

1 Βασικές Έννοιες

- Κάντε επανάληψη του αναπτύγματος Taylor και της έννοιας του υπολοίπου στο ανάπτυγμα.
- Πώς παράγονται με χρήση αναπτυγμάτων Taylor οι τύποι, παραγωγής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της, εμπρός, πίσω και κεντρικής διαφοράς με χρήση 3 ισαπέχοντων σημείων. Ποίο είναι το σφάλμα της κάθε τέτοιας προσέγγισης;
- Κατανοήστε ότι το σφάλμα στους τύπους διαφόρισης, με χρήση ισαπέχοντων σημείων, εξαρτάται από την απόστασή τους, h , και κατανοήστε το συμβολισμό $O(h)$ (τάξη ακρίβειας). Τί σημαίνει αυτό πρακτικά;
- Γιατί χαρακτηρίζουμε τους τύπους σαν εμπρός, πίσω και κεντρικών διαφορών; Τί σημαίνει αυτό στη πράξη; Κατανοήστε πως κατανέμονται στη κάθε περίπτωση τα σημεία που χρησιμοποιούμε στους τύπους.
- Πώς παράγεται ο τύπος κεντρικών διαφορών για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της, με χρήση 3 ισαπέχοντων σημείων. Αντίστοιχα πώς παράγονται οι τύποι εμπρός και πίσω διαφορών για τη προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου;
- Κατανοήστε ότι αν χρησιμοποιήσουμε πολυωνυμική παρεμβολή σε ισαπέχοντα σημεία (π.χ. με χρήση πολυωνύμων Lagrange) για να προσεγγίσουμε την πρώτη παράγωγο, τότε ο τύπος που παίρνουμε είναι όμοιος με αυτών που δίνουν τα αναπτύγματα Taylor για τα ίδια σημεία.
- Κατανοήστε ότι η παρεμβολή σε μη-ισαπέχοντα σημεία μπορεί να μας δώσει μια εκτίμηση της παραγώγου, απλά παραγωγίζοντας το πολ. παρεμβολής.
- Κατανοήστε ότι η μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών είναι απλά ένας άλλος ισοδύναμος τρόπος να παράγουμε τύπους για προσέγγιση παραγώγων.
- Κατανοήστε ότι στη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών η έννοια *παραγωγίζει ακριβώς* σημαίνει ότι αν η συνάρτηση προς παραγωγή είναι πολυώνυμο συγκεκριμένου βαθμού η παραγωγή με χρήση του τύπου θα είναι ακριβής.
- Τί είναι η μεθοδολογία παρεκβολής Richardson και πώς ξεκινάμε από ένα τύπο παραγωγής δεδομένης ακρίβειας και αυξάνουμε την ακρίβεια της προσέγγισής μας;

2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Για τη συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ στο $x = \pi/4$ υπολογίστε την πρώτη παράγωγο με τύπους εμπρός και πίσω διαφορών ακρίβειας $O(h)$ και $O(h^2)$ καθώς και κεντρικών διαφορών ακρίβειας $O(h^2)$ και $O(h^4)$, για $h = \pi/12$, και υπολογίστε το % σφάλμα σε κάθε περίπτωση.
(Απαντ: Εμπρός -0.79108963 -0.72601275, Πίσω -0.60702442 -0.71974088, Κεντρικές -0.69905703 -0.70699696)

Άσκηση 2: Για τη συνάρτηση $f(x) = \log x$ στο $x = 25$ υπολογίστε την πρώτη παράγωγο με τύπους εμπρός και πίσω διαφορών ακρίβειας $O(h)$ και $O(h^2)$ καθώς και κεντρικών διαφορών ακρίβειας $O(h^2)$ και $O(h^4)$, με $h = 2$, και υπολογίστε το % σφάλμα σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση 3: Για τις παρακάτω συναρτήσεις υπολογίστε τη δεύτερη παράγωγο με κεντρική διαφορά τάξης $O(h^4)$ στο σημείο x και βήμα h
(i) $f(x) = x^3 + 4x - 15$, $x = 0$, $h = 0.25$

(ii) $f(x) = e^x + x$, $x = 2$, $h = 0.2$.

(Απαν: (i)0, (ii)7.388924)

Άσκηση 4: Ο παρακάτω πίνακας δίνει στο χρόνο t την απόσταση, y , που έχει διανύσει ένας πύραυλος

t, s	0	25	50	75	100	125
y, km	0	32	58	78	92	100

Χρησιμοποιήστε κατάλληλες διαφορές τάξης $O(h^2)$ για να εκτιμήσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του πυραύλου σε κάθε δοσμένη χρονική στιγμή.

(Απαν:

$t = 0$, 1.40, -0.0096

$t = 25$, 1.16, -0.0096

$t = 50$, 0.92, -0.0096

$t = 75$, 0.68, -0.0096

$t = 100$, 0.44, -0.0096)

Άσκηση 5: Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη ροή (όγκο) νερού που βγαίνει από ένα μικρό αγωγό στο χρόνο, t ,

$t(s)$	0	1	5	8
$V(cm^3)$	0	1	8	16.4

Εκτιμήστε το ρυθμό μεταβολής της ροής στο χρόνο $t = 7s$.

(Απαν: $2.95 cm^3/s$)

Άσκηση 6: Μία χημική αντίδραση συχνά ακολουθεί το παρακάτω μοντέλο

$$\frac{dc}{dt} = -kc^n$$

όπου, c =συγκέντρωση, t =χρόνος, k =ρυθμός αντίδρασης, n =ταξή αντίδρασης. Για δοσμένες τιμές των c και $\frac{dc}{dt}$, τα k και n μπορούν να υπολογιστούν με γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων λογαριθμίζοντας ως

$$\log \left(-\frac{dc}{dt} \right) = \log k + n \log c.$$

Χρησιμοποιήστε την παραπάνω λογική τύπους διαφορών τάξης $O(h^2)$ για να υπολογίσετε τα k και n με δεδομένες τις παρακάτω μετρήσεις

t	10	20	30	40	50	60
c	3.52	2.48	1.75	1.23	0.87	0.61

(Απαν: $k = 10^{-1.45269}$, $n = 0.994579$)

Άσκηση 7: Εφαρμόστε τη μέθοδο παρεκβολής Richardson για να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της $f(x) = \cos(x)$ στο $x = \pi/4$, χρησιμοποιώντας αρχικό βήμα $h = \pi/3$ και τη μέθοδο κεντρικών διαφορών ακρίβειας $O(h^2)$ για την αρχική σας εκτίμηση.

(Απαν: -0.70539)

Άσκηση 8: Με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών υπολογίστε τα βάρη του κανόνα παραγωγής $f'(x_i) \approx w_0 f(x_{i-2}) + w_1 f(x_{i-1}) + w_2 f(x_{i+1}) + w_3 f(x_{i+2})$, όπου $x_k, k = i-2, i-1, i, i+1, i+2$ ισαπέχοντα σημεία απόστασης h .

(Απαντ: $w_0 = \frac{1}{12h}, w_1 = \frac{-8}{12h}, w_2 = \frac{8}{12h}, w_3 = \frac{-1}{12h}$)