

Θέμα 1

[10] Υποθέτουμε ότι ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής χρησιμοποιεί ένα σύνολο αριθμών μηχανής, M , με παραμέτρους: $\beta = 10, t = 3, U = -10$, και $L = 10$ και ότι η μετατροπή των αριθμών σε αριθμούς μηχανής γίνεται με στρογγυλοποίηση.

(α) Θέλουμε να υπολογίσουμε σε αυτόν τον υπολογιστή τη διαφορά

$$f(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}, \quad \text{για κάποιο } x \in (0, 10^{-6}).$$

Τι πρόβλημα ακρίβειας προκύπτει λόγω του ότι οι πράξεις γίνονται με αριθμητική κινητής υποδιαστολής και πεπερασμένη ακρίβεια και ως μπορεί να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα;

(β) Αν δώσουμε στον παραπάνω υπολογιστή τους αριθμούς $x = 1224.33$ και $y = 99.3467$ και του ζητήσουμε να εκτελέσει τις πράξεις $x + y$ και $x - y$, τι αποτελέσματα θα μας δώσει;

Θέμα 2

(α)[15] Για την εξίσωση $f(x) = \ln x - x + 2 = 0$, δείξτε ότι έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, 4)$. Αν $\{x_n\}$ είναι η ακολουθία $x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$, όπου $\phi(x) = \frac{1}{2}(\ln x + x + 2)$, δείξτε χρησιμοποιώντας το θεώρημα συστολής ότι $x_n \rightarrow \rho_2$ για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \in [2, 4]$. Δίνεται $\ln 2 \approx 0.6931, \ln 4 \approx 1.3863$

(β) [10] Για την $f(x)$ εφαρμόστε δύο βήματα της μεθόδου Newton-Raphson (i) με $x_0 = 0.2$ και (ii) με $x_0 = 1$ για την προσέγγιση της ρίζας ρ_2 . Πόσα δεκαδικά ψηφία είναι σωστά σε κάθε απάντησή σας;

Θέμα 3

Δίνονται τα εξής δεδομένα (μετρήσεις)

$t(s)$	1	2	4	6
$V(cm^3)$	1.4	2.2	5	9.4

που δίνουν τον όγκο, V , του νερού που βγαίνει από ένα μικρό αγωγό στο χρόνο t .

(α) [12] Εκτιμήστε το *ρυθμό μεταβολής* της ροής στο $t = 4s$ (α) με χρήση παρεμβολής Lagrange και (β) με χρήση κεντρικών διαφορών ακρίβειας $O(h^2)$ και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

(β) [10] Υπολογίστε το μοντέλο ελαχίστων τετραγώνων $V = Ke^{M/t}$, δηλ. υπολογίστε τις σταθερές K και M , που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα.

Θέμα 4

(α) [10] Ο παρακάτω πίνακας δίνει στο χρόνο, t (σε λεπτά της ώρας), την ταχύτητα, v (σε μέτρα/δευτερόλεπτο), που έχει ένα αυτοκίνητο

$t(min)$	1	2	3.25	4.5	6	7	8	9	9.5	10
$v(m/s)$	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

Υπολογίστε την απόσταση που έχει διανύσει το αυτοκίνητο χρησιμοποιώντας τον καλύτερο συνδυασμό των κανόνων: του Τραπεζίου, Simpson 1/3 και Simpson 3/8.

(β) [13] Βρείτε τα βάρη w_1, w_2 και w_3 του κανόνα ολοκλήρωσης: $\int_{-2}^2 f(x)dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1)$, έτσι ώστε να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού και στη συνέχεια μετασχηματίστε τον κανόνα για να προσεγγίζει ολοκληρώματα συναρτήσεων στο διάστημα $[-1, 1]$.

Θέμα 5

Για το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1$$

(α) [10] Προσεγγίστε την τιμή $y(1.5)$ με τη (ρητή) μέθοδο του Euler με βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$ και εξηγήστε πώς εφαρμόζεται η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

(β) [15] Για το παραπάνω Π.Α.Τ εφαρμόστε την παρακάτω κλασσική Runge-Kutta μέθοδο 4 σταδίων με βήμα $h = 0.5$ για να προσεγγίσετε την τιμή $y(1)$.

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{array} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} k^{n,i} = f\left(t^{n,i}, y^n + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} k^{n,j}\right), \quad i = 1, \dots, 4, \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^4 b_i k^{n,i} \end{array} \right.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά ψηφία σε όλους τους υπολογισμούς σας.