

# 1 Βασικές Έννοιες

- Τί εννοούμε με τον όρο πολυωνυμική παρεμβολή σε (διακριτά) δεδομένα και πώς τη χρησιμοποιούμε;
- Πώς παρεμβάλουμε μία συνάρτηση με ένα πολυώνυμο  $n$ -βαθμού και πώς μπορεί να μας είναι χρήσιμο;
- Γιατί ένα πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό και ποιος είναι ο μέγιστος βαθμός του για δεδομένο πλήθος σημείων παρεμβολής;
- Κατανοήστε ότι τα σημεία παρεμβολής (δεδομένα ή τιμές συνάρτησης) δεν είναι απαραίτητα ισαπέχοντα μεταξύ τους, απλά διαφορετικά.
- Τί είναι και τι ιδιότητες έχουν τα πολυώνυμα Lagrange;
- Πώς υπολογίζεται ένα πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση των πολυωνύμων Lagrange;
- Πώς υπολογίζεται η εκτίμηση σφάλματος πολυωνυμικής παρεμβολής μιας συνάρτησης για δεδομένο πλήθος σημείων παρεμβολής;
- Πώς υπολογίζεται το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Newton;
- Τί είναι οι διαιρεμένες διαφορές και πώς εφαρμόζονται για τον υπολογισμό των συντελεστών του πολυωνύμου παρεμβολής στη μορφή Newton;
- Τι αντιπροσωπεύουν οι διαιρεμένες διαφορές και πιά η σχέση τους με τα πολυώνυμα Lagrange;
- Κατανοήστε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Lagrange και στη μορφή Newton είναι ένα και το αυτό (απλά υλοποιείται με διαφορετικό τρόπο).
- Ποιά είναι τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα μεταξύ της μορφής Lagrange και της μορφής Newton;
- Τί προβλήματα μπορεί να εμφανιστούν για πολυωνυμική παρεμβολή με πολυώνυμο μεγάλου βαθμού και που οφείλονται αυτά; Ποιό είναι το φαινόμενο του Runge; Πώς μπορούν να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα;
- Ποιά είναι η πολυωνυμική παρεμβολή Hermite (συνθήκες παρεμβολής); Ποιό είναι το εφαιπτόμενο πολυώνυμο και πώς υπολογίζεται με χρήση των πολυωνύμων Lagrange;

# 2 Ασκήσεις

**Άσκηση 1:** Τα παρακάτω δεδομένα δίνουν την ταχύτητα ( $u$ ) ενός σώματος στο χρόνο ( $t$ )

|            |    |    |    |    |     |
|------------|----|----|----|----|-----|
| $t(sec)$   | 0  | 15 | 18 | 22 | 24  |
| $u(m/sec)$ | 22 | 24 | 37 | 25 | 123 |

(α) Για να εκτιμήσετε την ταχύτητα στο χρόνο  $t = 14.9$  εφαρμόστε πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange σε 3 κατάλληλα σημεία από τα δεδομένα.

(Απαν:  $u(14.9) \approx 23,639$ )

(β) Υπολογίστε το τετραγωνικό πολυώνυμο Lagrange στα σημεία  $t = 15, 18$  και  $22$  και εκτιμήστε σε ποιό χρόνο, σε δευτερόλεπτα, η ταχύτητα του σώματος είναι  $26m/sec$  στο χρονικό διάστημα από  $t = 15$  έως  $t = 22$ .

(Απαν:  $t = 21,858sec$ )

**Άσκηση 2:** Τα παρακάτω δεδομένα δίνουν την κίνηση ενός robot στο  $x - y$  επίπεδο

|     |     |     |     |   |
|-----|-----|-----|-----|---|
| $x$ | 2   | 4.5 | 5.5 | 7 |
| $y$ | 7.5 | 7.5 | 6   | 5 |

Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα δεδομένα που περιγράφει την τροχία του robot στο  $x - y$  επίπεδο. Ποιό είναι το μήκος,  $S$ , αυτής της τροχίας από το  $x = 2$  στο  $x = 7$ ;

(Απαν:  $P_3(x) = 0.15238x^3 - 2.2571x^2 + 9.6048x - 3.9$ ,  $S = \int_2^7 \sqrt{1 + (0.45714x^2 - 4.5142x + 9.6048)^2} dx$ )

**Άσκηση 3:** Για τα παρακάτω δεδομένα

|     |    |    |    |
|-----|----|----|----|
| $x$ | 15 | 18 | 22 |
| $y$ | 24 | 37 | 25 |

το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Newton είναι  $p_2(x) = b_0 + b_1(x - 15) + b_2(x - 15)(x - 18)$ . Ποιά είναι η τιμή του  $b_1$  εφαρμόζοντας την μέθοδο διαιρεμένων διαφορών;

(Απαν:  $b_1 \approx 4,3333$ )

**Άσκηση 4:** Για τα παρακάτω  $x - y$  δεδομένα

|     |    |    |     |
|-----|----|----|-----|
| $x$ | 18 | 22 | 24  |
| $y$ | :  | 25 | 123 |

το πολυώνυμο παρεμβολής είναι  $8.125x^2 + 324.75x + 3237$ ,  $18 \leq x \leq 24$  και το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Newton  $P_2(x) = a_0 + a_1(x - 18) + a_2(x - 18)(x - 22)$ . Ποιά είναι η τιμή του  $a_2$ ;

(Απαν:  $a_2 = 8,125$ )

**Άσκηση 5:** Για τα παρακάτω  $(x_i, f(x_i))$  δεδομένα

|          |   |   |    |    |     |     |
|----------|---|---|----|----|-----|-----|
| $x_i$    | 1 | 2 | 3  | 5  | 7   | 8   |
| $f(x_i)$ | 3 | 6 | 19 | 99 | 291 | 444 |

εκτιμήστε την τιμή του  $f(4)$  με χρήση κατάλληλων πολυωνύμων παρεμβολής στη μορφή Newton βαθμού 1 μέχρι 4. Από ποιά συνάρτηση παράγεται η  $f(x)$ ;

**Άσκηση 6:** Έστω το πολυώνυμο παρεμβολής  $P_3(x)$  τ.ω.  $P_3(i) = e^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Αποδείξτε ότι  $e^x > P_3(x) \quad \forall x \in (2, 3)$ . (Υποδειξη, χρησιμοποιείτε τον τύπο του σφάλματος της πολ. παρεμβολής.)

**Άσκηση 7:** Για τον υπολογισμό/προσέγγιση του  $\log(10)$  έχουμε τα δεδομένα

|             |           |           |           |           |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x_i$       | 8         | 9         | 11        | 12        |
| $\log(x_i)$ | 0.9030900 | 0.9542425 | 1.0413927 | 1.0791812 |

Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής,  $P_3(x)$ , στη μορφή Newton με χρήση διαιρεμένων διαφορών και προσεγγίστε το  $\log(10)$ , δώστε μία εκτίμηση του σφάλματος.