

Θέμα 1

- (α) [3+3+6]** Έστω, υποθετικός Η/Υ εφοδιασμένος με το σύνολο αριθμών μηχανής $M(2, 4, -3, 3)$.
- (i) Μετατρέψτε τον αριθμό $x = (6.75)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και υπολογίστε τον αριθμό μηχανής $fl(x)$ στον υποθετικό υπολογιστή.
- (ii) Ποιός είναι ο μέγιστος θετικός, ποιός ο ελάχιστος θετικός αριθμός του υποθετικού Η/Υ και για ποιούς αριθμούς $x \in M$ ισχύει $1 + x = 1$; Δώστε τις απαντήσεις στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.
- (iii) Στο διάστημα $(0, 0.2]$ των πραγματικών αριθμών πόσοι αριθμοί του συνόλου M υπάρχουν μέσα σε αυτό (δηλ. ποιοί πραγματικοί παριστάνονται ακριβώς από το M στο $(0, 0.2]$);
- (β) [5]** Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 - 2ax + b = 0$, όπου $a, b > 0$ και $a^2 \gg b$. Δώστε έναν ευσταθή αλγόριθμο για τον υπολογισμό των ριζών της εξηγώντας την επιλογή σας.

Θέμα 2

Έστω η εξίσωση $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$.

- (α) [6]** Κάντε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση και δείξτε (και θεωρητικά) ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες, $-\rho, 0$ και ρ , στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και μάλιστα $\rho \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$.
- (β) [10]** Υπολογίστε τις 3 πρώτες προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης με αρχικό διάστημα το $(\frac{\pi}{3}, \pi)$. Πόσο πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση από την ρ ;
- (γ) [10]** Θεωρείστε την ακολουθία $(x_n)_{n=0,1,\dots}$ με $x_{n+1} = \phi(x_n)$ με $\phi(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$. Δείξτε ότι η $x_n \rightarrow \rho$, για κάθε $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Θέμα 3

- (α) [6]** Δείξτε (μαθηματικά και γεωμετρικά) πώς παράγεται η μέθοδος Newton-Raphson για την προσέγγιση μίας ρίζας μίας μη-γραμμικής συνάρτησης $f(x)$.
- (β) [6]** Δώστε τους ορισμούς της γραμμικής και της τετραγωνικής τάξης σύγκλισης μίας επαναληπτικής διαδικασίας που παράγει μία ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n=0,1,\dots}$ της ρίζας x^* μιας μη-γραμμικής εξίσωσης $f(x) = 0$ και εξηγήστε τι σημαίνει ο κάθε ορισμός στην πράξη.
- (γ) [15]** Το παρακάτω μη-γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων να γίνουν 2 βήματα της μεθόδου Newton-Raphson με αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0, 0]$, για την προσέγγιση της λύσης του,

$$\begin{aligned} x^3 + y &= 1, \\ y^3 - x &= -1. \end{aligned}$$

Θέμα 4

Έστω τα εξής δεδομένα που προέρχονται από μία ομαλή συνάρτηση f :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	3	-1

- (α) [6]** Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής στα 3 πρώτα δεδομένα με χρήση πολυωνύμων Lagrange.
- (β) [8]** Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής σε όλα τα δεδομένα στη μορφή του Νεύτωνα με χρήση διαιρεμένων διαφορών.
- (γ) [8]** Αν η τρίτη παράγωγος της f είναι $f^{(3)} = -6x$, υπολογίστε το φράγμα του σφάλματος για την παρεμβολή του ερωτήματος (α).
- (δ) [8]** Έστω κάποια σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ και $p_k(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής μίας συνάρτησης f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_k$ για $k = 0, 1, \dots, n$. Αν $q(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_1, x_2, \dots, x_k$. Δείξτε ότι

$$p_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0} [q(x) - p_{n-1}(x)]$$

Θέμα 1

(α)

$$(i) (6.75)_{10} \rightarrow (110.1100)_2 \rightarrow fl(x) = 0.1101 \cdot 2^3 = (6.5)_{10}.$$

(ii) $\max = 0.1111 \cdot 2^3 = (7.5)_{10}$ και $\min = 0.1000 \cdot 2^{-3} = 2^{-4} = (0.0625)_{10}$, και εφόσον το μηδέν της μηχανής στον υποθετικό Η/Υ είναι $eps = \frac{1}{2}2^{1-4} = (0.0625)_{10}$ ισχύει ότι $1+x = 1$ για $0 < x < 0.0625$.

(iii) Είναι όλοι οι αριθμοί του συνόλου M της μορφής $(x)_2 = 0.1d_2d_3d_4 \cdot 2^e$, $-3 \leq e \leq 3$ που δίνουν $0 < x \leq (0.2)_{10}$. Όμως, για $-1 \leq e \leq 3$ όλοι οι αριθμοί είναι $\geq (0.1000 \cdot 2^{-1})_2 = (2^{-2})_{10} = (0.25)_{10}$. Συνεπώς, οι δυνατοί συνδυασμοί ψηφίων και δυνάμεων ρων αριθμών του συνόλου M που ανήκουν στο $(0, 2]$ είναι

$$\begin{array}{ll} 0.1000 \cdot 2^{-2} = 0.12500, & 0.1000 \cdot 2^{-3} = 0.06250 \\ 0.1001 \cdot 2^{-2} = 0.140625, & 0.1001 \cdot 2^{-3} = 0.073125 \\ 0.1010 \cdot 2^{-2} = 0.15625, & 0.1010 \cdot 2^{-3} = 0.078125 \\ 0.1100 \cdot 2^{-2} = 0.18750, & 0.1100 \cdot 2^{-3} = 0.93750 \\ 0.1011 \cdot 2^{-2} = 0.171875, & 0.1011 \cdot 2^{-3} = 0.0859375 \\ \cancel{0.1110 \cdot 2^{-2} = 0.21875,} & 0.1110 \cdot 2^{-3} = 0.109375 \\ \cancel{0.1101 \cdot 2^{-2} = 0.203125,} & 0.1101 \cdot 2^{-3} = 0.1015625 \\ \cancel{0.1111 \cdot 2^{-2} = 0.234375,} & 0.1111 \cdot 2^{-3} = 0.1171875 \end{array}$$

(β) Σύμφωνα με τους γνωστούς τύπους οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης είναι

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - b}, \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 - b}.$$

Η x_1 υπολογίζεται καλά με αυτόν τον τύπο, η x_2 όμως λόγω του ότι $a^2 \gg b$ και άρα $-\sqrt{a^2 - b} \approx -a$, θα έχει πρόβλημα αφαίρεσης σχεδόν ίσων αριθμών. Άρα για τον υπολογισμό της x_2 ένας ευσταθής τρόπος υπολογισμούς της είναι $x_2 = \frac{b}{x_1}$.

Θέμα 2

(α) Προφανώς $f(0) = 0$. Ακόμη, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ και $f(\pi) = \frac{\pi}{2} > 0$ άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\frac{\pi}{3}, \pi)$. Ακόμη, $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x)$ και $f''(x) = \sin(x) > 0$ για $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$, άρα $f'(x) > \frac{1}{2} - \cos(\frac{\pi}{3}) = 0$ για $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ και η f είναι γνήσια αύξουσα. Επομένως η ρίζα στο διάστημα $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$, έστω ρ , είναι μοναδική.

Από το γεγονός ότι $f(-x) = -\frac{x}{2} - \sin(-x) = -f(x)$ προκύπτει ότι $-\rho$ είναι επίσης ρίζα και μάλιστα μοναδική στο διάστημα $(-\pi, -\frac{\pi}{3})$. Το ότι δεν υπάρχει άλλη ρίζα προκύπτει από τις ανισότητες $\frac{x}{2} - 1 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 1$, οι οποίες μας λένε ότι $f(x) > 0$ για $x > 2$ και $f(x) < 0$ για $x < -2$.

(β) Η πρώτη προσέγγιση της ρ είναι η $x_1 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \pi) = \frac{2\pi}{3}$. Έχουμε ότι $f(x_1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, άρα $\rho \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. Η δεύτερη προσέγγιση είναι η $x_2 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}$ και έχουμε $f(x_2) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$ άρα $\rho \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$. Η τρίτη προσέγγιση $x_3 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{7\pi}{12}$.

Η απόσταση της x_3 από τη ρ δίνεται από

$$|x_3 - \rho| \leq \frac{b - a}{2^n} = \frac{\pi - \pi/3}{2^3} = \frac{\pi}{12} \approx 0.2618.$$

(γ) Δείχνουμε ότι η $\phi(x)$ ικανοποιεί στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ το θεώρημα συστολής. Κατ' αρχήν $\phi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} + 1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $\phi(\pi) = \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ακόμη $\phi'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$ η οποία μηδενίζεται για $x = \frac{2\pi}{3}$ και έχουμε $\phi(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, άρα η ϕ απεικονίζει το διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ στον εαυτό του. Το $\max_{x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]} |\phi'(x)| = \max_{x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]} |\frac{1}{2} + \cos(x)| = \frac{1}{2}$ (εφόσον $\cos(x) \in [-1, 0]$ για $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$). Συνεπώς με βάση το θεώρημα η ακολουθία συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο x^* στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ το οποίο είναι ρίζα της $f(x)$ άρα αναγκαστικά $x^* = \rho$.

Θέμα 3

(α), (β) ΘΕΩΡΕΙΑ ΒΛ. ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ.

(γ) Έχουμε τις 2 εξισώσεις

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^3 + y - 1 = 0; \\ f_2(x, y) &= y^3 - x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα και τον αντίστροφό του

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 1 \\ -1 & 3y^2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{J}^{-1}(x, y) = \frac{1}{9x^2y^2 + 1} \begin{bmatrix} 3y^2 & -1 \\ 1 & 3x^2 \end{bmatrix},$$

Με αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ έχουμε

$$\mathbf{J}_0^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{F}(0, 0) = \begin{bmatrix} f_1(0, 0) \\ f_2(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας (πρώτο βήμα της μεθόδου)

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{J}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για το δεύτερο βήμα

$$\mathbf{J}_1^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(1, 1) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{F}(1, 1) = \begin{bmatrix} f_1(1, 1) \\ f_2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

άρα

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{J}_1^{-1} \cdot \mathbf{F}(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

Θέμα 4

(α) Το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι το πολύ 2ου βαθμού ($p_2 \in \mathbf{P}_2$) της μορφής

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \quad \text{όπου}$$

$$L_0(x) = \frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}, \quad L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}, \quad L_2(x) = \frac{x(x+1)}{1(1+1)} \quad \text{άρα}$$

$$p_2(x) = (-1) \cdot \frac{x(x-1)}{2} + 0 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{-1} + 3 \cdot \frac{x(x+1)}{2} = -\frac{1}{2}x(x-1) + \frac{3}{2}x(x+1).$$

(β) Το πολυώνυμο παρεμβολής εδώ θα είναι το πολύ 3ου βαθμού ($p_3 \in \mathbf{P}_3$) και στη μορφή Newton

$p_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$. Ο πίνακας διαφορών δίνεται ως εξής:

x_i	$y_i = \Delta^{(0)}$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
-1	-1			
		1		
0	0		1	
		3		-3/2
1	3		-7/2	
		-4		
2	-1			

Άρα $a_0 = -1$, $a_1 = 1 = a_2$ και $a_3 = -3/2$, συνεπώς $p_3(x) = \underbrace{-1 + (x+1) + x(x+1) - \frac{3}{2}x(x+1)(x-1)}_{\text{ίδιο με το } p_2(x)}$.

(γ) Χρησιμοποιούμε το φράγμα του σφάλματος της πολυωνυμικής παρεμβολής

$$\|f(x) - p_2(x)\|_\infty \leq \frac{1}{3!} \|(x+1)x(x-1)\|_\infty \cdot \|f^{(3)}(\xi)\|_\infty$$

εφόσον

$$\|f^{(3)}(\xi)\|_\infty = \max_{\xi \in [-1,1]} |-6\xi| = 6 \quad \text{και}$$

$$\max_{x \in [-1,1]} |(x+1)x(x-1)| = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (\text{εφόσον η παράγωγος } 3x^2 - 1 = 0 \text{ στα } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$$

συνεπώς

$$\|f(x) - p_2(x)\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

(δ) Τα πολυώνυμα

$$p_n(x) \quad \text{και} \quad q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0} [q(x) - p_{n-1}(x)] \quad \text{είναι βαθμού } \leq n.$$

Για να δείξουμε ότι είναι ίσα (ταυτίζονται) αρκεί να δείξουμε ότι στα $n+1$ σημεία παρεμβολής $x_0, x_1, \dots, x_n$ έχουν την ίδια τιμή. Έφόσον το $p_n(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής σε αυτά τα σημεία έχουμε

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= f(x_0) \\ q(x_0) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0} [q(x_0) - \underbrace{p_{n-1}(x_0)}_{f(x_0)}] &= f(x_0) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} p_n(x_n) &= f(x_n) \\ \underbrace{q(x_n)}_{f(x_n)} + \frac{\cancel{x_n - x_n}^0}{x_n - x_0} [q(x_n) - p_{n-1}(x_n)] &= f(x_n) \end{aligned}$$

και για όλα τα x_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} p_n(x_j) &= f(x_j) \\ \underbrace{q(x_j)}_{f(x_j)} + \frac{x_j - x_n}{x_n - x_0} \underbrace{[q(x_j) - p_{n-1}(x_j)]}_{=0} &= f(x_j) \end{aligned}$$