

Θέμα 1

(α)[10] Για την συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$, αποδείξτε ότι έχει μία ρίζα πολλαπλότητας 2 (διπλή ρίζα) και εφαρμόστε δύο βήματα της *κατάλληλα τροποποιημένης* μεθόδου Newton-Raphson με αρχική τιμή $x_0 = 0.5$. Ποιά είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου;

(β) [10] Έστω μια μέθοδος *σταθερού σημείου* $x_{n+1} = \phi(x_n)$ με $\phi(x) = x - \alpha + 2\alpha e^{-x}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ μία παράμετρος. Βρείτε το σταθερό σημείο x^* και προσδιορίστε για ποιές τιμές της παραμέτρου α η ακολουθεία των παραπάνω επαναλήψεων σταθερού σημείου συγκλίνει στο σταθερό αυτό σημείο και για ποιές αποκλίνει για $x_0 \in [0, x^*]$.

Θέμα 2

Δίνονται τα εξής δεδομένα (μετρήσεις)

x_i	0	1	1.5	2
y_i	1	3	5.5	9

(α)[17] Υπολογίστε με τη *μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων* το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $p_2(x)$ που προσεγγίζει καλύτερα τα δεδομένα (να φανεί αναλυτικά η διαδικασία και το αποτέλεσμα σας).

(β) [10] Υπολογίστε το *πολυώνυμο παρεμβολής*, $P(x)$, στη μορφή Lagrange για τα παραπάνω δεδομένα (κάνοντας μέχρι τέλος τις πράξεις) και σχολιάστε το αποτέλεσμα σας.

(γ)[8] Για να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής στο $x = 1.5$ για τα παραπάνω δεδομένα, κατασκευάστε *αναλυτικά* και εφαρμόστε έναν τύπο *αριθμητικής διαφορίσης* (παραγώγισης) δεύτερης τάξης ακρίβειας.

Θέμα 3

Θεωρείστε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, 1]$ ο οποίος παράγεται ως εξής:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 P(x)dx,$$

όπου $P(x)$ το γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλλει την $f(x)$ στο $x_0 = 0$ και $x_1 = 3/4$.

(α)[15] Υπολογίστε αυτόν το κανόνα στη συνήθη μορφή, $Q_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$, και μετασχηματίστε τον για να κατασκευάσετε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x)dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$. Πώς μπορεί να παραχθεί ένας σύνθετος κανόνας ολοκλήρωσης από τον απλό αυτό κανόνα που να προσεγγίζει το $\int_a^b f(x)dx$;

(β) [10] Για τον κανόνα ολοκλήρωσης $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(a) + f(-a)$, αποδείξτε για ποιές τιμές ή τιμή του a ο κανόνας ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού ένα ή μικρότερου και για ποιές τιμές (ή τιμή) του a ο κανόνας ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα 3ου βαθμού (και μικρότερου).

Θέμα 4

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = -200000y(t) + 200000e^{-t} - e^{-t}, \quad y(0) = y^0 = 0$$

(α)[10] Δώστε τα όρια ευστάθειας της *άμεσης (ρητής)* μεθόδου του Euler για την επιλογή του βήματος διακριτοποίησης, h , και εφαρμόστε δύο βήματα της *πεπλεγμένης (υπονοούμενης)* μεθόδου του Euler με $h = 0.1$.

(β)[15] Η μέθοδος του Heun (πρόβλεψης-διόρθωσης) δίνεται ως εξής

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{n+1} &= y^n + hf(t^n, y^n) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, \tilde{y}^{n+1})]. \end{aligned}$$

Εξηγείστε (αναλυτικά) πώς παράγεται αυτή η μέθοδος και εφαρμόστε δύο βήματα της μεθόδου με $h = 0.1$ στην παραπάνω διαφορική εξίσωση. Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα της *πεπλεγμένης* μεθόδου του Euler από το (α) ερώτημα. Ποιό αποτέλεσμα θα εμπιστευόσασταν περισσότερο και γιατί;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΕΙΑ!

Θέμα 1

(α) Διπλή ρίζα, x^* , δηλ. πολλαπλότητας $m = 2$ έχουμε όταν $f(x^*) = 0$ και $f'(x^*) = 0$. Έχουμε εδώ $f'(x) = e^x - 1$, από $f'(x) = 0 \Rightarrow x^* = 0$ (και $f(0) = 0$). Η τροποποιημένη μεθοδος NR (όταν ξέρουμε την πολλαπλότητα m) είναι

$$x_{n+1} = x_n - m \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1ο βήμα: $x_1 = x_0 - 2 \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - 2 \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} \approx 0.0415$

2ο βήμα: $x_2 = x_1 - 2 \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.0415 - 2 \frac{f(0.0415)}{f'(0.0415)} \approx 2.87 \cdot 10^{-4}$

Η σύγκλιση της μεθόδου είναι τετραγωνική ($p = 2$). Τα δύο βήματα της μεθόδου δείχνουν γρήγορη σύγκλιση στο $x^* = 0$. (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6, σελ. 9-10)

(β) Το σταθερό σημείο από $x^* = \phi(x^*) \Rightarrow x^* = \ln 2 \approx 0.69$ και για να δούμε που συγκλίνει η ακολουθεία ελέγχουμε πού $|\phi'(x)| = |1 - 2\alpha e^{-x}| < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < 2$. Συνεπώς, έχουμε σύγκλιση για $\alpha \in (0, 2)$ και απόκλιση για $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Για $\alpha = 2$ ή 0 το κριτήριο της $|\phi'(x)|$ δεν μπορεί να δώσει σίγουρη απάντηση. (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 5)

Θέμα 2

(α) Ψάχνουμε το βέλτιστο πολυώνυμο $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ θέλουμε δηλ. να βρούμε τους συντελεστές a_0, a_1, a_2 , ε.ω. η συνάρτηση $E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^4 \left[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) \right]^2$ να ελαχιστοποιείται. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^4 x_i^j (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0, \quad j = 0, 1, 2$$

Το σύστημα κανονικών εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot 4 + a_1 \sum_{i=1}^4 x_i + a_2 \sum_{i=1}^4 x_i^2 &= \sum_{i=1}^4 y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^4 x_i + a_1 \sum_{i=1}^4 x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^4 x_i^3 &= \sum_{i=1}^4 x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^4 x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^4 x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^4 x_i^4 &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 y_i \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	3	1	1	1	3	3
3	1.5	5.5	2.25	3.375	5.0625	8.25	12.375
4	2	9	4	8	16	18	36
$\sum =$	4.5	18.5	7.25	12.375	22.0625	29.25	51.375

Η λύση του συστήματος κανονικών εξισώσεων δίνει $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2$, άρα το $p_2(x) = 2x^2 + 1$. (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 12 σελ. 14-15 και σελ. 17-18)

(β) Στη μορφή Lagrange έχουμε $P(x) = L_0(x) \cdot 1 + L_1(x) \cdot 3 + L_2(x) \cdot 5.5 + L_3(x) \cdot 9$ όπου τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-1.5}{0-1.5} \cdot \frac{x-2}{0-2}, & L_1(x) &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-1.5}{1-1.5} \cdot \frac{x-2}{1-2}, \\ L_2(x) &= \frac{x-0}{1.5-0} \cdot \frac{x-1}{1.5-1} \cdot \frac{x-2}{1.5-2}, & L_3(x) &= \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-1.5}{2-1.5} \end{aligned}$$

Τελικά το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $P(x) = 2x^2 + 1$. Παρόλο που περιμέναμε το πολυώνυμο παρεμβολής να είναι 3ου βαθμού, τα δεδομένα ακολουθούν (είναι τιμές) ενός πολυώνυμο 2ου βαθμού και η παρεμβολή (όπως και η προσέγγιση στο (α) ερώτημα) το υπολογίζει ακριβώς! (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 8 σελ. 5-6, και 8-9)

(γ) Ο μοναδικός τύπος διαφορίσης δεύτερης τάξης, $O(h^2)$, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί (στα συγκεκριμένα δεδομένα) είναι αυτός των κεντρικών διαφορών $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \Rightarrow f'(1.5) = \frac{f(2)-f(1)}{2 \cdot 0.5} = 6$. Για κατασκευή του τύπου βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 11, σελ. 3-4.

Θέμα 3

(α) Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $P(x) = f(0) + \frac{f(3/4)-f(0)}{3/4-0}x = f(0)(1 - \frac{4}{3}x) + \frac{4}{3}f(3/4)x$ (μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους). Βρίσκουμε τον κανόνα ολοκλήρωσης (ολοκληρώνοντας το $P(x)$) ως

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(3/4)$$

άρα $w_0 = 1/3, w_1 = 2/3, x_0 = 0, x_1 = 3/4$. (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 14, σελ 3-4 & 13)

Για να κατασκευάσουμε τον απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x)dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$, χρειαζόμαστε την αλλαγή μεταβλητής (όπως στους τύπους Gauss ΔΙΑΛΕΞΗ 16 σελ. 2) από το $[0, 1]$ στο $[a, b]$. Άρα, αν $t \in [0, 1]$ και $x \in [a, b]$ από $x = mt + c$ (γραμμικός μετασχηματισμός από το ένα διάστημα στο άλλο, για $t = 0$ το $x = a$ και για $t = 1$ το $x = b$) έχουμε $m = b - a, c = a$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= (b-a) \int_0^1 f((b-a)t + a)dt \approx (b-a) \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{3}{4}(b-a) + a\right) \right) \\ &\approx (b-a) \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right) \right) \end{aligned}$$

Ο σύνθετος κανόνας κατασκευάζεται χωρίζοντας το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα. Αν $a = x_0, x_i = x_0 + ih; h = \frac{b-a}{n}$ και ο σύνθετος κανόνας είναι

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{h}{3} \left(f(x_{i-1}) + 2f\left(\frac{1}{4}x_{i-1} + \frac{3}{4}x_i\right) \right).$$

(β) Για να ολοκληρώνει ακριβώς ο τύπος πολυώνυμο 1ου (και μικρότερου) βαθμού πρέπει

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1dx &= 2 \Rightarrow 1 + 1 = 2 \quad (\text{που ισχύει πάντα, δηλ. } \forall a) \\ \int_{-1}^1 xdx &= 0 \Rightarrow a + (-a) = 0 \quad (\text{που ισχύει πάντα}) \end{aligned}$$

Για να ολοκληρώνει ακριβώς ο τύπος πολυώνυμο 3ου (και μικρότερου) βαθμού πρέπει

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2dx &= \frac{2}{3} \Rightarrow 2a^2 = \frac{2}{3} \\ \int_{-1}^1 x^3dx &= 0 \Rightarrow a^3 + (-a)^3 = 0 \quad (\text{που ισχύει πάντα}) \end{aligned}$$

Άρα για $a = 1/\sqrt{3}$ ο τύπος $Q_2(f) = f(a) + f(-a)$ είναι ο κανόνας ολοκλήρωσης Gauss 2 σημείων.

Θέμα 4

(α) Ο περιορισμός ευστάθειας για την ρητή Euler είναι $0 < h < 2/200000 = 10^{-5}$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ13-14).

Η πεπλεγμένη Euler γράφεται ως (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 18)

$$\begin{aligned}y^{n+1} &= y^n + h \left(-200000y^{n+1} + 200000e^{t^{n+1}} - e^{t^{n+1}} \right) \Rightarrow \\y^{n+1} &= \frac{y^n + 200000e^{t^{n+1}}h - e^{t^{n+1}}h}{1 + 200000h}, n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}y^1 &= \frac{y^0 + 200000e^{t^1} \cdot 0.1 - e^{t^1} \cdot 0.1}{1 + 200000 \cdot 0.1} = \dots = 0.904788 \\y^2 &= \frac{y^1 + 200000e^{t^2} \cdot 0.1 - e^{t^2} \cdot 0.1}{1 + 200000 \cdot 0.1} = \dots = 0.818731\end{aligned}$$

(β) Η μέθοδος του Heun παράγεται αν απο τη διαφορική $y' = f(t, y)$ και ολοκληρώνοντας

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y' dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y) dt \Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y) dt$$

προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με τον κανόνα του τραπεζίου, άρα

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y) dt \Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \frac{h}{2} [f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))]$$

Άρα έχουμε το διακριτο τύπο του τραπεζίου (για διαφορικές)

$$y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})]$$

όπου αντικαθιστούμε το y^{n+1} στο δεξή μέλος με ένα βήμα της μεθόδου Euler. (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 18 σελ. 1-2).

Τα 2 βήματα της μεθόδου δίνουν $y^1 \approx -2 \cdot 10^8, y^2 \approx -4 \cdot 10^{16}$. Εμπιστευόμαστε την πεπλεγμένη Euler για το (άκαμπτο) προβλημά μας, γιατί η μέθοδος Heun, αν και καλύτερης ακρίβειας, είναι ασταθής για $h = 0.1$ μιάς και είναι ρητή μέθοδος και υπόκειται σε περιορισμο ευστάθειας παρόμοιο με της ρητής Euler.