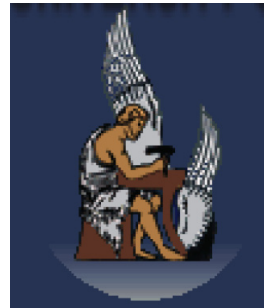


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

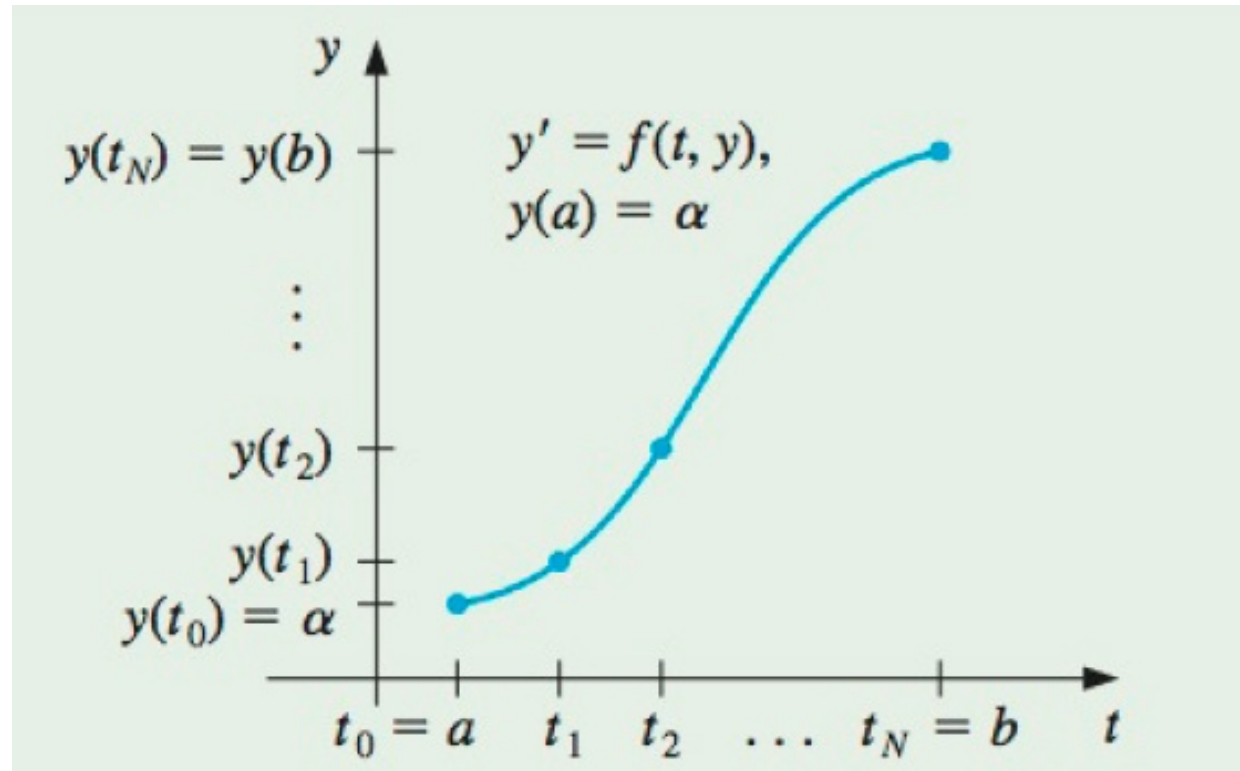
Διάλεξη 18η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

ΚΕΦ. 6. Συνέχεια

Επανάληψη-μέθοδος Euler



- Η (άμεση) μέθοδος Euler: $y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N - 1$
- Η πεπλεγμένη (ρητή) μέθοδος Euler: $y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$

Παράδειγμα Προσεγγίστε τη λύση της Δ.Ε.

$$y' = y - t^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$$

με την (άμεση) μέθοδο Euler στο $t = 2$ με βήμα $h = 0.5$.

Παράδειγμα Προσεγγίστε τη λύση της Δ.Ε.

$$y' = y - t^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$$

με την (άμεση) μέθοδο Euler στο $t = 2$ με βήμα $h = 0.5$.

$$y(0) = y_0 = 0.5$$

$$y(0.5) \approx y_1 = y_0 + 0.5 \cdot (y_0 - (0.0)^2 + 1) = 1.25$$

$$y(1) \approx y_2 = y_1 + 0.5 \cdot (y_1 - (0.5)^2 + 1) = 2.25$$

$$y(1.5) \approx y_3 = y_2 + 0.5 \cdot (y_2 - (1.0)^2 + 1) = 3.375$$

$$y(2) \approx y_4 = y_3 + 0.5 \cdot (y_3 - (1.5)^2 + 1) = 4.4375$$

Παράδειγμα Προσεγγίστε τη λύση της Δ.Ε.

$$y' = y - t^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$$

με την (άμεση) μέθοδο Euler στο $t = 2$ με βήμα $h = 0.5$.

$$y(0) = y_0 = 0.5$$

$$y(0.5) \approx y_1 = y_0 + 0.5 \cdot (y_0 - (0.0)^2 + 1) = 1.25$$

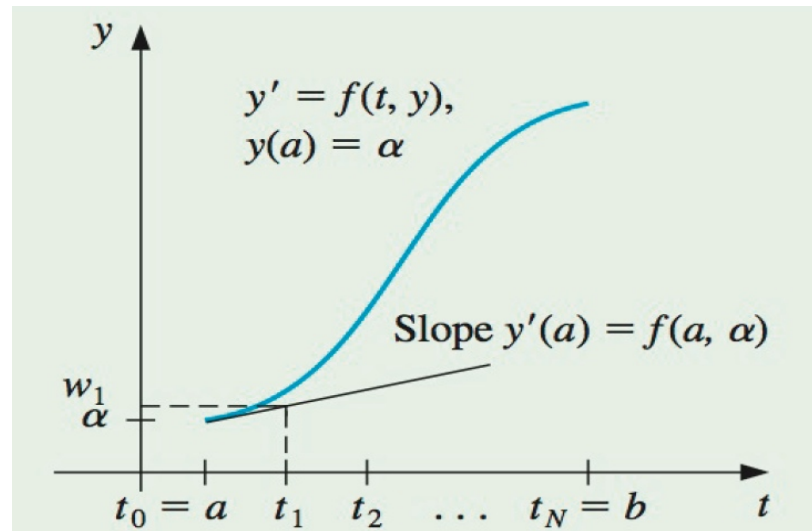
$$y(1) \approx y_2 = y_1 + 0.5 \cdot (y_1 - (0.5)^2 + 1) = 2.25$$

$$y(1.5) \approx y_3 = y_2 + 0.5 \cdot (y_2 - (1.0)^2 + 1) = 3.375$$

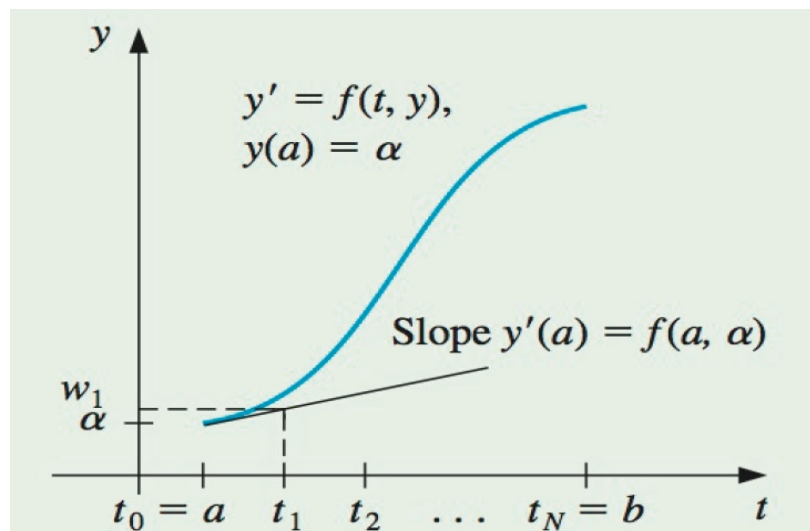
$$y(2) \approx y_4 = y_3 + 0.5 \cdot (y_3 - (1.5)^2 + 1) = 4.4375$$

Άσκηση: Επαναλάβεται το παράδειγμα λύνοντας με την πεπλεγμένη μέθοδο Euler.

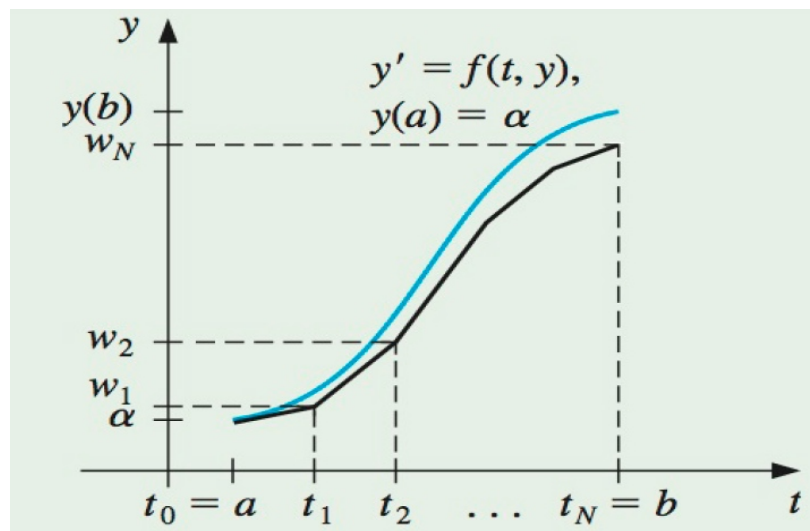
Το πρώτο βήμα της (άμεσης) μεθόδου Euler



Το πρώτο βήμα της (άμεσης) μεθόδου Euler



Όλα τα βήματα σε σύγκριση με την αναλυτική (με μπλε χρώμα) λύση



Μέθοδοι Υψηλότερης Τάξης Ακρίβειας

Μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση **αριθμητικής ολοκλήρωσης**.

Για παράδειγμα ολοκληρώνοντας τη Δ.Ε. $y' = f(t, y)$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (1)$$

Μέθοδοι Υψηλότερης Τάξης Ακρίβειας

Μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση **αριθμητικής ολοκλήρωσης**.

Για παράδειγμα ολοκληρώνοντας τη Δ.Ε. $y' = f(t, y)$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (1)$$

- Στην (1) αν προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με $hf(t^n, y(t^n))$ (δηλ. **τον αριστερό τύπο ορθογωνίου**) παίρνουμε την **(άμεση)** μέθοδο Euler.
- Στην (1) αν προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με $hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ (δηλ. **τον δεξιό τύπο ορθογωνίου**) παίρνουμε τη **πεπλεγμένη** μέθοδο Euler.

Μέθοδοι Υψηλότερης Τάξης Ακρίβειας

Μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση **αριθμητικής ολοκλήρωσης**.

Για παράδειγμα ολοκληρώνοντας τη Δ.Ε. $y' = f(t, y)$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (1)$$

- Στην (1) αν προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με $hf(t^n, y(t^n))$ (δηλ. **τον αριστερό τύπο ορθογωνίου**) παίρνουμε την **(άμεση) μέθοδο Euler**.
- Στην (1) αν προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με $hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ (δηλ. **τον δεξιό τύπο ορθογωνίου**) παίρνουμε τη **πεπλεγμένη μέθοδο Euler**.
- Στην (1) αν προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με **τον τύπο του τραπεζίου** δηλ. $\frac{h}{2}[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))]$ παίρνουμε **πεπλεγμένη μέθοδο του τραπεζίου** για Δ.Ε.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right], \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

Μέθοδος Heun (πρόβλεψης-διόρθωσης)

Αν στη παραπάνω μέθοδο τραπεζίου για Δ.Ε.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})], \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3)$$

προσεγγίσουμε το y^{n+1} με ένα βήμα της μεθόδου Euler (**πρόβλεψη**), δηλ.

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$

και αντικατάσταση στο δεξή μέλος της (3), προκύπτει η **μέθοδος Heun**

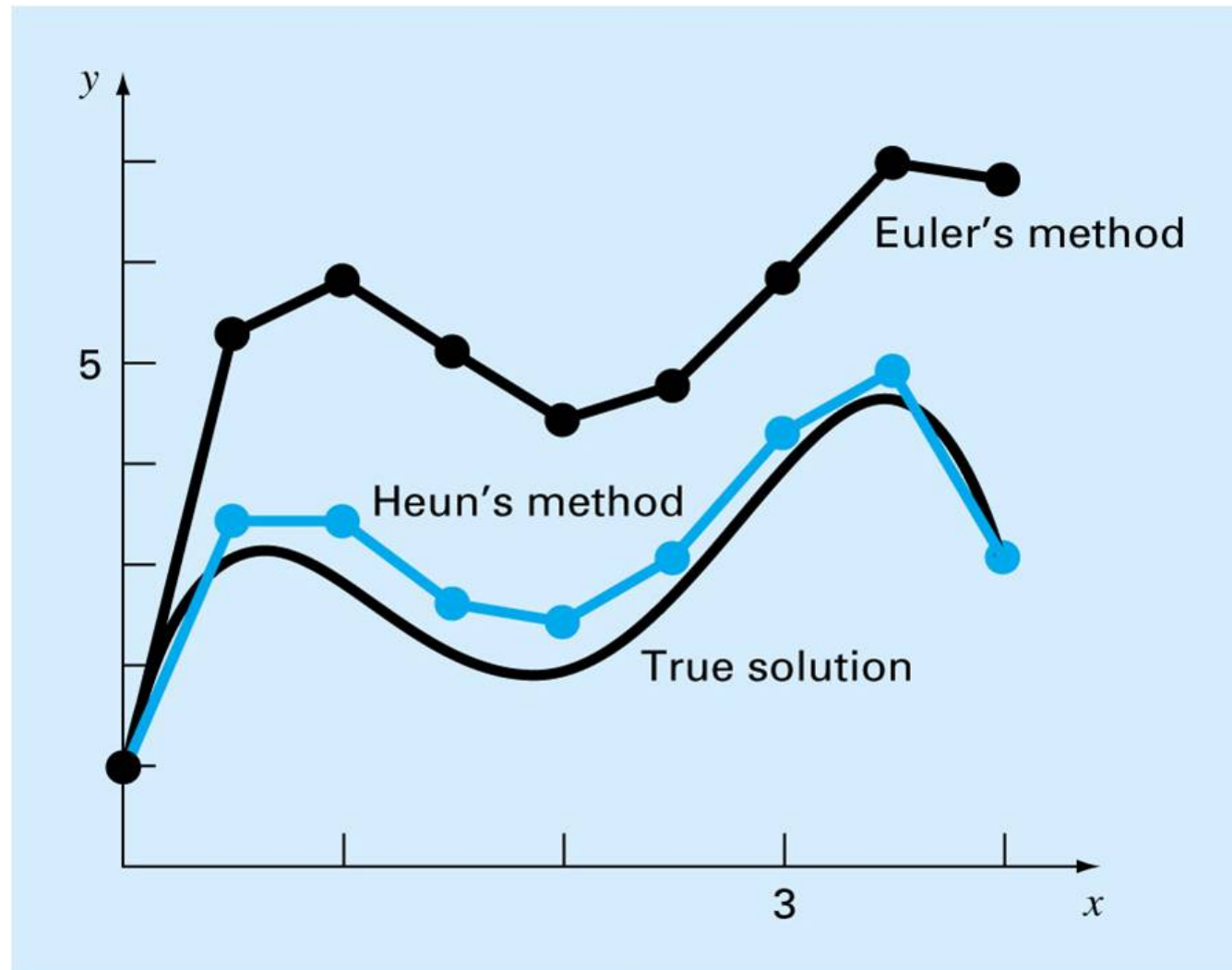
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \left[f(t^n, y^n) + f \left(t^{n+1}, y^n + hf(t^n, y^n) \right) \right], \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4)$$

Άσκηση: Με τη μέθοδο Heun να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. στο $x = 4$ για $h = 0.5$ και να γίνει σύγκριση με την (άμεση) μέθοδο του Euler

$$y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5, \quad y(0) = 1$$

Άσκηση: Με τη μέθοδο Heun να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. στο $x = 4$ για $h = 0.5$ και να γίνει σύγκριση με την (άμεση) μέθοδο του Euler

$$y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5, \quad y(0) = 1$$



Παρατηρήσεις

- Οι μέθοδοι Τραπεζίου και Heun έχουν **τάξη ακρίβειας δύο**, δηλ. για το σφάλμα του ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)| \leq C h^p$$

για κάποια σταθερά C ανεξάρτητη του h και $p = 2$.

Παρατηρήσεις

- Οι μέθοδοι Τραπεζίου και Heun έχουν **τάξη ακρίβειας δύο**, δηλ. για το σφάλμα του ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)| \leq C h^p$$

για κάποια σταθερά C ανεξάρτητη του h και $p = 2$.

- Η μέθοδος τραπεζίου είναι A-ευσταθής ενώ αντίθετα η μέθοδος Heun έχει περιοχή απόλυτης ευστάθειας ένα πεπερασμένο χωρίο του αριστερού μιγαδικού ημι-επιπέδου.

Παρατηρήσεις

- Οι μέθοδοι Τραπεζίου και Heun έχουν **τάξη ακρίβειας δύο**, δηλ. για το σφάλμα του ισχύει

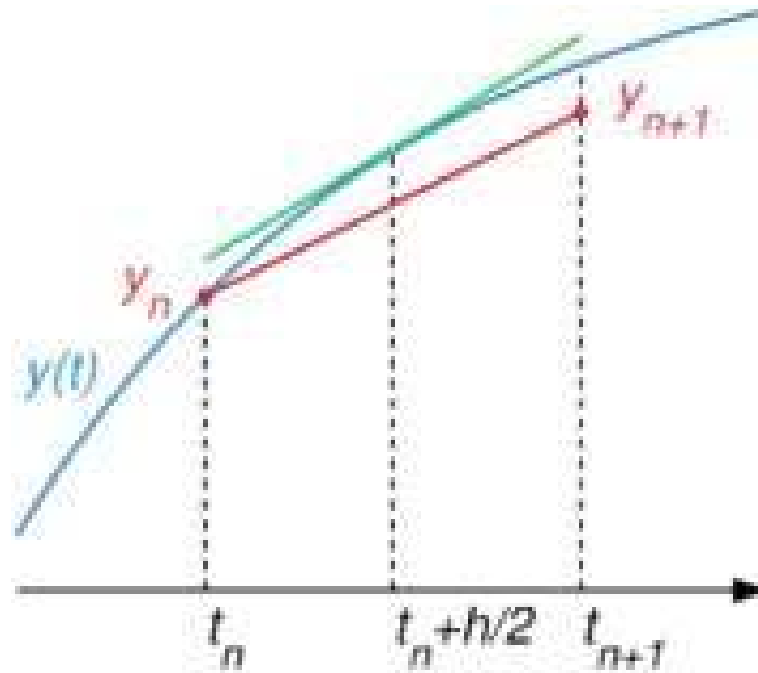
$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)| \leq Ch^p$$

για κάποια σταθερά C ανεξάρτητη του h και $p = 2$.

- Η μέθοδος τραπεζίου είναι A-ευσταθής ενώ αντίθετα η μέθοδος Heun έχει περιοχή απόλυτης ευστάθειας ένα πεπερασμένο χωρίο του αριστερού μιγαδικού ημι-επιπέδου.
- Χρησιμοποιώντας κανόνες ολοκλήρωσης μπορούν να παραχθούν και άλλες μέθοδοι, παράδειγμα η **Μέθοδος του Μέσου** (ή **Βελτιωμένη Euler**)

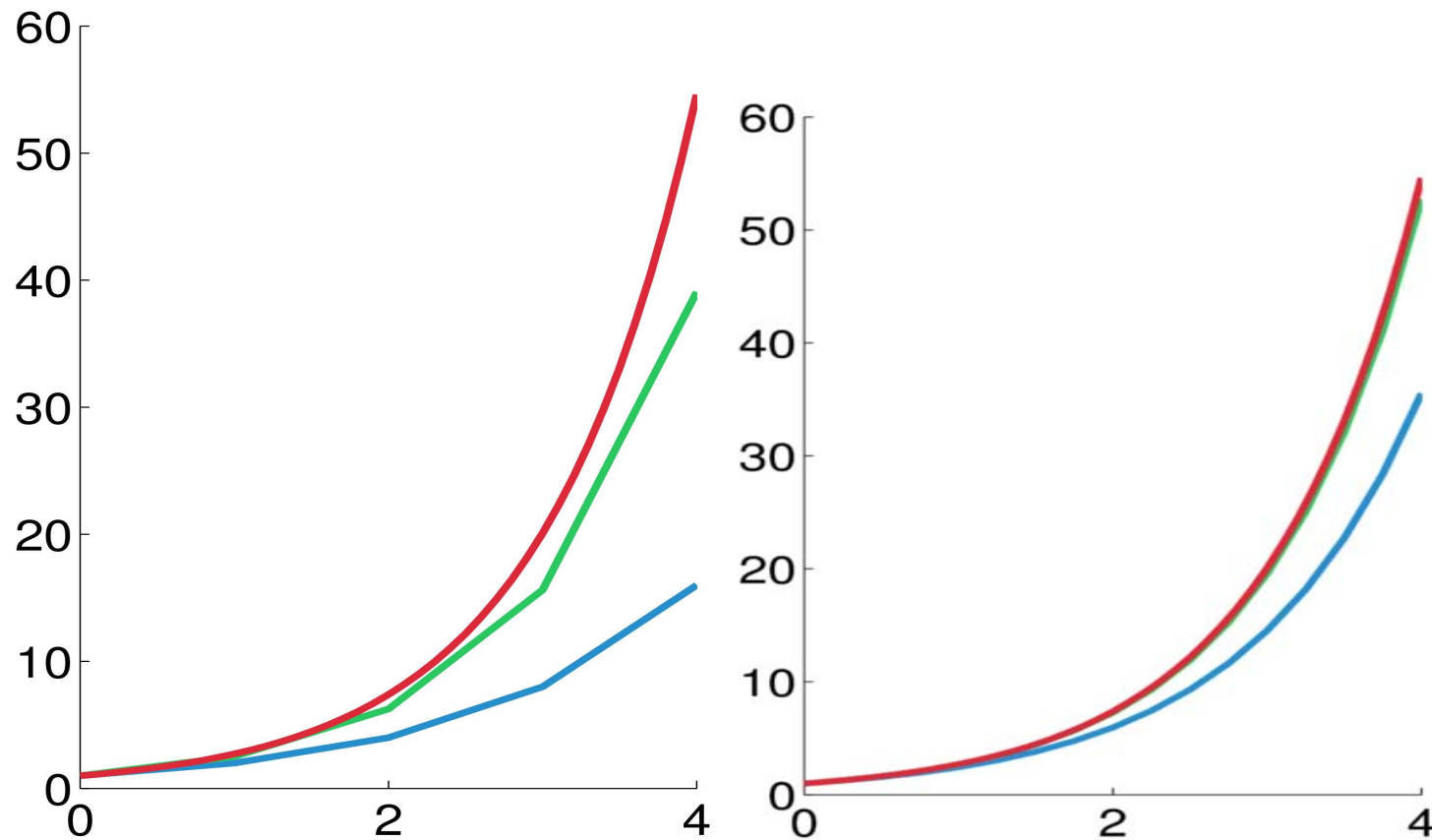
$$y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2}f(t^n, y^n)\right), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5)$$

Η Μέθοδος του μέσου (γεωμετρική ερμηνεία)



Υποθέτοντας ότι η τιμή y^n είναι ακριβής (δηλ. ιση με $y(t^n)$), η μέθοδος υπολογίζει τη τιμή y^{n+1} έτσι ώστε η κόκκινη χορδή να είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη που περνά από το μέσο του διαστήματος $[t^n, t^{n+1}]$.

Παράδειγμα Υπολογίστε για τη $y' = y$, με $y(0) = 1$ τη λύση στο $[0, 4]$ με τη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο του Μέσου με βήματα $h = 1$ και $h = 0.25$.



Σχήμα 1: Για $h = 1$ (αριστερά) και $h = 0.25$ (δεξιά): Με πράσινο η μέθοδος του Μέσου και μπλέ του Euler

Ακριβής λύση: $y = e^t$.

Μέθοδοι των Runge-Kutta (RK)

- Σημαντική κατηγορία μεθόδων.

Μέθοδοι των Runge-Kutta (RK)

- Σημαντική κατηγορία μεθόδων.
- Χωρίζονται σε **άμεσες** (explicit) και **πεπλεγμένες** (implicit). Όλες οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα ανήκουν σε αυτές τις μεθόδους.

Μέθοδοι των Runge-Kutta (RK)

- Σημαντική κατηγορία μεθόδων.
- Χωρίζονται σε **άμεσες** (explicit) και **πεπλεγμένες** (implicit). Όλες οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα ανήκουν σε αυτές τις μεθόδους.
- Οι RK μέθοδοι συνδυάζουν εξαιρετικές ιδιότητες ευστάθειας και υψηλή ακρίβεια.

Μέθοδοι των Runge-Kutta (RK)

- Σημαντική κατηγορία μεθόδων.
- Χωρίζονται σε **άμεσες** (explicit) και **πεπλεγμένες** (implicit). Όλες οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα ανήκουν σε αυτές τις μεθόδους.
- Οι RK μέθοδοι συνδυάζουν εξαιρετικές ιδιότητες ευστάθειας και υψηλή ακρίβεια.
- Οι μέθοδοι RK ανήκουν στη κατηγορία των λεγόμενων **μονοβηματικών μεθόδων** στις οποίες ο υπολογισμός της τιμής του y^{n+1} γίνεται με χρήση μόνο της y^n .

Μέθοδοι των Runge-Kutta (RK)

Μία μέθοδος RK (με q ενδιάμεσα στάδια) υπολογίζει το y^{n+1} ως εξής:

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^q b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (6)$$

όπου:

b_i : δεδομένες σταθερές $i = 1, \dots, q$,

$t^{n,i} = t^n + \tau_i h$, ενδιάμεσα σημεία του $[t^n, t^{n+1}]$, με τ_i δεδομένες σταθερές (κόμβοι).

$y^{n,i}$: q ενδιάμεσες τιμές (βοηθητικά στάδια) προσεγγίσεις των $y(t^{n,i})$

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q \quad (7)$$

με $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, q$ δεδομένες σταθερές (βάρη).

Στα ενδιάμεσα "χρονικά" βήματα $t^{n,i} = t^n + \tau_i h$, τα τ_i είναι κόμβοι ολοκλήρωσης (συνήθως $0 < \tau_i < 1$), τα b_i βάρη και $a_{i,j}$, $j = 1, \dots, q$ είναι τα βάρη ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, \tau_i]$.

Στα ενδιάμεσα "χρονικά" βήματα $t^{n,i} = t^n + \tau_i h$, τα τ_i είναι κόμβοι ολοκλήρωσης (συνήθως $0 < \tau_i < 1$), τα b_i βάρη και $a_{i,j}$, $j = 1, \dots, q$ είναι τα βάρη ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, \tau_i]$.

Στην ουσία δηλ. αυτό που κάνουμε είναι για μία συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα (κανόνες ολοκλήρωσεις)

$$\int_0^{\tau_i} \psi(s) ds \approx \sum_{j=1}^q a_{ij} \psi(\tau_j), \quad i = 1, \dots, q$$

και

$$\int_0^1 \psi(s) ds \approx \sum_{j=1}^q b_j \psi(\tau_j).$$

Στα ενδιάμεσα "χρονικά" βήματα $t^{n,i} = t^n + \tau_i h$, τα τ_i είναι κόμβοι ολοκλήρωσης (συνήθως $0 < \tau_i < 1$), τα b_i βάρη και $a_{i,j}$, $j = 1, \dots, q$ είναι τα βάρη ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, \tau_i]$.

Στην ουσία δηλ. αυτό που κάνουμε είναι για μία συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα (κανόνες ολοκλήρωσεις)

$$\int_0^{\tau_i} \psi(s) ds \approx \sum_{j=1}^q a_{ij} \psi(\tau_j), \quad i = 1, \dots, q$$

και

$$\int_0^1 \psi(s) ds \approx \sum_{j=1}^q b_j \psi(\tau_j).$$

Ολοκληρώνοντας, ως προς t , και τα 2 μέλη της Δ.Ε. $y' = f(t, y)$ στο $[t^n, t^{n,i}]$,

$$\begin{aligned} y(t^{n,i}) - y(t^n) &= \int_{t^n}^{t^n + \tau_i h} f(t, y(t)) dt, \\ &= h \int_0^{\tau_i} f(t^n + sh, y(t^n + sh)) ds, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

Αρα παίρνουμε την (7) με χρήση του πρώτου κανόνα ολοκλήρωσης

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q$$

Αρα παίρνουμε την (7) με χρήση του πρώτου κανόνα ολοκλήρωσης

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q$$

Ολοκληρώνοντας, ως προς t , και τα 2 μέλη της Δ.Ε. $y' = f(t, y)$ τώρα στο $[t^n, t^{n+1}]$, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t = t^n + sh$ το ολοκλήρωμα που προκύπτει στο $[0, 1]$ προσεγγίζεται από το δεύτερο κανόνα ολοκλήρωσης και δίνει την (6)

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^q b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}), \quad n = 0, \dots, N - 1$$

Κάθε σύνολο σταθερών ορίζει και μία μέθοδο και γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε μορφή πίνακα (μητρώου) (**πίνακας του Butcher**) ως :

$$\begin{array}{cccc|c}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\
 \hline
 b_1 & b_2 & \cdots & b_q &
 \end{array} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \Bigg| \tau$$

Κάθε σύνολο σταθερών ορίζει και μία μέθοδο και γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε μορφή πίνακα (μητρώου) (**πίνακας του Butcher**) ως :

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \bigg| \tau$$

- Μέθοδοι με $a_{ij} = 0$ για $i \leq j$ λέγονται άμεσες (κάθε ενδιάμεση τιμή $y^{n,i}$ υπολογίζεται με απλή αντικατάσταση από τις προηγούμενες τιμές $y^{n,j}, i > j$.)

Κάθε σύνολο σταθερών ορίζει και μία μέθοδο και γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε μορφή πίνακα (μητρώου) (**πίνακας του Butcher**) ως :

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \bigg| \tau$$

- Μέθοδοι με $a_{ij} = 0$ για $i \leq j$ λέγονται άμεσες (κάθε ενδιάμεση τιμή $y^{n,i}$ υπολογίζεται με απλή αντικατάσταση από τις προηγούμενες τιμές $y^{n,j}, i > j$.)
- Μέθοδοι με $a_{ij} \neq 0$ για κάποια $i \leq j$ λέγονται πεπλεγμένες και απαιτούν σε κάθε βήμα την επίλυση ενός μη γραμμικού $q \times q$ συστήματος (μεγάλο υπολογιστικό κόστος), αλλά πλεονεκτούν από άποψη ευστάθειας και τάξης ακρίβειας (σε σχέση με τις άμεσες με ίδιο πλήθος ενδιάμεσων σταδίων).

Κάθε σύνολο σταθερών ορίζει και μία μέθοδο και γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε μορφή πίνακα (μητρώου) (**πίνακας του Butcher**) ως :

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \Bigg| \tau$$

- Μέθοδοι με $a_{ij} = 0$ για $i \leq j$ λέγονται άμεσες (κάθε ενδιάμεση τιμή $y^{n,i}$ υπολογίζεται με απλή αντικατάσταση από τις προηγούμενες τιμές $y^{n,j}, i > j$.)
- Μέθοδοι με $a_{ij} \neq 0$ για κάποια $i \leq j$ λέγονται πεπλεγμένες και απαιτούν σε κάθε βήμα την επίλυση ενός μη γραμμικού $q \times q$ συστήματος (μεγάλο υπολογιστικό κόστος), αλλά πλεονεκτούν από άποψη ευστάθειας και τάξης ακρίβειας (σε σχέση με τις άμεσες με ίδιο πλήθος ενδιάμεσων σταδίων).
- Μέθοδοι με $a_{ij} = 0$ για $i < j$ (δηλ. $a_{ii} \neq 0$) λέγονται ημι-πεπλεγμένες

Εναλλακτικός τρόπος γραφής των μεθόδων RK

Οι σχέσεις (6) και (7) θέτοντας $k^{n,i} = f(t^{n,i}, y^{n,i})$ γράφονται

$$\begin{cases} k^{n,i} = f\left(t^{n,i}, y^n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} k^{n,j}\right), & i = 1, \dots, q, \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^q b_i k^{n,i} \end{cases} \quad (8)$$

Εναλλακτικός τρόπος γραφής των μεθόδων RK

Οι σχέσεις (6) και (7) θέτοντας $k^{n,i} = f(t^{n,i}, y^{n,i})$ γράφονται

$$\begin{cases} k^{n,i} = f\left(t^{n,i}, y^n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} k^{n,j}\right), & i = 1, \dots, q, \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^q b_i k^{n,i} \end{cases} \quad (8)$$

- Για $a_{ij} = 0$ για $i \leq j$ δηλ. **άμεσες RK**

$$\begin{cases} k^{n,1} = f(t^{n,1}, y^n) \\ k^{n,2} = f(t^{n,2}, y^n + h a_{21} k^{n,1}) \\ \vdots \\ k^{n,q} = f\left(t^{n,q}, y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} k^{n,j}\right) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \end{cases} \quad (9)$$

- Για $a_{ij} = 0$ για $i < j$ δηλ. **ημι-πεπλεγμένες RK**

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{n,1} = y^n + ha_{11}f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n,2} = y^n + ha_{21}f(t^{n,1}, y^{n,1}) + ha_{22}f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^q a_{qj}f(t^{n,j}, y^{n,j}) \end{array} \right. \quad (10)$$

Παραδείγματα RK Μεθόδων

(I) Το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array}$$

δίνει την (άμεση) μέθοδο Euler

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^{n,1}) \end{cases} \quad (11)$$

Παραδείγματα RK Μεθόδων

(I) Το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array}$$

δίνει την (άμεση) μέθοδο Euler

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^{n,1}) \end{cases} \quad (11)$$

(II) Το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

δίνει τη μέθοδο **πεπλεγμένη** Euler^{*}

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n,1}) \end{cases} \quad (12)$$

^{*}Οι δύο εξισώσεις συμπίπτουν, $y^{n,1} = y^{n+1}$

(III) Το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

περιγράφει τη λεγόμενη **πεπλεγμένη μέθοδο του μέσου**

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}) \end{cases} \quad (13)$$

(III) Το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

περιγράφει τη λεγόμενη **πεπλεγμένη μέθοδο του μέσου**

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}) \end{cases} \quad (13)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν άμέσως ότι $y^{n,1} = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$ άρα η μέθοδος μπορεί να γραφεί και ως

$$y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

(IV) Το μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

περιγράφει τη **μέθοδο του τραπεζίου***

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} \left[f(t^n, y^{n,1}) + f(t^{n+1}, y^{n,2}) \right] \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \left[f(t^n, y^{n,1}) + f(t^{n+1}, y^{n,2}) \right] \end{cases} \quad (14)$$

* Για αρκετά μικρό h , $y^{n,2} = y^{n+1}$, όπου αντικαθιστώντας στη τρίτη σχέση οδηγούμαστε στη γνωστή μας μέθοδο τραπεζίου (2).

(IV) Το μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1 - 2\mu & \mu & 1 - \mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

περιγράφει μια ενδιαφέρουσα κατηγορία (ημι-πεπλεγμένων) μεθόδων RK, με $\mu \in \mathbf{R}$, γενικά δεύτερης τάξης ακρίβειας ($p = 2$). Για $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ έχουμε $p = 3$ (για μέθοδο δύο σταδίων!)

(IV) Το μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1 - 2\mu & \mu & 1 - \mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

περιγράφει μια ενδιαφέρουσα κατηγορία (ημι-πεπλεγμένων) μεθόδων RK, με $\mu \in \mathbf{R}$, γενικά δεύτερης τάξης ακρίβειας ($p = 2$). Για $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ έχουμε $p = 3$ (για μέθοδο δύο σταδίων!)

(V) Το μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \mu & \frac{1}{2} - \mu \\ \frac{1}{4} + \mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

περιγράφει μια ενδιαφέρουσα κατηγορία μεθόδων RK, με $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$, όπου έχουμε $p = 4$ (για μέθοδο δύο σταδίων). Η μέθοδος λέγεται και Gauss-Legendre δύο σημείων γιατί οι κόμβοι $\tau_i = \frac{1}{2} \pm \mu$ και τα βάρη $b_i = 1/2$ είναι τα αντίστοιχα των τύπων ολοκλήρωσης Gauss-Legendre με δύο σημεία στο $[0, 1]$.

Τα μητρώα (α)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

(β)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{0} & 0 & 0 & \frac{3}{2/3} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$$

(γ)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{0} & 0 & 0 & \frac{2}{3/4} \\ \hline \frac{2}{9} & 1/3 & \frac{4}{9} & \end{array}$$

δίνουν (α) τη μέθοδο RK 3ης τάξης, (β) μέθοδο Heun 3ης τάξης και (γ) τη μέθοδο Ralston

Η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta (RK)

Η άμεση μέθοδος αυτή έχει **τέσσερα στάδια** και ακρίβεια επίσης τέσσερα ($p = 4$). Δίνεται από το μητρώο

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta (RK)

Η άμεση μέθοδος αυτή έχει **τέσσερα στάδια** και ακρίβεια επίσης τέσσερα ($p = 4$). Δίνεται από το μητρώο

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Συνεπώς

$$\left\{ \begin{array}{l} k^{n,1} = f(t^{n,1}, y^n) = f(t^n, y^n) \\ k^{n,2} = f(t^{n,2}, y^n + ha_{21}k^{n,1}) = f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + h\frac{1}{2}k^{n,1}) \\ k^{n,3} = \dots = f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + h\frac{1}{2}k^{n,2}) \\ k^{n,4} = \dots = f(t^{n+1}, y^n + hk^{n,3}) \end{array} \right. \quad (15)$$

Η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta (RK)

Η άμεση μέθοδος αυτή έχει **τέσσερα στάδια** και ακρίβεια επίσης τέσσερα ($p = 4$). Δίνεται από το μητρώο

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

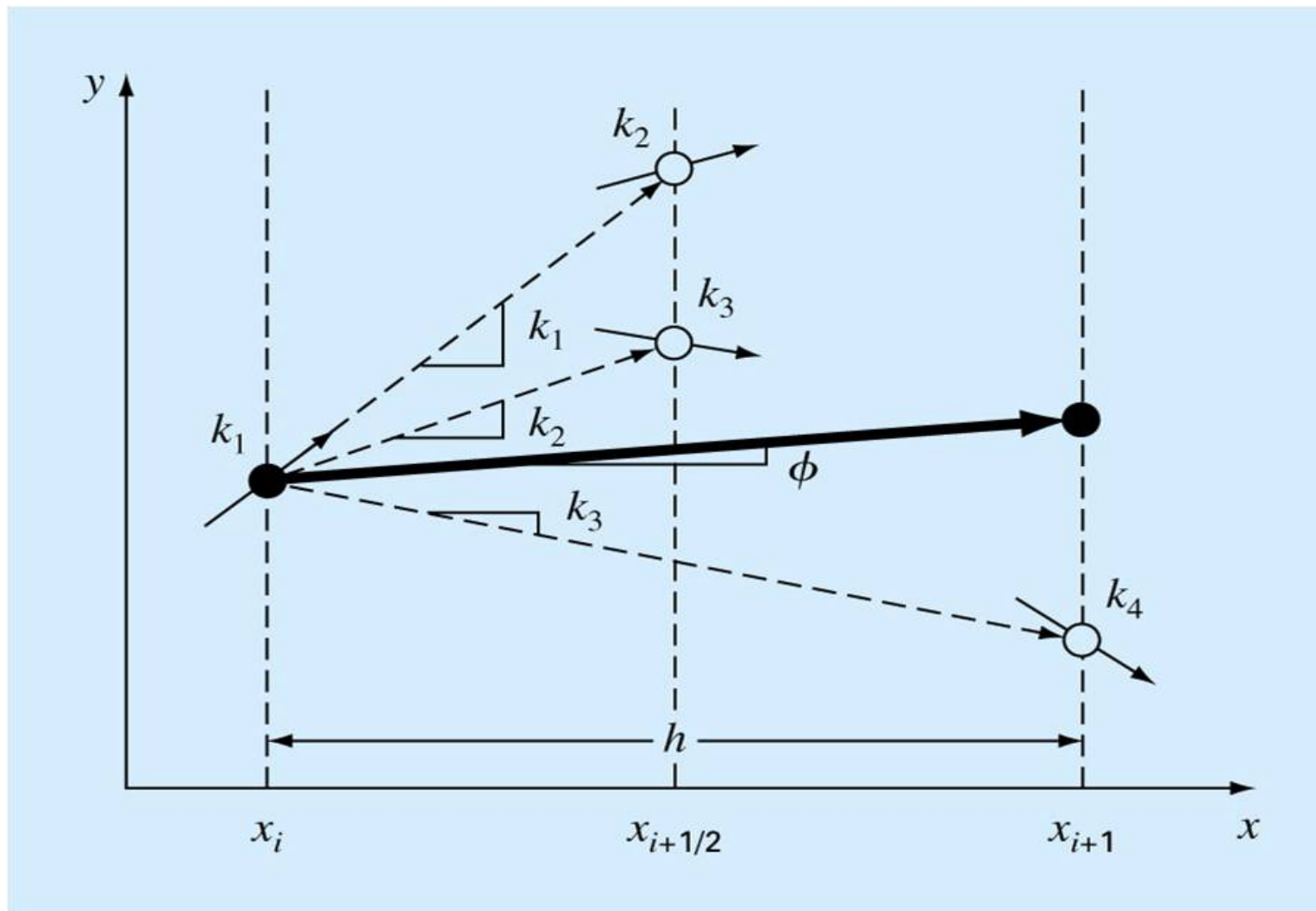
Συνεπώς

$$\begin{cases} k^{n,1} = f(t^{n,1}, y^n) = f(t^n, y^n) \\ k^{n,2} = f(t^{n,2}, y^n + ha_{21}k^{n,1}) = f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + h\frac{1}{2}k^{n,1}) \\ k^{n,3} = \dots = f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + h\frac{1}{2}k^{n,2}) \\ k^{n,4} = \dots = f(t^{n+1}, y^n + hk^{n,3}) \end{cases} \quad (15)$$

Από την (8) έχουμε ότι το κάθε βήμα της μεθόδου τελικά δίνεται από

$$y^{n+1} = y^n + h \underbrace{\left(\frac{1}{6}k^{n,1} + \frac{1}{3}k^{n,2} + \frac{1}{3}k^{n,3} + \frac{1}{6}k^{n,4} \right)}_{\phi} \quad (16)$$

Γεωμετρική ερμηνεία ενός βήματος της μεθόδου $RK4$ σταδίων



Άσκηση Με τη μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης, να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ.

$$y'(t) = \frac{-y(t)}{1+t}, \quad t \in [0, 0.2],$$

με $y(0) = y^0 = 1$ και βήμα $h = 0.05$.

Άσκηση Με τη μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης, να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ.

$$y'(t) = \frac{-y(t)}{1+t}, \quad t \in [0, 0.2],$$

με $y(0) = y^0 = 1$ και βήμα $h = 0.05$.

Λύση Τα υποδιαστήματα είναι $N = (b - a)/h = (0.2 - 0)/0.05 = 4$ τότε για τον υπολογισμό του y^1

$$\begin{cases} hk^{0,1} = hf(t^0, y^0) = \frac{-y^0}{1+t^0} = \frac{-1}{1+0} = -1 \\ hk^{0,2} = hf(t^0 + \frac{h}{2}, y^0 + h\frac{1}{2}k^{0,1}) = -0.04637195 \\ hk^{0,3} = \dots = hf(t^0 + \frac{h}{2}, y^0 + h\frac{1}{2}k^{0,2}) = -0.04654466 \\ hk^{0,4} = \dots = hf(t^0 + h, y^0 + hk^{0,3}) = -0.04328938 \end{cases} \quad (17)$$

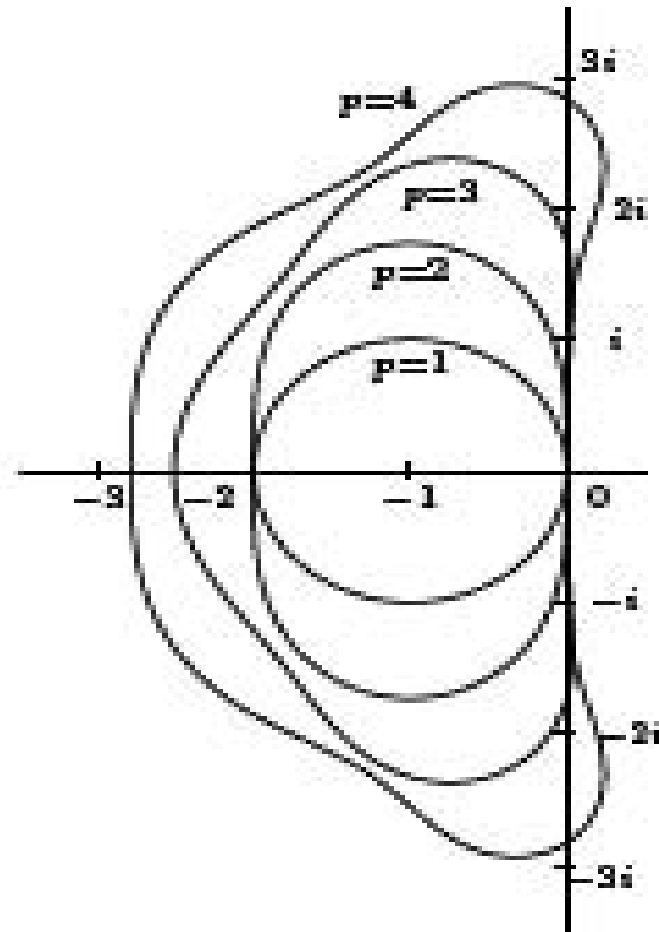
οπότε

$$y^1 = y^0 + \left(\frac{1}{6}k^{0,1} + \frac{1}{3}k^{0,2} + \frac{1}{3}k^{0,3} + \frac{1}{6}k^{0,4} \right) = 0.9534795$$

Εργαζόμενοι με το ίδιο τρόπο για $n = 1, 2, 3$ βρίσκουμε τα y^2, y^3, y^4 .

Ευστάθεια των άμεσων Runge-Kutta

Αν όπου p η τάξη ακρίβειας των μεθόδων στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις περιοχές απόλυτης ευστάθειας στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο.



Άσκηση

Για τη Δ.Ε. $y' = \sin(t) + e^{-t}$, $y(0) = 0$ εφαρμόστε την κλασσική μέθοδο RK και επιβεβαιώστε τα παρακάτω αποτελέσματα. (Δίνεται ότι η ακριβής λύση είναι $y(t) = 2 - e^{-t} - \cos(t)$.)

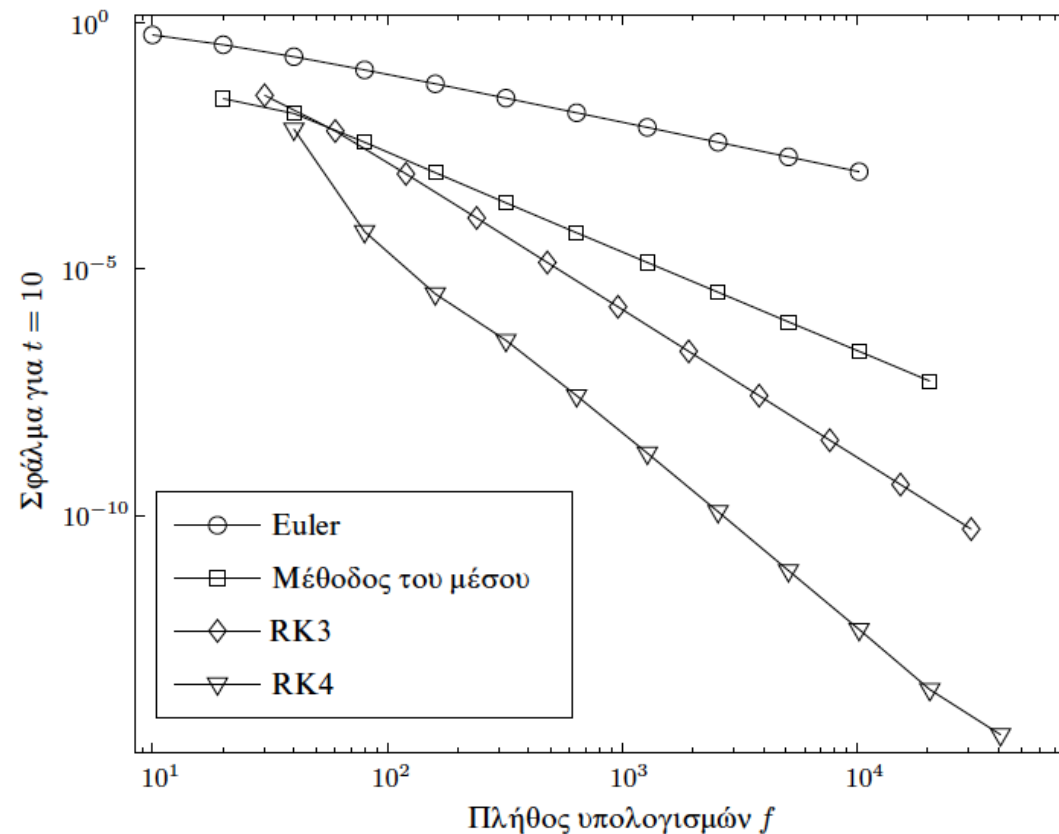
t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = y_i - y(t_i) $
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.100 158	0.100 158	$0.348E - 08$
0.2	0.201 203	0.201 203	$0.699E - 08$
0.3	0.303 845	0.303 845	$0.106E - 07$
0.4	0.408 619	0.408 619	$0.142E - 07$
0.5	0.515 887	0.515 887	$0.179E - 07$

Σύγκριση Ακρίβειας-Υπολογιστικού κόστους

Έστω το πρόβλημα $y' = y \cos(t)$, $y(0) = 1$ και θέλουμε μια εκτίμηση του $y(10)$.

Σύγκριση Ακρίβειας-Υπολογιστικού κόστους

Έστω το πρόβλημα $y' = y \cos(t)$, $y(0) = 1$ και θέλουμε μια εκτίμηση του $y(10)$.



Παρατηρούμε ότι καθώς η τάξη ακρίβειας των μεθόδων αυξάνεται, το απαιτούμενο κόστος (με βάση τους υπολογισμούς της f) για να προσεγγισθεί η λύση, π.χ. με σφάλμα $\epsilon < 10^{-6}$ μειώνεται δραματικά.