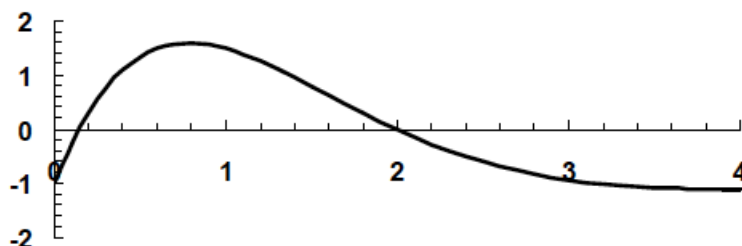


1 Βασικές Έννοιες

- Πώς παράγεται η μέθοδος Newton-Raphson (και γεωμετρικά);
- Ποιά η τάξη σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson και τί σημαίνει αυτό στην πράξη;
- Γιατί η επιλογή "καλής" αρχικής τιμής είναι σημαντική για τις μεθοδο Newton-Raphson;
- Πώς μπορεί να μας βοηθήσει το Θεώρημα Γενικής σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson και πώς εφαρμόζεται για να πετύχουμε γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου;
- Πότε μπορεί να αποτύχει η μεθοδος Newton-Raphson και πότε μπορεί να μειωθεί η τάξη σύγκλισής της;
- Πώς τροποποιείται η μέθοδος Newton-Raphson για την προσέγγιση ριζών πολλαπλότητας μεγαλύτερης του ένα;
- Πώς παράγεται η μέθοδος της Τέμνουσας (και γεωμετρικά);
- Γιατί είναι διαφορετικές οι μέθοδοι Εσφαλμένης Θέσης και Τέμνουσας;
- Κατανοήστε πώς περιγράφεται γραφικά η σύγκλιση (απόκλιση) των μεθόδων Newton-Raphson και Τέμνουσας.
- Πώς εφαρμόζουμε το κριτήριο τερματισμού με δεδομένη ανοχή σφάλματος στις μεθόδους Newton-Raphson και Τέμνουσας; Πώς εγγυόμαστε τα σωστά δεκαδικά στην απάντησή μας;
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (και πώς) της μέθοδο Newton-Raphson για την προσέγγιση μιγαδικών ριζών μιας εξίσωσης;
- Τι είναι ένα μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων;
- Πώς επεκτείνεται η μέθοδος Newton-Raphson (NR) για τη λύση μη-γραμμικών συστημάτων εξισώσεων και πώς υπολογίζετε το αντίστοιχο κριτήριο τερματισμού;
- Ποιά είναι η μέθοδος Steffensen και πώς εφαρμόζεται/συνδυάζεται με τη μέθοδο σταθερού σημείου;
- Πώς κατασκευάζεται η μέθοδος του Muller και ποιά η χρησιμότητά της;

2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Προσεγγίστε τη μικρότερη θετική ρίζα της $f(x) = 8 \sin(x)e^{-x} - 1$ (δίνεται το γράφημά της) (α) με τη μέθοδο Newton-Raphson (NR) για $x_0 = 0.3$ κάνοντας 3 επαναλήψεις και (β) τη μέθοδο της Τέμνουσας κάνοντας 4 επαναλήψεις με $x_0 = 0.5$ και $x_1 = 0.4$. Πόσα δεκαδικά ψηφεία είναι σωστά σε κάθε απάντησή σας;



(Απαν: $x_{nr} = 0.145012$ και $x_t = 0.144016$.)

Άσκηση 2: Η μέθοδος NR εφαρμόζεται για τον υπολογισμό της n -οστής τάξης ρίζας ενός αριθμού α , δηλ. $\sqrt[n]{\alpha}$, ως

$$x_{i+1} = \frac{1}{n} \left[(n-1)x_i + \frac{\alpha}{x_i^{n-1}} \right] \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Αποδείξτε πώς παράγεται η παραπάνω διαδικασία (1). Να εφαρμοστεί η μέθοδος για τον υπολογισμό του $7^{1/5}$ με ακρίβεια τουλάχιστον 5 δεκαδικών ψηφίων για $x_0 = 1$.

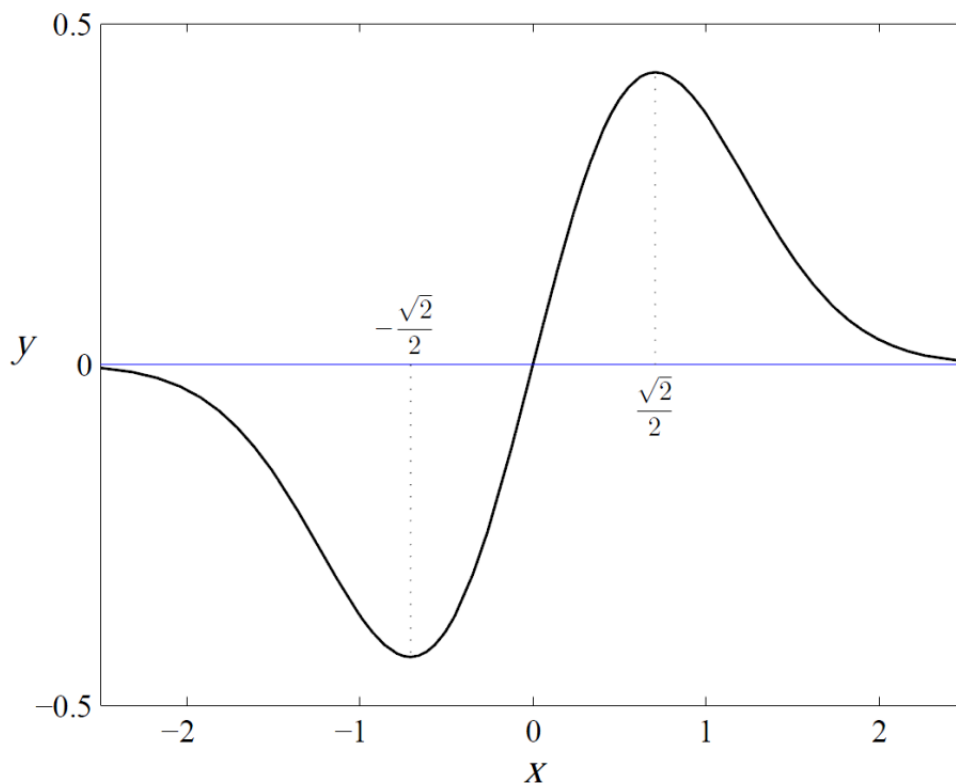
(Απαν: $x^* = 1.475773$.)

Άσκηση 3: Εφαρμόστε τη μέθοδο NR για να υπολογίσετε τη ρίζα της $f(x) = e^{-0.5x}(4-x) - 2$ για αρχικές τιμές (α) $x_0 = 2$, (β) $x_0 = 6$ και (γ) $x_0 = 8$. Εξηγήστε τα αποτελεσματα σας. (Υπόδειξη, κάντε το γράφημα της f .)

Άσκηση 4: Για την $f(x) = e^x - x - 1 = 0$ δείξτε ότι έχει μία ρίζα ($x^* = 0$) $\in \mathbb{R}$ και εφαρμόστε 3 βήματα της μεθόδου Newton-Raphson (NR) για $x_0 = 0.5$. Υπάρχει κάποια ιδιαιτερότητα για αυτή τη ρίζα; Αν ναι, εφαρμόστε 3 βήματα της κατάλληλης τροποποιημένης μεθόδου NR για $x_0 = 0.5$ και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

Άσκηση 5: Για την $f(x) = \tan(\pi x) - 6$ μία ρίζα της η $x^* = 0.44743154 \in [0, 0.48]$. Εφαρμόστε 3 επαναλήψεις της μεθόδου της τέμνουσας με $x_0 = 0$ και $x_1 = 0.48$ και σχολιάστε το αποτέλεσμα σας. Ποιό είναι το αποτέλεσμα αν εφαρμόσετε 3 επαναλήψεις της μεθόδου NR με $x_0 = 0.48$;

Άσκηση 6: Για την $f(x) = xe^{-x^2}$ δίνεται το γράφημά της με την προφανή (μοναδική) ρίζα της. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο NR με $x_0 = 0.5$ εξηγήστε (και γραφικά) τί συμβαίνει. Όμοια για $x_0 = 0.5065$ και $x_0 = 0.3$.



Άσκηση 7: Θέλετε να υπολογίσετε την ρίζα της $g(x) = e^{0.5x} + 5x - 5$. Από τις μέχρι τώρα γνωστές σας μεθόδους (α) διχοτόμησης (β) εσφαλμένης θέσης (γ) σταθερού σημείου (δ) Newton-Raphson (NR) και (ε) Τέμνουσας, επιλέξτε την καλύτερη κατά την κρίση σας για να πάρετε προσέγγιση ακρίβειας 0.02(2%). Γνωρίζουμε ότι όλες οι μέθοδοι, εκτός του σταθερού σημείου, συγκλίνουν για θετικές αρχικές τιμές. Αν χρησιμοποιήσετε μέθοδο αγκυλών διάλέξτε $[a, b] = [0, 2]$, αν επιλέξετε την (NR) δώστε $x_0 = 0.7$ ενώ αν επιλέξετε την Τέμνουσα $x_0 = 0, x_1 = 2$. Για τη μέθοδο σταθερού σημείου πρέπει να αποδείξετε τη σύγκλιση της πρώτα.

Άσκηση 8: Έστω το σύστημα μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων

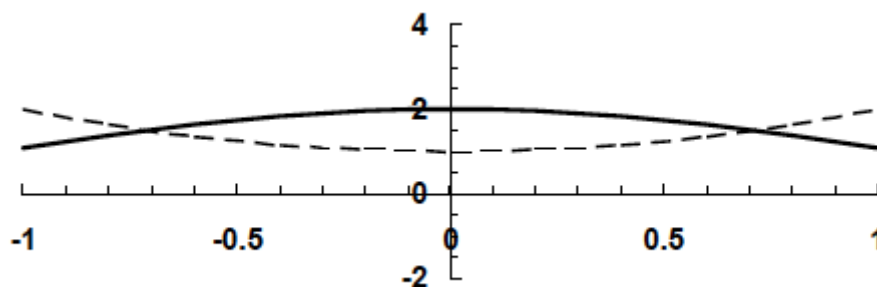
$$\begin{aligned} -x^2 + x + 0.75 - y &= 0 \\ x^2 - y - 5xy &= 0. \end{aligned}$$

Εφαρμόστε 3 βήματα της μεθόδου (NR) με $x_0 = y_0 = 1.2$ για προσέγγιση της λύσης του. (Απαν: $x_3 = 1.372455$ και $y_3 = 0.2392925$)

Άσκηση 9: Θέλουμε να υπολογίσουμε τη θετική λύση του παρακάτω μη-γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 10 \\ y &= 2 \cos(x) - y, \end{aligned}$$

και δίνεται το γράφημα των δύο εξισώσεων.



Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson (NR) για μη-γραμμικά συστήματα με κατάλληλο διάνυσμα αρχικών τιμών (x_0, y_0) για να υπολογίσετε τη λύση με ακρόβεια τουλάχιστον 6 σωστών δεκαδικών ψηφίων.

Απαν: $(x^*, y^*) = (0.7146211, 1.510683)$