπου του Simpson 1/3 και πώς μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να προβλέψουμε πόσα διαστήματα χρειαζόμαστε για να πετύχουμε ζητούμενη ακρίβεια στη προσέγγιση ενός ολοκληρώματος;
- Πώς παράγεται ο (απλός) κανόνας του Simpson 3/8 και ποιές οι διαφορές του (εφαρμογή, ακρίβεια, κτλ.) σε σχέση με το κανόνα του Simpson 1/3; Πώς εφαρμόζεται ο σύνθετος κανόνα του Simpson 3/8 με βήμα h (πλήθος υποδιαστημάτων, κόμβων κτλ).
- Πώς μπορούμε να συνδυάσουμε διάφορους τύπους ολοκλήρωσης σε διακριτά δεδομένα (μετρήσεις);

2 Ασκήσεις

Άσκηση 0: Για το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_{0.5}^{1.5} 14^{2x} dx$$

- (α) Υπολογίστε την αναλυτική λύση
 (β) Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα με τον απλό τύπο του Τραπεζίου
 (γ) Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα με τον απλό τύπο του Simpson 1/3
 (δ) Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα με τον απλό τύπο του Simpson 3/8
 (Απαν: (α) $I(f) = 517, 2301$, (β) 1379, (γ) 590, 333, (δ) 552, 3916)

Άσκηση 1Α: Για ποιιά από τις παρακάτω συναρτήσεις μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το σφάλμα ολοκλήρωσης στην προσέγγιση του $\int_a^b f(x)dx$ με τον απλό κανόνα του Τραπεζίου;

- (i) $f(x) = 10x$
 (ii) $f(x) = x^3 + 3x$
 (iii) $f(x) = 5x^2 + 3$
 (iv) $f(x) = 5x^2 + e^x$.

Άσκηση 1B: Για το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_0^4 (1 - e^{-2x}) dx$$

- (α) Υπολογίστε την αναλυτική λύση
 (β) Αν n = το πλήθος υποδιαστημάτων στο $[0, 4]$, εφαρμόστε τον σύνθετο τύπο του Τραπεζίου για $n = 2$
 (γ) Εφαρμόστε τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 για $n = 4$.
 (δ) Εφαρμόστε τον απλό τύπο του Simpson 3/8.
 (ε) Για $n = 5$ προσεγγίστε το ολοκλήρωμα με συνδυασμό τύπων ολοκλήρωσης Simpson.
 (Απαν: (α) $I(f) = 3.500168$, (β) 2.963033, (γ) 3.470592, (δ) 3.388365, (ε) 3.485876)

Άσκηση 2: Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_{-3}^5 (4x - 3)^3 dx$$

- με τον τύπο του Simpson 1/3 για $n = 4$ και για $n = 6$ και στη συνέχεια υπολογίστε αναλυτικά το $I(f)$ και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.
 (Απαν: $I(f) = 2056$)

Άσκηση 3: Για το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_0^3 (5 + 3 \cos x) dx$$

- (α) Υπολογίστε την αναλυτική λύση
 (β) Εφαρμόστε τον τύπο του Τραπεζίου για $n = 1$
 (γ) Εφαρμόστε τον τύπο του Simpson 1/3 για $n = 2$.
 (δ) Πόσα υποδιαστήματα χρειάζεται ο σύνθετος τύπος του Τραπεζίου για προσέγγιση του $I(f)$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων και πόσα ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3;
 (Απαν: (α) $I(f) = 15.42336$, (β) 15.43943, (γ) 15.43028, (δ) $n_T = 6365$, $n_S = 153$)

Άσκηση 4: Καλώδιο 11 μέτρων δέχεται ένα βάρος και η δύναμη V που του ασκείται σε αυτό δίνεται από την εξίσωση

$$V(x) = 5 + 0.25x^2,$$

όπου x η απόσταση κατά μήκος του καλωδίου. Γνωρίζουμε ότι $V = dM/dx$, όπου M η κάμψη του καλωδίου. Ολοκληρώνοντας

$$M = M_0 + \int_0^x V dx.$$

Αν $M_0 = 0$ και $x = 11$ υπολογίστε το M

- (α) αναλυτικά
 (β) με το σύνθετο τύπο του Τραπεζίου με 11 κόμβους
 (γ) τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 με 11 κόμβους.
 (Απαν : (α) $M = 165.9167$, (β) 166.375, (γ) 165.9167)

Άσκηση 5: Ο παρακάτω πίνακας δίνει στο χρόνο t την ταχύτητα, v , που έχει ένα αυτοκινητό

t, min	1	2	3.25	4.5	6	7	8	9	9.5	10
$v, \text{m/s}$	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

Υπολογίστε την απόσταση που έχει διανύσει,

(α) με χρήση του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου,

(β) με τον καλύτερο συνδυασμό του κανόνα του Τραπεζίου και αυτών των Simpson 1/3 και Simpson 3/8,

(γ) υπολογίζοντας το πολυώνυμο δεύτερης τάξης με τη προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα και ολοκληρώστε το.

(Απαν : (α) $3622,5m$, (β) $3596,25m$, (γ) $p_2(x) = -0.1117x^2 + 1.3526x + 3.4447$, $3645.594m$).

Άσκηση 6: Η συνολική μάζα, m , μιάς δοκού δίνεται από

$$m = \int_0^L \rho(x) A_c(x) dx$$

όπου, $\rho(x)$ = πυκνότητα, $A_c(x)$ = διατομή, L = το συνολικό μήκος της δοκού και x = η απόσταση κατά μήκος της δοκού. Υπολογίστε τη μάζα με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια με χρήση κανόνων ολοκλήρωσης με βάση τα παρακάτω δεδομένα.

x, m	0	2	3	4	6	8	10
$\rho, g/cm^3$	4.00	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
A_c, cm^2	100	103	106	110	120	133	150

(Απαν : $430,8779Kgr$).