

Θέμα 1

(α) [10] Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

(i) Τι είναι και τι μορφή έχουν οι *αριθμοί κινητής υποδιαστολής*; Ποιές είναι οι χαρακτηριστικές παράμετροι ενός συνόλου αριθμών κινητής υποδιαστολής (στον υπολογιστή); Ποιός ο μικρότερος και ποιός ο μεγαλύτερος αριθμός ενός τέτοιου συνόλου;

(ii) Ποιά ποσότητα ονομάζουμε *μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης*; Ποιός είναι ο μεγαλύτερος αριθμός x στο σύνολο αριθμών του υπολογιστή τέτοιος ώστε $1 + x = 1$;

(iii) Πότε ένας αλγόριθμος λέγεται *ασταθής* και πότε ένα υπολογιστικό πρόβλημα λέγεται *κακής κατάστασης*;

(β) [6] Για τον υπολογισμό της ρίζας x_2 του τριωνύμου $x^2 + 62.10x + 1 = 0$ με χρήση 4 δεκαδικών ψηφίων και αριθμητική κινητής υποδιαστολής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ή

τον τύπο $x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$. Υπολογίστε το αποτέλεσμα και με τους 2 τύπους και αιτιολογίστε ποιόν θα επιλέγατε σαν τον καλύτερο (ακριβέστερο).

Θέμα 2

Έστω η εξίσωση $f(x) = x - 0.5x^2 = 0$:

(α) [10] Να εφαρμοστούν 3 βήματα της μεθόδου της **διχοτόμησης** στο διάστημα $[-1, 0.5]$ και στη συνέχεια να γίνουν 2 επαναλήψεις με τη μέθοδο **Newton-Raphson** με αρχική τιμή το αποτέλεσμα της διχοτόμησης. Ποιά ρίζα της $f(x)$ προσεγγίζουμε και με πόσα σωστά δεκαδικά ακρίβεια;

(β) [10] Για τη μέθοδο σταθερού σημείου $x_n = \phi(x_{n-1}) = 2x_{n-1} - 0.5x_{n-1}^2$ ελέγξτε σε ποιο διάστημα συγκλίνει, για κάθε x_0 , και σε ποιά ρίζα της $f(x)$.

(γ) [14] Για το παρακάτω **μη-γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων** να γίνει ένα βήμα της μεθόδου Newton-Raphson με αρχική τιμή $\vec{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] = [0, 0]$,

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0; \quad \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

Θέμα 3

(α) [10] Υπολογίστε το **πολυώνυμο παρεμβολής** στα δεδομένα

x_i	0	0.5	1	2
y_i	1	3	7	21

με χρήση *διατεταγμένων διαφορών*.

(β) [12] Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + 1$ για $x \in [0, 1]$ με μια γραμμική spline σε ομοιόμορφα κατανομημένα σημεία $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n$. Ποιά πρέπει να είναι η απόσταση των σημείων, h , ώστε να μας εξασφαλίζει ότι το απόλυτο σφάλμα της παρεμβολής μας θα είναι το πολύ 10^{-6} ;

(γ) [12] Η **φυσική κυβική** spline που παρεμβάλλει στα σημεία $(x_i, y_i) : (1, 1), (2, 1)$ και $(3, 0)$ ορίζεται ως

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + a(x-1) - b(x-1)^3, & \text{για } x \in [1, 2], \\ s_1(x) = 1 + c(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3, & \text{για } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Υπολογίστε τις τιμές των a, b, c και d .

Θέμα 4

(α) [6] Εξηγίστε τι ονομάζουμε προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων σε διακριτά δεδομένα και ποια η διαφορά της από την πολυωνυμική παρεμβολή. Πώς παράγονται οι κανονικές εξισώσεις για την γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων;

(β) [12] Στα πειραματικά δεδομένα

x_i	1	1.5	2.5	3.5	4.5
y_i	0.8	1	1.25	1.4	1.5

θέλουμε να προσαρμόσουμε το

μοντέλο (κορεσμού) $y = \frac{Rx}{S+x}$. Υπολογίστε τις σταθερές R και D με τη **μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων**.

Θέμα 1

(α) Βλέπε ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ 2 & 3

(β) Η ρίζα που υπολογίζουμε έχει πραγματική τιμή $x_2 = -62.08390$. Στους τύπους υπολογισμού και με χρήση 4 δεκαδικών (και χρήση κινητής υποδιαστολής) έχουμε

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(62.10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{3856. - 4.0} = \sqrt{3852} = 62.06$$

$$\text{Με χρήση του πρώτου τύπου έχουμε: } fl(x_2) = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10.$$

$$\text{Με χρήση του δεύτερου τύπου έχουμε: } fl(x_2) = \frac{-2.000}{62.10 - 62.06} = \frac{-2.000}{0.0400} = -50.00.$$

Συνεπώς, έχουμε περίπτωση αφαίρεσης δύο σχεδόν ίσων αριθμών στον παρανομαστή και διαίρεση με το αποτέλεσμα που μεγαλώνει το σφάλμα. (**Παρατήρηση:** Σε όλες τις πράξεις οι αριθμοί πρέπει να είναι της μορφής $0.d_1d_2d_3d_4 \cdot 10^k$ εφόσον ζητάται να χρησιμοποιήσουμε αριθμητική κινητής υποδιαστολής π.χ. το $(62.10)^2 = 0.3846410 \cdot 10^4$, όμως ο αριθμός (μηχανής) με 4 δεκαδικά είναι $0.3846 \cdot 10^4 = 3846$.)

Θέμα 2

(α) Οι ρίζες της $f(x)$ είναι, προφανώς, το 0 και το 2. Για τη διχοτόμηση έχουμε $f(-1) = -1.5$ και $f(0.5) = 0.375$, συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί. Μάλιστα η ρίζα στο $[-1, 0.5]$ είναι μοναδική (f αύξουσα γιατί $f'(x) = 1 - x > 0$). Τα 3 βήματα της διχοτόμησης,

$$x_1 = \frac{-1 + 0.5}{2} = -0.25, \quad f(-0.25) = -0.21875 < 0$$

$$x_2 = \frac{-0.25 + 0.5}{2} = 0.125, \quad f(0.125) = 0.1171 > 0$$

$$x_3 = \frac{-0.25 + 0.125}{2} = -0.0625$$

Για τη μέθοδο **Newton-Raphson** $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - (x_n - 0.5x_n^2)/(1 - x_n)$ έχουμε $x_1 = -0.065 - f(-0.0625)/f'(-0.065) \approx -0.0018382353$ και $x_2 \approx -1.69 \cdot 10^{-6}$ προσέγγιση της ρίζας $x^* = 0$, και εφόσον $|x^* - x_2| < 0.5 \cdot 10^{-5}$ έχουμε προσέγγιση με 5 σωστά δεκαδικά.

(β) Χρησιμοποιούμε το Θ. συστολής για την $\phi(x) = 2x - 0.5x^2$, με $\phi'(x) = 2 - x$

$$|\phi'(x)| < 1 \Rightarrow |2 - x| < 1 \Rightarrow x \in (1, 3) \text{ το διάστημα που είναι συστολή η } \phi(x)$$

Επίσης $\phi'(x) = 0$ στο $x = 2$ (ακρότατο της $\phi(x)$) με $\phi(2) = 2$ (σταθερό σημείο) και $\phi(1) = \phi(3) = 3/2$ άρα

$$3/2 \leq \phi(x) \leq 2 \text{ για } x \in (1, 3) \text{ (πεδίο τιμών υποσύνολο του πεδίου ορισμού)}$$

Συνεπώς για οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset (1, 3)$ που περιέχει το 2 ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Συστολής και η μέθοδος θα συγκλίνει στο $x^* = 2$ για κάθε $x_0 \in [a, b]$.

(γ) Έχουμε τις 2 εξισώσεις

$$f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0;$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

Υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_2^2 + 2 & x_1x_2 - 5 \end{bmatrix},$$

Με αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ έχουμε

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{F}(0, 0) = \begin{bmatrix} f_1(0, 0) \\ f_2(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{J}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ -0.02 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{bmatrix}.$$

Θέμα 3

(α) Το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι το πολύ τρίτου βαθμού ($p \in \mathbf{P}_3$) της μορφής $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$. Ο πίνακας διαφορών δίνεται ως εξής:

x_i	$y_i = \Delta^{(0)}$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
0	1 ↘			
		4 ↘		
0.5	3 ↗		4 ↘	
		8 ↗		0
1	7		4 ↗	
		14		
2	21			

Άρα $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 4$ και $a_3 = 0$, συνεπώς $p(x) = 1 + 4(x - 0) + 4(x - 0)(x - 0.5) = 4x^2 + 2x + 1$.

(β) Χρησιμοποιούμε το σφάλμα της γραμμικής παρεμβολής (από το οποίο προκύπτει και το σφάλμα των γραμμικών spline). Εφόσον θα έχουμε ομοιόμορφα κατανομημένα σημεία παρεμβολής, εξετάζουμε το μέγιστο σφάλμα σε ένα διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$

$$\|f(x) - S(x)\|_\infty = \frac{1}{2!} \|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_\infty \cdot \|f''(\xi)\|_\infty$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \cdot \max_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} |e^\xi|$$

Εφόσον τα $x_i \in [0, 1]$ το $\max_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} |e^\xi| = e^1 = e$ και η συνάρτηση $g(x) = |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$ έχει μέγιστο στο $x = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} = \frac{2x_i + h}{2}$ (μπορεί να βρεθεί εκεί που μηδενίζεται η $g'(x)$), συνεπώς

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \cdot e \Rightarrow \frac{h^2}{8} e \leq 10^{-6} \Rightarrow h < 1.72 \cdot 10^{-6}$$

(γ) Ελέγχουμε τις συνθήκες ομαλότητας και παρεμβολής της

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + a(x - 1) - b(x - 1)^3, & \text{για } x \in [1, 2], \\ s_1(x) = 1 + c(x - 2) - \frac{3}{4}(x - 2)^2 + d(x - 2)^3, & \text{για } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Επιπλέον εφόσον μιλάμε για φυσική κυβική spline γνωρίζουμε ότι $S''(1) = s_0''(1) = 0 = S''(3) = s_1''(3)$ (συνοριακές συνθήκες)

$$S'(x) = \begin{cases} s_0'(x) = a - 3b(x - 1)^2, & \text{για } x \in [1, 2], \\ s_1'(x) = c - \frac{3}{2}(x - 2) + 3d(x - 2)^2, & \text{για } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

και

$$S''(x) = \begin{cases} s_0''(x) = -6b(x - 1), & \text{για } x \in [1, 2], \\ s_1''(x) = -\frac{3}{2} + 6d(x - 2), & \text{για } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Οι συνθήκες ομαλότητας, παρεμβολής και οι συνοριακές μας δίνουν

$$\begin{aligned}
s_0(2) &= 1 & \Rightarrow 1 + a - b &= 1 & \Rightarrow a &= \frac{1}{4} \\
s'_0(2) &= s'_1(2) & \Rightarrow a - 3b &= c & \Rightarrow c &= -\frac{1}{2} \\
s''_0(2) &= s''_1(2) & \Rightarrow -6b &= -\frac{3}{2} & \Rightarrow b &= \frac{1}{4} \\
s''_0(1) &= 0 \\
s''_1(3) &= 0 & \Rightarrow -\frac{3}{2} + 6d &= 0 & \Rightarrow d &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Θέμα 4

(α) Θεωρεία ΔΙΑΛΕΞΗ 11.

(β) Χρειάζεται να γραμμικοποιήσουμε το μοντέλο κορεσμού ως

$$y = \frac{Rx}{S+x} \Rightarrow \tilde{y} = \frac{1}{y} = \frac{S}{R} \frac{1}{x} + \frac{1}{R} = a\tilde{x} + b, \text{ όπου } \tilde{x} = \frac{1}{x}, a = \frac{S}{R}, b = \frac{1}{R}$$

Με τα δεδομένα σχηματίζουμε τον πίνακα

i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$	$\tilde{x}_i^2$	$\tilde{x}_i\tilde{y}_i$
1	1	1.25	1	1.25
2	2/3	1	4/9	2/3
3	2/5	0.8	4/25	0.32
4	2/7	0.7143	4/49	0.204
5	2/9	2/3	4/81	0.148
$\sum_{i=1}^5 =$	2.575	4.431	1.735	2.589

Λύνοντας τις κανονικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 x_i^2 & \sum_{i=1}^5 x_i \\ \sum_{i=1}^5 x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 x_i y_i \\ \sum_{i=1}^5 y_i \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1.735 & 2.575 \\ 2.575 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.589 \\ 4.431 \end{bmatrix} \Rightarrow a \approx 0.75, b \approx 0.5 \Rightarrow R = 2 \text{ και } S = 1.5.$$