

Θέμα 1

Έστω τα εξής δεδομένα :

x_i	0	1	2	3
y_i	0	2	1	0

(α)[10] Υπολογίστε τη γραμμική spline παρεμβολής στα παραπάνω δεδομένα.

(β)[15] Αποδείξτε αν η παρακάτω συνάρτηση, $S(x)$, είναι ή όχι η φυσική κυβική spline παρεμβολής στα παραπάνω δεδομένα,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{14}{5}x - \frac{4}{5}x^3 & x \in [0, 1] \\ \frac{4}{5}(x-1) + \frac{14}{5}(2-x) - \frac{4}{5}(2-x)^3 + \frac{1}{5}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ \frac{4}{5}(3-x) + \frac{1}{5}(3-x)^3, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Θέμα 2

(α) [10] Περιγράψτε το γενικό πρόβλημα της προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων σε διακριτά δεδομένα και δείξτε, αναλυτικά, πώς παράγονται οι κανονικές εξισώσεις στη γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων.

(β) [15] Έστω τα εξής πειραματικά δεδομένα :

x_i	1	2	3	4.5	5
y_i	1	1.6	2	2.4	2.5

στα οποία θέλουμε να προσαρμόσουμε το εξής μοντέλο $y = \frac{x}{Ax+B}$. Υπολογίστε τις τιμές των A και B με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Θέμα 3

(α)[15] Για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου μίας συνάρτησης f στο σημείο x_i χρησιμοποιούμε τον τύπο αριθμητικής διαφορίσης (παραγώγισης): $f''(x_i) = \alpha f(x_{i+1}) + \beta f(x_i) + \gamma f(x_{i-1})$ όπου $x_{i\pm 1} = x_i \pm h, h > 0$. Υπολογίστε τα α, β και γ και δείξτε ότι ο τύπος έχει ακρίβεια $O(h^2)$.

(β)[10] Υπολογίστε τα βάρη w_1, w_2 και w_3 του κανόνα ολοκλήρωσης $\int_{-2}^2 f(x)dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1)$ έτσι ώστε να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

Θέμα 4

(α)[15] Εφαρμόστε (i) το σύνθετο τύπο του Τραπεζίου και (ii) το σύνθετο τύπο του Simpson $1/3$ σε $n = 4$ (υποδιαστήματα) για την προσέγγιση του $\int_1^3 \ln x dx$.

(β)[10] Υπολογίστε το πλήθος των υποδιαστημάτων, n , και το μήκος τους, h , που θα χρειαζόμασταν για να προσεγγίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα με το σύνθετο τύπο του Simpson $1/3$ με ακρίβεια 10^{-3} . Δίνεται ότι ο τύπος του σφάλματος είναι $R_{n+1}^S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$.