

1 Βασικές Έννοιες

- Πώς παράγεται μια μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ από την $f(x) = 0$;
- Τι ονομάζουμε σταθερό σημείο της $\phi(x)$ και ποιά η σχέση του με τη ρίζα της $f(x)$;
- Ποιές είναι οι δύο προϋποθέσεις του Θ. Συστολής που ελέγχουμε για τη σύγκλιση μίας μεθόδου σταθερού σημείου;
- Πώς επιλέγουμε την αρχική τιμή x_0 για να “ξεκινήσει” η $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- Κατανοήστε πώς περιγράφεται γραφικά η σύγκλιση (απόκλιση) μιας μεθόδου σταθερού σημείου.
- Πώς εφαρμόζουμε το κριτήριο τερματισμού στη μέθοδο σταθερού σημείου;
- Τι τάξη σύγκλισης έχουν, εν γένει, οι μέθοδοι σταθερού σημείου και γιατί;

2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Εφαρμόστε τη μέθοδο σταθερού σημείου για να προσεγγίσετε τη ρίζα της $f(x) = 2\sin(\sqrt{x}) - x$ με $x_0 = 0.5$ και ανοχή σφάλματος $\leq 0.002\%$. Για ποίο διάστημα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Συστολής;
(Απαν: $x^* = 1.972377$)

Άσκηση 2: Έστω η $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ με ρίζες $x_1 = 0.381966$ και $x_2 = 2.618034$. Συγκρίνετε τις δύο παρακάτω μεθόδους σταθερού σημείου

$$(i) x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1) \equiv \phi_1(x) \quad (ii) x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \equiv \phi_2(x)$$

ως προς σε ποιο διαστημα ισχύει το Θ. Συστολής και ποια ρίζα μπορεί να προσεγγίσει η κάθε μέθοδος για κατάλληλο x_0 .

Άσκηση 3: Για να υπολογίσουμε τη (μοναδική) ρίζα, x^* , της $f(x) = x - \cos(x)$ (σε ακτίνια) μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο $x_{n+1} = \cos(x_n)$ για οποιοδήποτε x_0 . Εξηγήστε γιατί και εφαρμόστε τη μέθοδο σε ένα απλό υπολογιστή τσέπης πατώντας επαναλαμβανόμενα το $\cos$ αρχίζοντας από τυχαίο x_0 . Δείξτε επίσης ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1 - (x^*)^2}$$

(Απαν: $x^* = 0.73908513321516$)

Άσκηση 4: Αποδείξτε ότι η ακολουθία που παράγετε από τη μέθοδο σταθερού σημείου $x_{n+1} = \frac{1}{2}e^{x_n/2}$ συγκλίνει και το όριό της βρίσκετε στο διάστημα $[0, 1]$.

(Απαν: $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$ και $\max_{x \in [0, 1]} |\phi'(x)| \leq 1/2$)

Άσκηση 5: Αποδείξτε ότι η ακολουθία που παράγετε από τη μέθοδο σταθερού σημείου $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$ συγκλίνει και το όριό της βρίσκετε στο διάστημα $[0, 1] \forall x_0 \in [0, 1]$

(Απαν: $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$ και $\max_{x \in [0, 1]} |\phi'(x)| \leq 2/3$)

Άσκηση 6: Έστω $\alpha > 0$ και $x_0 \in (\frac{1}{2\alpha}, \frac{3}{2\alpha})$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n(2 - \alpha x_n)$$

συγκλίνει. Ποιό είναι το όριό της; (Υπόδειξη, δείξτε αρχικά ότι $\phi((\frac{1}{2\alpha}, \frac{3}{2\alpha})) \subset [\frac{3}{4\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$)

Άσκηση 7: Θεωρήστε την $f(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$ της οποίας οι ρίζες είναι βεβαίως οι αριθμοί 1 και 5. Φτιάχνουμε τη μέθοδο σταθερού σημείου

$$x_{n+1} = \frac{x^2 + 5}{6} \equiv \phi(x_n).$$

Διερευνήστε τη συμπεριφορά της ακολουθίας $\{x_n\}$, $n > 0$ όταν το x_0 παίρνει πραγματικές τιμές.
(Απαν: Για $x_0 \in (-5, 5)$ η $x_n \rightarrow 1$, για $x_0 > 5$ ή $x_0 < -5$ αποκλίνει και για $x_0 = \pm 5$ συγκλίνει στο 5.)