

1 Βασικές Έννοιες

- Κατανοήστε ποιά είναι η διαφορά μεταξύ της παρεμβολής και της παλινδρόμησης σε διακριτά δεδομένα.
- Κατανοήστε ότι στην παλινδρόμηση ψάχνουμε τη βέλτιστη προσαρμογή (προσέγγιση) στα δεδομένα από ένα συγκεκριμένο χώρο (π.χ. πολυωνύμων πρώτου βαθμού δηλ. ευθειών, ή χώρους πολυωνύμων βαθμού > 1).
- Ποιό είναι το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων που χρησιμοποιούμε για να βρούμε αυτή τη βέλτιστη προσαρμογή από ένα συγκεκριμένο χώρο συναρτήσεων;
- Ποιές είναι και πώς παράγονται οι Κανονικές Εξισώσεις στις προσεγγίσεις ελαχίστων τετραγώνων
- Τι ονομάζουμε γραμμική παλινδρόμηση (δηλ. γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων) και πώς υπολογίζουμε τη βέλτιστη ευθεία (παλινδρόμησης);
- Τι είναι ο συντελεστής συσχέτισης (προσδιορισμού) και τί μας δείχνει;
- Κατανοήστε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική παλινδρόμηση για μη-γραμμική προσαρμογή (γραμμικοποιώντας).
- Τι είναι και πώς υπολογίζεται η πολυωνυμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων;
- Τι είναι και πώς υπολογίζεται η πολλαπλή γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων;

2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Κατασκευάστε τις Κανονικές Εξισώσεις για τη προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων της μορφής $y = ax$ και να προσαρμόσετε το μοντέλο στα παρακάτω δεδομένα. Ποιά είναι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης;

x	2	4	6	7	10	11	14	17	20
y	1	2	5	2	8	7	6	9	12

(Απαν: $y = 0.5681x$, $r^2 = 0.8407$)

Άσκηση 2: Για τα παρακάτω δεδομένα

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	1.5	2	3	4	5	8	10	13

(α) Υπολογίστε την ευθεία προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων $y = ax + b$

(β) Υπολογίστε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ελαχίστων τετραγώνων $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

(γ) Ποιά από τις 2 προσεγγίσεις περιγράφει καλύτερα την τάση των δεδομένων; (Υποδ. κάντε τη γραφική παράσταση δεδομένων και συναρτήσεων y και $p(x)$)

(Απαν: (α) $y = 1.483x - 2.0139$, (β) $p(x) = 1.488095 - 0.45184x + 0.191017x^2$)

Άσκηση 3: Για τα παρακάτω δεδομένα

x	0.75	2	3	4	6	8	8.5
y	1.2	1.95	2	2.4	2.4	2.7	2.6

- (α) Υπολογίστε το μοντέλο $y = \frac{Ax}{B+x}$ που προσαρμόζεται στα δεδομένα.
 (β) Υπολογίστε το μοντέλο $y = Ax^B$ που προσαρμόζεται στα δεδομένα.
 (γ) Υπολογίστε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ελαχίστων τετραγώνων $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
 (Απαν: (α) $2.927913 \frac{x}{1.081337+x}$, (β) $1.423297x^{0.311422}$, (γ) $p(x) = -0.03069x^2 + 0.449901x + 0.990728$)

Άσκηση 4: Για τα παρακάτω δεδομένα

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.3
y	800	975	1500	1950	2900	3600

- (α) Υπολογίστε το μοντέλο $y = Ae^{Bx}$ που προσαρμόζεται στα δεδομένα.
 (β) Υπολογίστε το μοντέλο $y = \tilde{A}10^{\tilde{B}x}$ που προσαρμόζεται στα δεδομένα. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.
 (Απαν: (α) $546.5909e^{0.818651x}$, (β) $546.590910^{0.355536x}$)

Άσκηση 5: Για τα παρακάτω δεδομένα

x	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9	1.3	1.5	1.7	1.8
y	0.75	1.25	1.45	1.25	0.85	0.55	0.35	0.28	0.18

Θέλουμε να προσαρμόσουμε το μοντέλο $y = axe^{bx}$. Γραμμικοποιήστε κατάλληλα το μοντέλο και υπολογίστε τα a, b βασιζόμενοι στα δεδομένα.
 (Απαν: $a = 9.661786, b = -2.4733$)

Άσκηση 6: Ένας ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει το ρυθμό ανάπτυξης k (ανά ημέρα) ενός βακτηρίου ως συνάρτηση της συγκέντρωσης του οξυγόνου $c(mg/l)$ όταν $c = 2mg/l$, με βάση τα παρακάτω πειραματικά δεδομένα,

c	0.5	0.8	1.5	2.5	4
k	1.1	2.4	5.3	7.6	8.9

Γνωρίζουμε ότι τέτοιου είδους δεδομένα μπορούν να προσομοιωθούν από το ακόλουθο μοντέλο

$$k = \frac{k_{max}c^2}{c_s + c^2}.$$

Χρησιμοποιήστε ένα μετασχηματισμό για την γραμμικοποίηση του μοντέλου και χρησιμοποιήστε γραμμική παλινδρόμηση για να εκτιμήσετε τις τιμές των k_{max} και c_s για να κάνετε την πρόβλεψη όταν $c = 2mg/l$.

(Απαν: $k_{max} = 10.06074$ και $c_s = 2.037189, k(2) = 6.666$)

Άσκηση 7: Για τα παρακάτω δεδομένα

x_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4
x_2	0	1	2	1	2	1	2	1	2
y	15.1	17.9	12.7	25.6	20.5	35.1	29.7	45.4	40.2

χρησιμοποιήστε πολλαπλή γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων ($y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$) για να τα προσεγγίσετε.

(Απαν: $y = 14.46087 + 9.025217x_1 - 5.70435x_2$)

Άσκηση 8: Δημιουργήστε την προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων για το ακόλουθο μοντέλο

$$y = a_1x + a_2x^2$$

δηλ. χωρίς σταθερό όρο (τεταγμένη) και δώστε τις Κανονικές Εξισώσεις που αντιστοιχούν. Εφαρμόστε το μοντέλο στα παρακάτω δεδομένα που περιγράφουν τη δύναμη που ασκείται σε ένα αντικείμενο τοποθετημένο σε μια ανεμοσύραγα σε σχέση με την ταχύτητα του ανέμου $v(m/s)$.

$v, m/s$	10	20	30	40	50	60	70	80
F, N	25	70	380	550	610	1220	830	1450

(Απαν: $y = 7.771024x + 0.119075x^2$)