

1 Βασικές Έννοιες

- Τι εννοούμε με τον όρο παρεμβολή με splines σε (διακριτά) δεδομένα ; Πώς πρέπει να διατάσσονται τα σημεία παρεμβολής ;
- Ποιά η διαφορά μεταξύ πολυωνυμικής παρεμβολής και παρεμβολής με splines ;
- Τι σημαίνει ομαλότητα της παρεμβάλλουσας spline και πώς εξασφαλίζεται στην κατασκευή της ;
- Πώς υπολογίζεται μια γραμμική splines παρεμβολής ; Ποιό το μέγιστο σφάλμα της στην παρεμβολής της σε μια συνάρτηση σε δεδομένα σημεία (κόμβους) ;
- Ποιές συνθήκες ομαλότητας (συνέχειας) πρέπει να ικανοποιούν (α) οι τετραγωνικές spline και (β) οι κυβικές splines ;
- Πόσοι και ποιοί είναι οι άγνωστοι στην κατασκευή μίας τετραγωνικής spline, σε συγκεκριμένα δεδομένα παρεμβολής ;
- Που χρειάζονται και τί είναι οι συνοριακές συνθήκες στην κατασκευή των τετραγωνικών και κυβικών spline ;
- Ποιές splines ονομάζουμε φυσικές (natural) και ποιές clamped κυβικές splines ;
- Πόσοι και ποιοί είναι οι άγνωστοι στην κατασκευή μίας κυβικής spline, σε συγκεκριμένα δεδομένα παρεμβολής ;
- Πώς συμπληρώνουμε τον πίνακα του τριδιαγώνιου συστήματος (7) για clamped κυβικές splines με βάση την εξίσωση (3) των διαλέξεων ;

2 Ασκήσεις

Άσκηση 0: (α) Είναι η παρακάτω συνάρτηση γραμμική spline; Ναι ή όχι και γιατί ;

$$S(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0.5] \\ 0.5 + 2(x - 0.5), & x \in [0.5, 2] \\ x + 1.5, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

(β) Είναι η παρακάτω συνάρτηση κυβική spline; Ναι ή όχι και γιατί ;

$$S(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0, \infty] \\ -x^3, & x \in [0, -\infty] \end{cases}$$

Άσκηση 1: Στα παρακάτω δεδομένα (x, y)

x	-1	0	1
y	0	1	3

(α) κατασκευάστε τη **γραμμική** spline παρεμβολής και

(β) την τετραγωνική spline παρεμβολής συνοριακή συνθήκη $S'(-1) = 0$.

(Απαν: (α)

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = x + 1, & x \in [-1, 0] \\ s_1(x) = 2x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

(β)

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + 2x + 2x^2, & x \in [-1, 0] \\ s_1(x) = 2x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

)

Άσκηση 2: Στα παρακάτω, ελεειπή, δεδομένα (x, y) παρεμβάλουμε μια τετραγωνική spline $S(x)$

x	1	2	4	6	7
y	5	11	;	;	32

$$S(x) = \begin{cases} ax - 1 & x \in [1, 2] \\ -2x^2 + 14x - 9, & x \in [2, 4] \\ bx^2 + cx + d & x \in [4, 6] \\ 25x^2 - 303x + 928 & x \in [6, 7] \end{cases},$$

όπου a, b, c, d σταθερές. Ποιές είναι οι (κοντινότερες) τιμές των c, b , και d ;

(Απαν: $c = 0.0, b = -0.25, d = 19$)

Άσκηση 3: Υπάρχουν σταθερές a, b, c και d έτσι ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι φυσική κυβική spline;

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + x^2 + cx, & x \in [-1, 0] \\ bx^3 + x^2 + dx, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Άσκηση 4: Είναι η παρακάτω συνάρτηση φυσική κυβική spline με κόμβους $-1, 0, 1$ και 2 ;

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2(x+1) + (x+1)^3 & x \in [-1, 0] \\ 3 + 5x + 3x^2, & x \in [0, 1] \\ 11 + (x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Άσκηση 5: Ποιά είναι η πρώτη και τελευταία εξίσωση του τριδιαγώνιου συστήματος (7) για clamped κυβικές splines, με συνοριακές συνθήκες $S'(x_0) = f'(x_0)$ και $S'(x_n) = f'(x_n)$ με βάση την εξίσωση (3) των διαλέξεων για ομοιόμορφη διαμέριση βήματος h ; (Απάν.

$$\begin{aligned} 2s_0'' + s_1'' &= \frac{6}{h^2}[(y_1 - y_0) - hf'(x_0)] \\ s_{n-1}'' + 2s_n'' &= \frac{6}{h^2}[-(y_n - y_{n-1}) + hf'(x_n)] \end{aligned}$$

Άσκηση 6: Στα δεδομένα $(x_i, y_i) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ υπολογίστε

(α) τη γραμμική spline παρεμβολής,

(β) την φυσική κυβική spline παρεμβολής και

(γ) την clamped κυβική spline παρεμβολής με συνοριακές συνθήκες με $S'(1) = 1$ και $S'(3) = 2$.

(Απαν: (β)

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

(γ)

$$S(x) = \begin{cases} 2 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{2}(x-2)^3, & x \in [3, 5]. \end{cases}$$

)

Άσκηση 7: Για τα παρακάτω $(x_i, f(x_i))$ δεδομένα

x_i	1	2	3	5	7	8
$f(x_i)$	3	6	19	99	291	444

εκτιμήστε την τιμή του $f(4)$ με χρήση φυσικών κυβικών spline.(Απαν: $s_2(x) = 1.384279(5-x)^3 + 2.145197(x-3)^3 + 3.962882(5-x) + 40.91921(x-3)$, $x \in [3, 5]$)