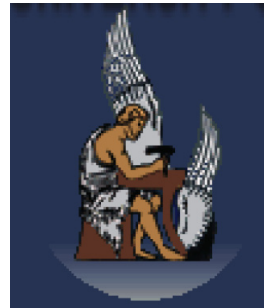


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 17η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

ΚΕΦ. 6: Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) για Συνήθης Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε)

ΚΕΦ. 6: Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) για Συνήθης Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε)

- Πολλά προβλήματα στις θετικές επιστήμες και την τεχνολογία διατυπώνονται με διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν διάφορα φαινόμενα και χρησιμοποιούν ορισμένες τιμές, που υπάρχουν στην αρχή του αντίστοιχου φαινομένου (**αρχικές συνθήκες**).

ΚΕΦ. 6: Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) για Συνήθης Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε)

- Πολλά προβλήματα στις θετικές επιστήμες και την τεχνολογία διατυπώνονται με διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν διάφορα φαινόμενα και χρησιμοποιούν ορισμένες τιμές, που υπάρχουν στην αρχή του αντίστοιχου φαινομένου (**αρχικές συνθήκες**).
- Στις περισσότερες καταστάσεις οι διαφορική εξίσωση είναι πολύ περίπλοκη για να λυθεί αναλυτικά. Υπάρχουν όμως προσεγγιστικές μέθοδοι για την επίλυσή τους που δίνουν τα ακριβέστερα δυνατά αποτελέσματα και ρεαλιστικές πληροφορίες σφάλματος.

ΚΕΦ. 6: Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) για Συνήθης Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε)

- Πολλά προβλήματα στις θετικές επιστήμες και την τεχνολογία διατυπώνονται με διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν διάφορα φαινόμενα και χρησιμοποιούν ορισμένες τιμές, που υπάρχουν στην αρχή του αντίστοιχου φαινομένου (**αρχικές συνθήκες**).
- Στις περισσότερες καταστάσεις οι διαφορική εξίσωση είναι πολύ περίπλοκη για να λυθεί αναλυτικά. Υπάρχουν όμως προσεγγιστικές μέθοδοι για την επίλυσή τους που δίνουν τα ακριβέστερα δυνατά αποτελέσματα και ρεαλιστικές πληροφορίες σφάλματος.
- Οι προσεγγιστικές αυτές μέθοδοι δεν παράγουν μια συνεχή προσέγγιση στη λύση του Π.Α.Τ **αλλά ορίζουν προσεγγίσεις σε συγκεκριμένα (και συνήθως ισαπέχοντα) σημεία (π.χ. στο χρόνο) της ανεξάρτητης μεταβλητής.**

Προβλήματα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ)

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Το τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών δίνεται ως εξής:

Προβλήματα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ)

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Το τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών δίνεται ως εξής:

Ζητάμε μία συνάρτηση $y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 & (\text{αρχική συνθήκη}) \end{cases} \quad (1)$$

Κάθε συνάρτηση $y(t) \in C^1[a, b]$ για την οποία ισχύει η (1) λέγεται **λύση του Π.Α.Τ.**

Προβλήματα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ)

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Το τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών δίνεται ως εξής:

Ζητάμε μία συνάρτηση $y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 & (\text{αρχική συνθήκη}) \end{cases} \quad (1)$$

Κάθε συνάρτηση $y(t) \in C^1[a, b]$ για την οποία ισχύει η (1) λέγεται **λύση του Π.Α.Τ.**

- Το πρόβλημα (1) μπορεί να έχει μία, άπειρες ή καμία λύση στο $[a, b]$, πράγμα που θα πρέπει να γνωρίζουμε πριν προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τη λύση.

Από τη θεωρεία των διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι αν η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο κυρτό σύνολο S με

$$S \equiv \{(t, y) : a \leq t \leq b, -\infty < y < +\infty\}$$

και ικανοποιεί μια συνθήκη Lipshitz στο S με σταθερά $L(> 0)$, δηλ.

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1) έχει μοναδική λύση για κάθε $t \in [a, b]$.

Από τη θεωρεία των διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι αν η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο κυρτό σύνολο S με

$$S \equiv \{(t, y) : a \leq t \leq b, -\infty < y < +\infty\}$$

και ικανοποιεί μια συνθήκη Lipshitz στο S με σταθερά $L(> 0)$, δηλ.

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1) έχει μοναδική λύση για κάθε $t \in [a, b]$.

- Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι το Π.Α.Τ (1) έχει (πάντα) λύση και θα παρουσιάσουμε αριθμητικές μεθόδους που δίνουν την προσεγγιστική λύση (τιμή) της $y(t)$ σε τυχόν σημείο $t \in (a, b]$.

Από τη θεωρεία των διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι αν η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο κυρτό σύνολο S με

$$S \equiv \{(t, y) : a \leq t \leq b, -\infty < y < +\infty\}$$

και ικανοποιεί μια συνθήκη Lipshitz στο S με σταθερά $L(> 0)$, δηλ.

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1) έχει μοναδική λύση για κάθε $t \in [a, b]$.

- Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι το Π.Α.Τ (1) έχει (πάντα) λύση και θα παρουσιάσουμε αριθμητικές μεθόδους που δίνουν την προσεγγιστική λύση (τιμή) της $y(t)$ σε τυχόν σημείο $t \in (a, b]$.

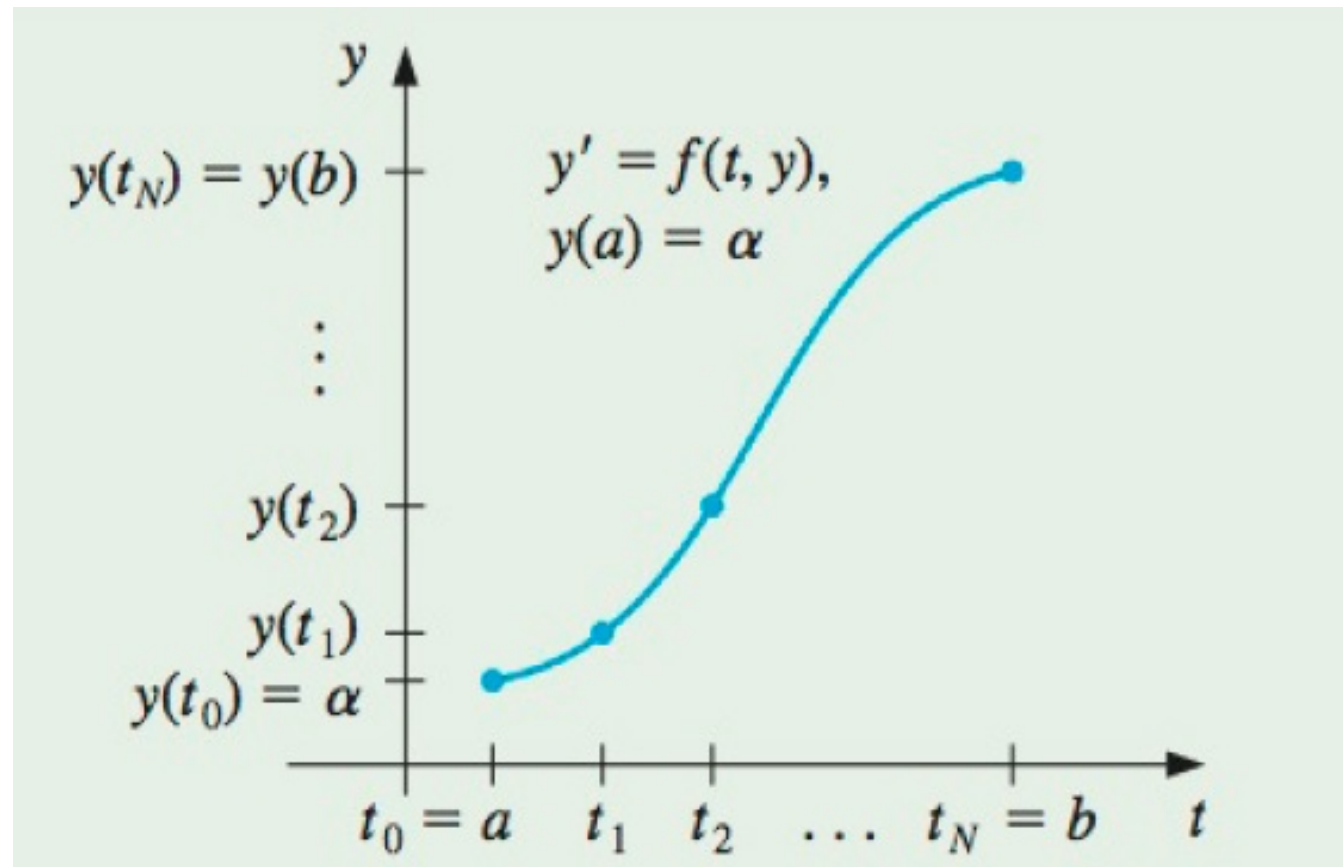
- Στη συνέχεια διαιρούμε το $[a, b]$ σε N ίσα υποδιαστήματα με σημεία

$$t^n = a + nh, \quad n = 0, \dots, N, \quad h = (b - a)/N \text{ (βήμα ολοκλήρωσης)}$$

και υπολογίζουμε **προσεγγίσεις** y^n των πραγματικών τιμών $y(t^n)$, $n = 1, \dots, N$,

$$y^n \approx y(t^n)$$

Διακριτοποίηση της λύσης του Π.Α.Τ. (1) με αρχ. συνθήκη $y(t^0)=y(a)=a=y^0$



Η (άμεση) μέθοδος Euler

- Είναι η απλούστερη αριθμητική μέθοδος επίλυσης Π.Α.Τ για Σ.Δ.Ε.
- Χρησιμοποιείται σπάνια στη πράξη, αλλά λόγω της απλότητάς της βοηθά στη κατανόηση εννοιών και φαινομένων που περιλαμβάνονται στην κατασκευή πιο προηγμένων μεθόδων.

Η (άμεση) μέθοδος Euler

- Είναι η απλούστερη αριθμητική μέθοδος επίλυσης Π.Α.Τ για Σ.Δ.Ε.
- Χρησιμοποιείται σπάνια στη πράξη, αλλά λόγω της απλότητάς της βοηθά στη κατανόηση εννοιών και φαινομένων που περιλαμβάνονται στην κατασκευή πιο προηγμένων μεθόδων.

Έστω το καλός ορισμένο πρόβλημα αρχ. τιμών,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y^0 & \text{(αρχική συνθήκη)} \end{cases} \quad (2)$$

και ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$ με $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N$. Οι προσεγγίσεις $y^1, y^2, \dots, y^N$ τις οποίες δίνει η μέθοδος Euler με βήμα $h = (b - a)/N$ και $t^n = a + nh, n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$, δίνονται από τον αναδρομικό τύπο

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (3)$$

Η (άμεση) μέθοδος Euler

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N - 1$$

μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής: το Π.Α.Τ (2) δίνει για $t = t^n$

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$

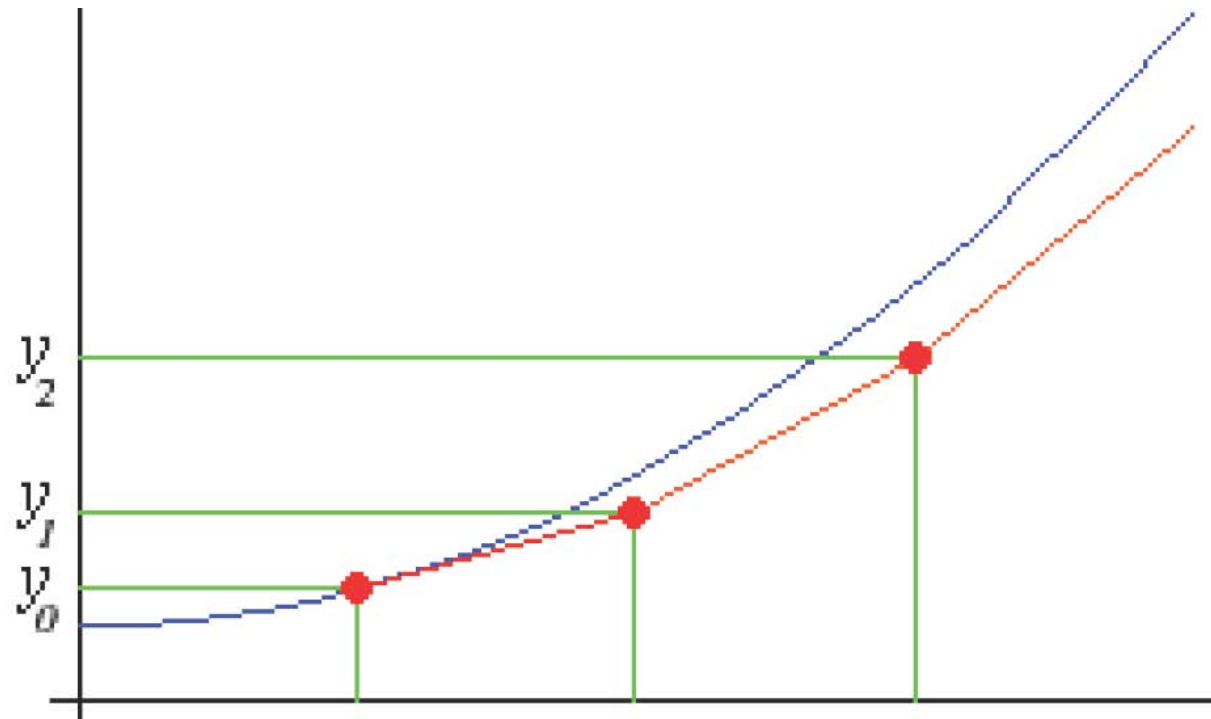
προσεγγίζοντας την παράγωγο $y'(t^n)$ με **πηλίκo προς τα εμπρός διαφορών** (βλ. **αριθμητική διαφορίση/παραγωγήιση**)

$$y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

υποθέτοντας τώρα ότι το y^n είναι μια (καλή) προσέγγιση του $y(t^n)$ έχουμε

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n) \rightarrow y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$$

Η (άμεση) μέθοδος Euler (γεωμετρική ερμηνεία)



Η y' δίνει την κλίση της εφαπτομένης για κάθε σημείο της $y(t)$. Υπολογίζουμε την $y'_0 = f(t^0, y^0)$ και φέρνουμε την ευθεία (εφαπτόμενη) που περνά από το (t^0, y^0) με κλίση y'_0 . Επάνω στη εφαπτομένη αυτή παίρνουμε το επόμενο σημείο (t^1, y^1) , υπολογίζουμε τη νέα κλίση $y'_1 = f(t^1, y^1)$ και τη νέα ευθεία που περνά από το (t^1, y^1) με κλίση y'_1 και πάνω σε αυτή την ευθεία παίρνουμε το (t^2, y^2) κ.ο.κ. (κοκκίνη γραμμή, με μπλέ η ακριβής λύση.)

Παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα των αρχικών τιμών

$$y' = -y + x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1.$$

Αν $n = 10$, να υπολογιστεί η $y(1.0)$ με τη μέθοδο του Euler.

$$f(x, y) = -y + x + 1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad x_n = 1.0$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{1.0 - 0}{10} \quad \text{και} \quad x_i = x_0 + ih = 0.1i$$

οπότε η μέθοδος του Euler είναι η

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0(1)n - 1$$

ή

$$y_{i+1} = y_i + h(-y_i + x_i + 1), \quad i = 0(1)9.$$

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τον ανωτέρω τύπο βρίσκουμε

$$(i = 0)y_1 = y_0 + h(-y_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1.0$$

$$(i = 1)y_2 = y_1 + h(-y_1 + x_1 + 1) = 1.0 + 0.1(-1 + 0.0 + 1) = 1.01$$

$$(i = 2)y_3 = y_2 + h(-y_2 + x_2 + 1) = 1.01 + 0.1(-1.01 + 0.2 + 1) = 1.029$$

$\vdots$

$$(i = 9)y_{10} = 1.348678$$

Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει όλους τους υπολογισμούς καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα. Η ακριβής λύση είναι η $Y(x) = x + e^{-x}$.

Σύγκριση με την πραγματική (ορθή) λύση σε κάθε βήμα i

i	x_i	y_i	$y_i(\text{ορθή})$	$ y_i - Y_i $
0	0	1.0	1.00	0
1	0.1	1.0	1.004837	0.004837
2	0.2	1.01	1.018731	0.008731
3	0.3	1.029	1.040818	0.011818
4	0.4	1.0561	1.070320	0.014220
5	0.5	1.09049	1.106531	0.016041
6	0.6	1.131441	1.148812	0.017371
7	0.7	1.178297	1.196585	0.018288
8	0.8	1.230467	1.249329	0.018862
9	0.9	1.287420	1.306570	0.019150
10	1.0	1.348618	1.361879	0.019201

Εκτίμηση σφαλμάτων στη μέθοδο του Euler. Μας ενδιαφέρει η μέτρηση ακρίβειας (σφάλμα μεταξύ προσέγγισης, y^n , και πραγματικής τιμής $y(t^n)$)

$$\epsilon^n = y^n - y(t^n)$$

Το σφάλμα μπορεί να προέρχεται από:

- **Σφάλματα αποκοπής** (διακριτοποίησης), λόγω της τεχνικής που εφαρμόζεται.
- Σφάλματα λόγω πεπερασμένης ακρίβειας του υπολογιστή (**σφάλματα στρογγύλευσης**).

Εκτίμηση σφαλμάτων στη μέθοδο του Euler. Μας ενδιαφέρει η μέτρηση ακρίβειας (σφάλμα μεταξύ προσέγγισης, y^n , και πραγματικής τιμής $y(t^n)$)

$$\epsilon^n = y^n - y(t^n)$$

Το σφάλμα μπορεί να προέρχεται από:

- **Σφάλματα αποκοπής** (διακριτοποίησης), λόγω της τεχνικής που εφαρμόζεται.
- Σφάλματα λόγω πεπερασμένης ακρίβειας του υπολογιστή (**σφάλματα στρογγύλευσης**).

Το **(ολικό) σφάλμα αποκοπής (total truncation error)** αποτελείται από 2 μέρη:

- Το **τοπικό σφάλμα αποκοπής** (δηλ. το σφάλμα που γίνεται σε ένα βήμα).
- Το **διαδιδόμενο σφάλμα** αποκοπής (δηλ. συσσώρευση σφαλμάτων από προηγούμενα βήματα).

Εκτίμηση σφαλμάτων στη μέθοδο του Euler. Μας ενδιαφέρει η μέτρηση ακρίβειας (σφάλμα μεταξύ προσέγγισης, y^n , και πραγματικής τιμής $y(t^n)$)

$$\epsilon^n = y^n - y(t^n)$$

Το σφάλμα μπορεί να προέρχεται από:

- **Σφάλματα αποκοπής** (διακριτοποίησης), λόγω της τεχνικής που εφαρμόζεται.
- Σφάλματα λόγω πεπερασμένης ακρίβειας του υπολογιστή (**σφάλματα στρογγύλευσης**).

Το **(ολικό) σφάλμα αποκοπής (total truncation error)** αποτελείται από 2 μέρη:

- Το **τοπικό σφάλμα αποκοπής** (δηλ. το σφάλμα που γίνεται σε ένα βήμα).
- Το **διαδιδόμενο σφάλμα** αποκοπής (δηλ. συσσώρευση σφαλμάτων από προηγούμενα βήματα).

Το άθροισμα των δύο δίνει το **ολικό σφάλμα αποκοπής**

$$\text{Ολικό σφάλμα αποκοπής} = \text{Τοπικό σφάλμα} + \text{Διαδιδόμενο σφάλμα}$$

Υπολογισμός τοπικού σφάλματος.

Κάνοντας στη μέθοδο Euler ένα μόνο βήμα ξεκινώντας από το σημείο $(t^n, y(t^n))$ (δηλ. υποθέτουμε ότι ξέρουμε την πραγματική τιμή της y στο t^n), τότε το τοπικό σφάλμα δ^n στον υπολογισμό του y^{n+1} με τη μέθοδο Euler είναι:

$$\delta^n = \overbrace{\left[y(t^n) + hf\left(t^n, y(t^n)\right) \right]}^{y^{n+1}} - y(t^{n+1}), \quad (4)$$

Αναπτύσσοντας με Taylor το $y(t^{n+1})$

$$\delta^n = \overbrace{\left[y(t^n) + hf\left(t^n, y(t^n)\right) \right]}^{y^{n+1}} - \left[y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi^n) \right], \quad (5)$$

Συνεπώς

$$\delta^n = -\frac{h^2}{2}y''(\xi^n)$$

Δηλ. η τάξη του τοπικού σφάλματος όταν το $h \rightarrow 0$ είναι δύο, δηλ. $O(h^2)$.

Υπολογισμός ολικού σφάλματος.

Θεώρημα: Έστω το Π.Α.Τ. (2) και $y \in C^2[a, b]$ η λύση του. Αν $y^0, y^1, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος Euler με βήμα $h = (b - a)/N$, τότε ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)| \leq \frac{M}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) h = Ch \quad (6)$$

όπου L η σταθερά Lipshitz και $M = \max_{t \in [a, b]} |y''(t)|$.

Υπολογισμός ολικού σφάλματος.

Θεώρημα: Έστω το Π.Α.Τ. (2) και $y \in C^2[a, b]$ η λύση του. Αν $y^0, y^1, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος Euler με βήμα $h = (b - a)/N$, τότε ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)| \leq \frac{M}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) h = Ch \quad (6)$$

όπου L η σταθερά Lipshitz και $M = \max_{t \in [a, b]} |y''(t)|$.

- Παρατηρούμε ότι το φράγμα του ολικού σφάλματος είναι $O(h)$, για αυτό λέμε ότι **η τάξη ακρίβειας της μεθόδου Euler είναι ένα** (παρ'όλο που το τοπικό σφάλμα είναι $O(h^2)$).

Υπολογισμός ολικού σφάλματος.

Θεώρημα: Έστω το Π.Α.Τ. (2) και $y \in C^2[a, b]$ η λύση του. Αν $y^0, y^1, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος Euler με βήμα $h = (b - a)/N$, τότε ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)| \leq \frac{M}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) h = Ch \quad (6)$$

όπου L η σταθερά Lipshitz και $M = \max_{t \in [a, b]} |y''(t)|$.

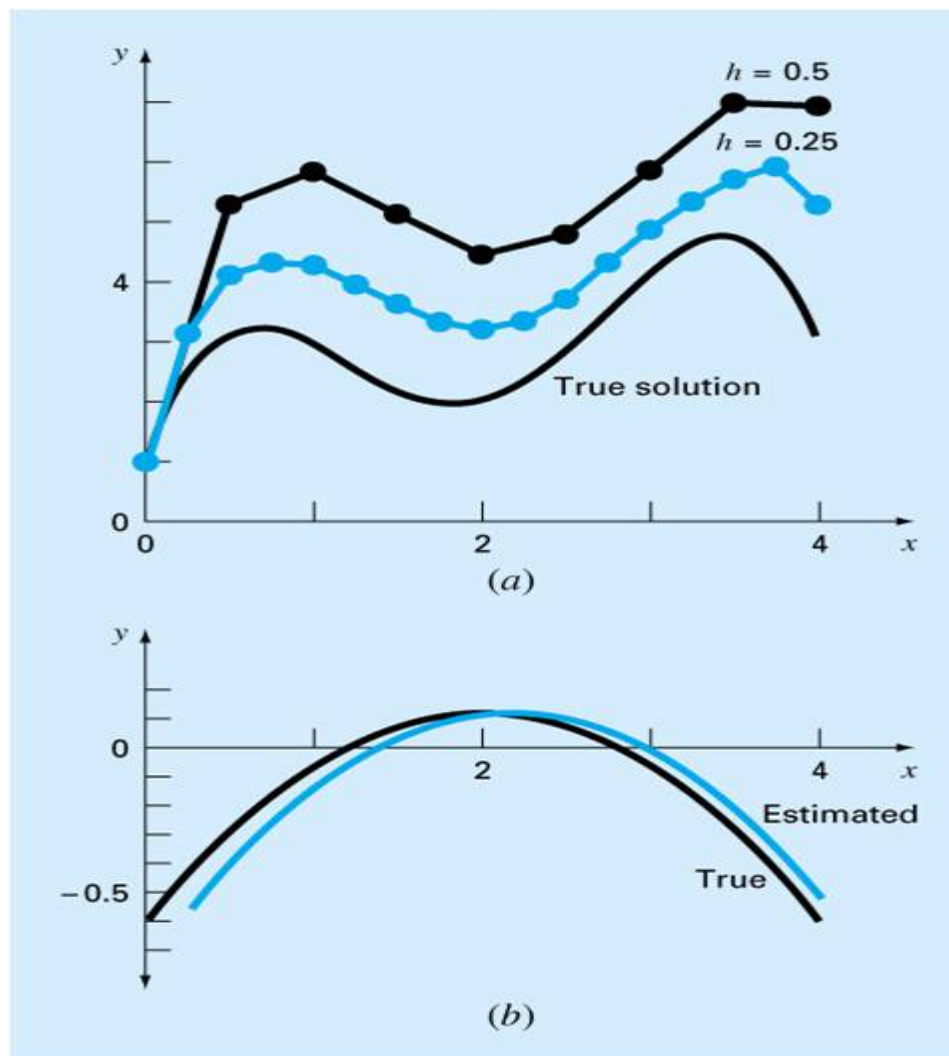
- Παρατηρούμε ότι το φράγμα του ολικού σφάλματος είναι $O(h)$, για αυτό λέμε ότι **η τάξη ακρίβειας της μεθόδου Euler είναι ένα** (παρ'όλο που το τοπικό σφάλμα είναι $O(h^2)$).
- Αποδεικνύεται επίσης ότι το ολικό σφάλμα στρογγύλευσης είναι $O(h)$.

Άσκηση: Με τη μέθοδο Euler να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. στο $x = 4$ για $h = 0.5$ και $h = 0.25$

$$y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5, \quad y(0) = 1$$

Άσκηση: Με τη μέθοδο Euler να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. στο $x = 4$ για $h = 0.5$ και $h = 0.25$

$$y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5, \quad y(0) = 1$$



Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Θεωρούμε το απλό Π.Α.Τ (δοκιμής)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y, & \lambda < 0, \quad t \in [0, \infty) \\ y(0) = 1 & \text{(αρχική συνθήκη)} \end{cases} \quad (7)$$

Η ακριβής λύση του (7) είναι $y(t) = e^{\lambda t}$ (και φθίνει εκθετικά καθώς $t \rightarrow \infty$.)

Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Θεωρούμε το απλό Π.Α.Τ (δοκιμής)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y, & \lambda < 0, \quad t \in [0, \infty) \\ y(0) = 1 & \text{(αρχική συνθήκη)} \end{cases} \quad (7)$$

Η ακριβής λύση του (7) είναι $y(t) = e^{\lambda t}$ (και φθίνει εκθετικά καθώς $t \rightarrow \infty$.)

Έστω $t^n = nh$ τότε η μέθοδος Euler δίνει

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n, & n \geq 0 \\ y^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow y^n = (1 + h\lambda)^n \quad (8)$$

Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Θεωρούμε το απλό Π.Α.Τ (δοκιμής)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y, & \lambda < 0, \quad t \in [0, \infty) \\ y(0) = 1 & \text{(αρχική συνθήκη)} \end{cases} \quad (7)$$

Η ακριβής λύση του (7) είναι $y(t) = e^{\lambda t}$ (και φθίνει εκθετικά καθώς $t \rightarrow \infty$.)

Έστω $t^n = nh$ τότε η μέθοδος Euler δίνει

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n, & n \geq 0 \\ y^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow y^n = (1 + h\lambda)^n \quad (8)$$

Τότε για t σταθερό, έστω $t = nh$, καθώς $h \rightarrow 0$ τότε $n \rightarrow \infty$

$$y^n = (1 + h\lambda)^n = \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n \rightarrow e^{\lambda t}, \quad \text{για } n \rightarrow \infty.$$

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Στη πράξη όμως οι υπολογισμοί γίνονται με μικρό αλλά θετικό h . Από την (8) έχουμε $|y^n| = |1 + h\lambda|^n$ καί συνεπώς καθώς $n \rightarrow \infty$ δηλ. καθώς $t^n = nh \rightarrow \infty$:

$$|y^n| \rightarrow 0, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| < 1,$$

$$|y^n| = 1, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| = 1, \quad (\text{λάθος συμπεριφορά})$$

$$|y^n| \rightarrow \infty, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| > 1, \quad (\text{αποκλίνει})$$

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Στη πράξη όμως οι υπολογισμοί γίνονται με μικρό αλλά θετικό h . Από την (8) έχουμε $|y^n| = |1 + h\lambda|^n$ καί συνεπώς καθώς $n \rightarrow \infty$ δηλ. καθώς $t^n = nh \rightarrow \infty$:

$$|y^n| \rightarrow 0, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| < 1,$$

$$|y^n| = 1, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| = 1, \quad (\text{λάθος συμπεριφορά})$$

$$|y^n| \rightarrow \infty, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| > 1, \quad (\text{αποκλίνει})$$

Συνεπώς οι προσεγγίσεις y^n μιμούνται τη λύση $y(t) = e^{\lambda t}$ μόνο όταν

$$|1 + \lambda h| < 1.$$

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Στη πράξη όμως οι υπολογισμοί γίνονται με μικρό αλλά θετικό h . Από την (8) έχουμε $|y^n| = |1 + h\lambda|^n$ καί συνεπώς καθώς $n \rightarrow \infty$ δηλ. καθώς $t^n = nh \rightarrow \infty$:

$$|y^n| \rightarrow 0, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| < 1,$$

$$|y^n| = 1, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| = 1, \quad (\text{λάθος συμπεριφορά})$$

$$|y^n| \rightarrow \infty, \quad \text{εφόσον} \quad |1 + \lambda h| > 1, \quad (\text{αποκλίνει})$$

Συνεπώς οι προσεγγίσεις y^n μιμούνται τη λύση $y(t) = e^{\lambda t}$ μόνο όταν

$$|1 + \lambda h| < 1.$$

Ορισμός 1: Λέμε ότι μια αριθμητική μέθοδος για τη λύση Π.Α.Τ. είναι **απόλυτα ευσταθής** για κάποιο $h > 0$, αν, όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής (7) δίνει προσεγγίσεις y^n που τείνουν στο 0 καθώς $n \rightarrow \infty$.

Το διάστημα I της μορφής $(\alpha, 0)$, τ.ω. η μέθοδος να είναι η μέθοδος απόλυτα ευσταθής για $\lambda h \in I$, λέγεται **διάστημα απόλυτης ευστάθειας** της μεθόδου.

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Άρα η μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής για $0 < h < \frac{-2}{\lambda}$, δηλ. το διάστημα απόλυτης ευστάθειάς της είναι το $I = (-2, 0)$.

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Άρα η μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής για $0 < h < \frac{-2}{\lambda}$, δηλ. το διάστημα απόλυτης ευστάθειάς της είναι το $I = (-2, 0)$.

Αν $|\lambda| \gg 1$ η συνθήκη $0 < h < \frac{-2}{\lambda}$ αποτελεί **σοβαρό περιορισμό** στο μέγιστο επιτρεπόμενο βήμα h για να πάρουμε αποδεκτές προσεγγίσεις y^n για το πρόβλημα δοκιμής.

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Άρα η μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής για $0 < h < \frac{-2}{\lambda}$, δηλ. το διάστημα απόλυτης ευστάθειάς της είναι το $I = (-2, 0)$.

Αν $|\lambda| \gg 1$ η συνθήκη $0 < h < \frac{-2}{\lambda}$ αποτελεί **σοβαρό περιορισμό** στο μέγιστο επιτρεπόμενο βήμα h για να πάρουμε αποδεκτές προσεγγίσεις y^n για το πρόβλημα δοκιμής.

Επέκταση του ορισμού απόλυτης ευστάθειας (λ μιγαδικός)

Θεωρούμε το Π.Α.Τ (δοκιμής)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y, & \lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} \lambda < 0, \quad t \in [0, \infty) \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (9)$$

του οποίου η λύση¹ είναι $y : [0, \infty] \rightarrow \mathbf{C}$ με $y(t) = e^{\lambda t}$ και

$$|y(t)| = e^{(\operatorname{Re} \lambda)t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

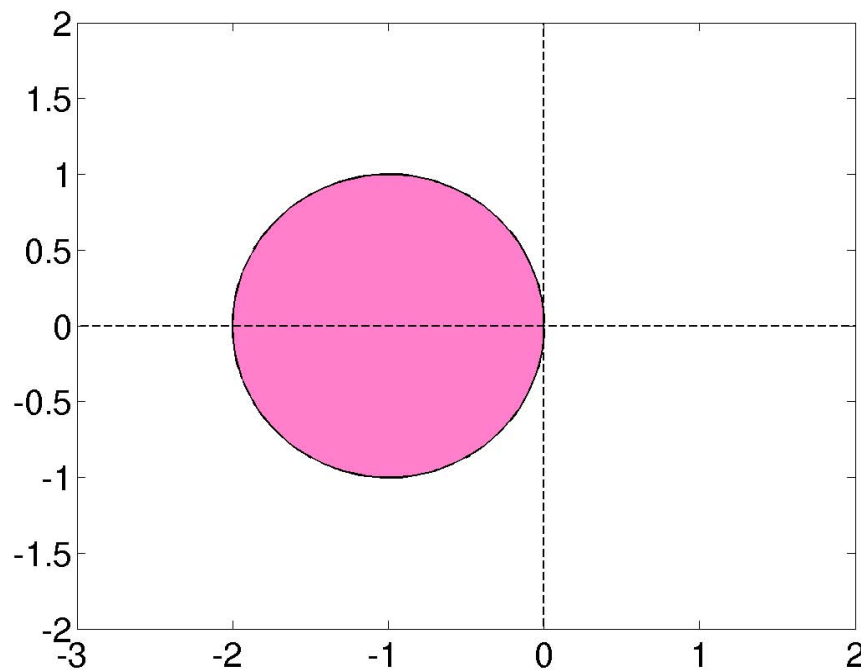
¹ $\frac{d}{dt}(e^{ibt}) = -b \sin(bt) + ib \cos(bt) = ib(\cos(bt) + i \sin(bt)) = ib(e^{ibt})$

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Ορισμός 2: Λέμε ότι μια αριθμητική μέθοδος για τη λύση του Π.Α.Τ (1) είναι **απόλυτα ευσταθής** για κάποιο $h > 0$, αν, όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής (9) δίνει προσεγγίσεις y^n τέτοιες ώστε $|y^n| \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Η περιοχή S του **μιγαδικού ημι-επιπέδου** $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, τ.ω. η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής αν $\lambda h \in S$, λέγεται **περιοχή απόλυτης ευστάθειας** της μεθόδου.

. . . Ευστάθεια της (άμεσης) μεθόδου του Euler

Ορισμός 2: Λέμε ότι μια αριθμητική μέθοδος για τη λύση του Π.Α.Τ (1) είναι **απόλυτα ευσταθής** για κάποιο $h > 0$, αν, όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής (9) δίνει προσεγγίσεις y^n τέτοιες ώστε $|y^n| \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Η περιοχή S του **μιγαδικού ημι-επιπέδου** $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, τ.ω. η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής αν $\lambda h \in S$, λέγεται **περιοχή απόλυτης ευστάθειας** της μεθόδου.



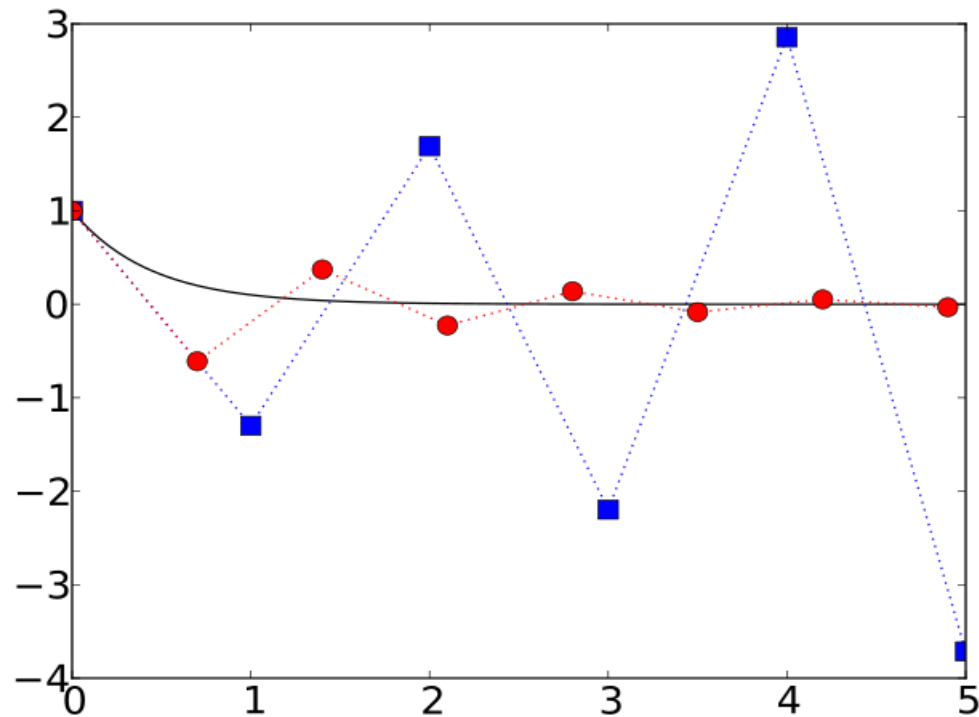
Η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου Euler στο μιγαδικό επίπεδο είναι

$$S = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < 0, |1 + z| < 1\}$$

δηλ. ο ανοικτός δίσκος $|1 + z|$ με ακτίνα 1 και κέντρο το -1 , ο οποίος περιέχεται ολόκληρος στο μιγαδικό ημι-επίπεδο.

Παράδειγμα I (αστάθειας/ευστάθειας)

$$\begin{cases} y'(t) = -2.3y, & t \in [0, \infty) \\ y(0) = 1, \end{cases}$$



Προσεγγίσεις Euler: Για $h = 1$ και $h = 0.7$, η μαύρη γραμμή είναι η ακριβής λύση.

Για ευστάθεια πρέπει $0 < h < 2/2.3 = 0.8696$.

Παράδειγμα II Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.
Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + f'(t) - \lambda f(t), & \lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} \lambda < 0, \quad t \in [0, \infty) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (10)$$

με λύση:

$$y(t) = f(t) + e^{\lambda t}[y(0) - f(0)]. \quad (11)$$

Παράδειγμα II Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + f'(t) - \lambda f(t), & \lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} \lambda < 0, \quad t \in [0, \infty) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (10)$$

με λύση:

$$y(t) = f(t) + e^{\lambda t}[y(0) - f(0)]. \quad (11)$$

Στη παραπάνω λύση αν η f δεν μεταβάλλεται γρήγορα με το t τότε ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους τείνει πολύ γρήγορα στο 0 και ο σημαντικός όρος είναι ο πρώτος.

Το Π.Α.Τ (10) είναι ένα τυπικό παράδειγμα **άκαμπτης (ή δύσκαμπτης) Διαφορικής Εξίσωσης**, χαρακτηριστικό της οποίας είναι ότι η λύση του μεταβάλλεται αργά με το t , όταν αυτό δεν βρίσκεται πολύ κοντά σε κάποια τιμή t_* , περιέχει όμως μία συνιστώσα η οποία μεταβάλλεται πολύ γρήγορα κοντά στο t_* , η οποία για t κοντά στο t_* δεν επηρεάζει καθόλου τη λύση. Στο παράδειγμα $t_* = 0$.

Από την (11) για $t = nh$ ισχύει (για τη **πραγματική λύση**)

$$y(t^{n+1}) = f(t^{n+1}) + e^{\lambda h}[y(t^n) - f(t^n)] \quad (12)$$

Η μέθοδος Euler για το Π.Α.Τ. (10) δίνει (**προσέγγιση**)

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + h[\lambda y^n + f'(t^n) - \lambda f(t^n)] \\ &= f(t^n) + hf'(t^n) + (1 + \lambda h)[y^n - f(t^n)] \end{aligned} \quad (13)$$

Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη των (12) και (13) έχουμε

$$f(t^{n+1}) = f(t^n) + hf'(t^n) + O(h^2)$$

και για τους άλλους όρους $|e^{\lambda h}| < 1$ γιατί $Re\lambda < 0$, ενώ η ανισότητα $|1 + \lambda h| \leq 1$ ισχύει μόνο αν το $\lambda h \in S$.

Από την (11) για $t = nh$ ισχύει (για τη **πραγματική λύση**)

$$y(t^{n+1}) = f(t^{n+1}) + e^{\lambda h}[y(t^n) - f(t^n)] \quad (12)$$

Η μέθοδος Euler για το Π.Α.Τ. (10) δίνει (**προσέγγιση**)

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + h[\lambda y^n + f'(t^n) - \lambda f(t^n)] \\ &= f(t^n) + hf'(t^n) + (1 + \lambda h)[y^n - f(t^n)] \end{aligned} \quad (13)$$

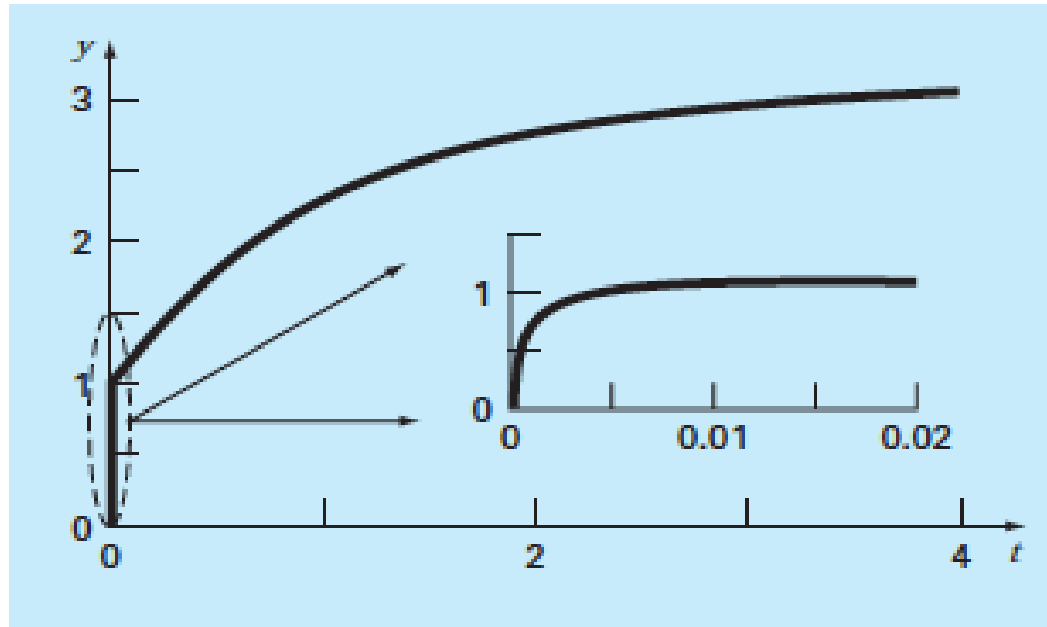
Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη των (12) και (13) έχουμε

$$f(t^{n+1}) = f(t^n) + hf'(t^n) + O(h^2)$$

και για τους άλλους όρους $|e^{\lambda h}| < 1$ γιατί $Re\lambda < 0$, ενώ η ανισότητα $|1 + \lambda h| \leq 1$ ισχύει μόνο αν το $\lambda h \in S$.

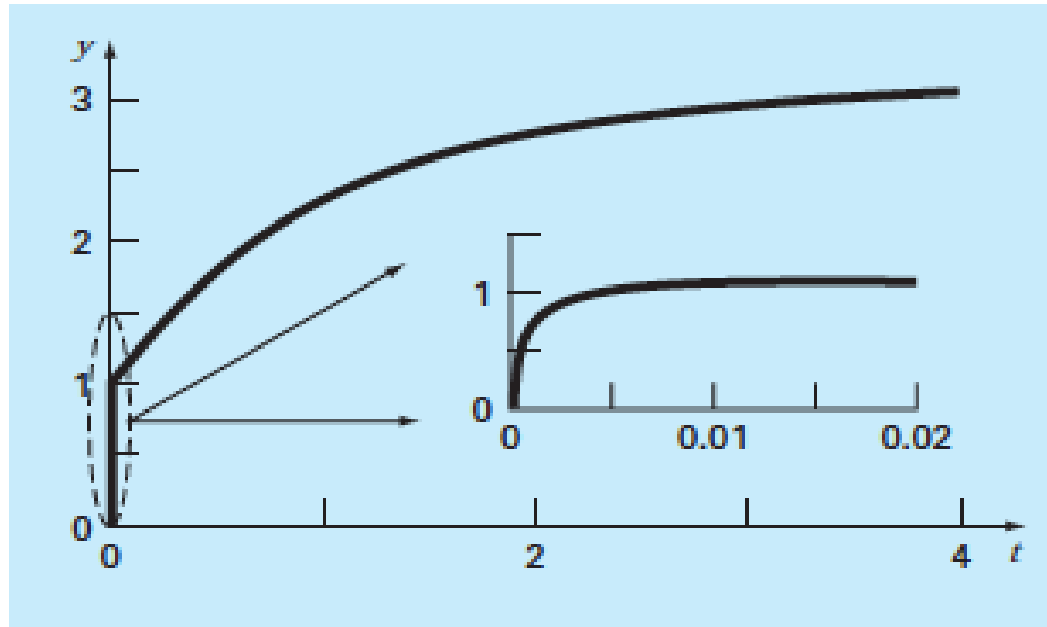
Στην (12) ο όρος $e^{\lambda h}[y(t^n) - f(t^n)]$, για t πολύ κοντά στο 0, παριστάνει απλώς μια μικρή διαταραχή αν όμως στη (13) το $|1 + \lambda h|$ γίνει μεγάλο ο αντίστοιχος όρος γίνεται πολύ μεγάλος.

Παράδειγμα: $y' = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}$, $y(0) = 0$ με λύση
 $y(t) = 3 - 0.998e^{-1000t} - 2.002e^{-t}$



Η λύση αρχικά καθορίζεται από τον πολύ γρήγορο εκθετικό όρο e^{-1000t} και μετά από μία μικρή περίοδο ($t < 0.005$) αυτός ο όρος γίνεται πάρα πολύ μικρός και η λύση καθορίζεται από τον αργό όρο e^{-t} .

Παράδειγμα: $y' = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}$, $y(0) = 0$ με λύση
 $y(t) = 3 - 0.998e^{-1000t} - 2.002e^{-t}$



Η λύση αρχικά καθορίζεται από τον πολύ γρήγορο εκθετικό όρο e^{-1000t} και μετά από μία μικρή περίοδο ($t < 0.005$) αυτός ο όρος γίνεται πάρα πολύ μικρός και η λύση καθορίζεται από τον αργό όρο e^{-t} .

- Σκοπός μας είναι να αναζητήσουμε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση του Π.Α.Τ. (10), οι οποίες να έχουν **μεγάλες περιοχές απόλυτης ευστάθειας**.
- Μέθοδοι των οποίων η περιοχή απόλυτης ευστάθειας περιέχει **ολόκληρο το αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο** λέγονται **A-ευσταθείς**.

Η πεπλεγμένη (ρητή) μέθοδος του Euler

Προσεγγίζοντας την παράγωγο $y'(t^n)$ με **πηλίκο προς τα πίσω διαφορών** (βλ. αριθμητική διαφορίση)

$$y'(t^n) \approx \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}$$

υποθέτοντας τώρα ότι το y^n είναι μια καλή προσέγγιση του $y(t^n)$ έχουμε

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{h} = f(t^n, y^n)$$

και οδηγούμαστε στη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler

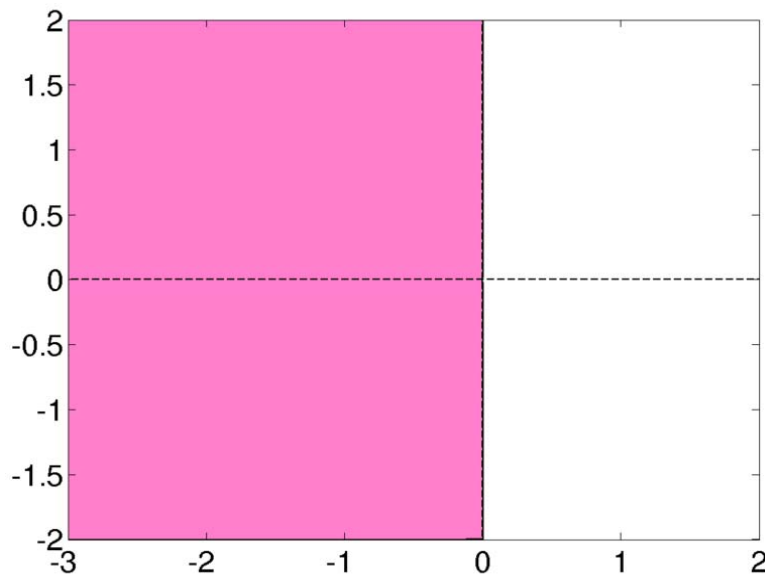
$$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (14)$$

. . . Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

- Για να υπολογιστεί η (μοναδική) προσέγγιση y^{n+1} από τη (14) απαιτείται η **λύση μίας μή γραμμικής εξίσωσης** (βλ. Κεφ. 2) με $x = y^{n+1}$. Η συνάρτηση $\phi(x) = y^n + f(t^{n+1}, x)$ είναι συστολή στο $\mathbf{R}$ και έχει μοναδικό σταθερό σημείο το y^{n+1} , συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί (για λίγα βήματα) η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = \phi(x_k)$ με $x_0 = y^n$, και να δώσει καλή προσέγγιση της ρίζας $x^* = y^{n+1}$.

. . . Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

- Για να υπολογιστεί η (μοναδική) προσέγγιση y^{n+1} από τη (14) απαιτείται η **λύση μίας μή γραμμικής εξίσωσης** (βλ. Κεφ. 2) με $x = y^{n+1}$. Η συνάρτηση $\phi(x) = y^n + f(t^{n+1}, x)$ είναι συστολή στο $\mathbf{R}$ και έχει μοναδικό σταθερό σημείο το y^{n+1} , συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί (για λίγα βήματα) η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = \phi(x_k)$ με $x_0 = y^n$, και να δώσει καλή προσέγγιση της ρίζας $x^* = y^{n+1}$.
- Εάν εφαρμόσουμε την μέθοδο (14) στο πρόβλημα δοκιμής (9) τότε οι προσεγγίσεις τις λύσης δίνονται ως $y^n = \frac{1}{(1-\lambda h)^n}$.



Η περιοχή απόλυτης ευστάθειας είναι όλο το αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο γιατί $|1 - \lambda h| \geq 1$, αφού $Re\lambda \leq 0$.

Άρα η πεπλεγμένη μέθοδος Euler είναι A-ευσταθής.

Παρατηρήσεις

- Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler έχει καλύτερες ιδιότητες ευστάθειας και είναι κατάλληλη για επίλυση άκαμπτων μή-γραμμικών προβλημάτων.

Παρατηρήσεις

- Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler έχει καλύτερες ιδιότητες ευστάθειας και είναι κατάλληλη για επίλυση άκαμπτων μή-γραμμικών προβλημάτων.
- Για τον υπολογισμό της λύσης y^{n+1} μπορούν να εφαρμοστούν μέθοδοι επίλυσης μή-γραμμικών εξισώσεων όπως η μέθοδος σταθερού σημείου ή η μέθοδος Newton-Raphson.

Παρατηρήσεις

- Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler έχει καλύτερες ιδιότητες ευστάθειας και είναι κατάλληλη για επίλυση άκαμπτων μή-γραμμικών προβλημάτων.
- Για τον υπολογισμό της λύσης y^{n+1} μπορούν να εφαρμοστούν μέθοδοι επίλυσης μή-γραμμικών εξισώσεων όπως η μέθοδος σταθερού σημείου ή η μέθοδος Newton-Raphson.
- Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler έχει και αυτή, όπως μπορεί να αποδειχθεί, **τάξη ακρίβειας ίση με ένα**, δηλ. ισχύει η εκτίμηση ολικού σφάλματος της μορφής:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)| \leq Ch$$

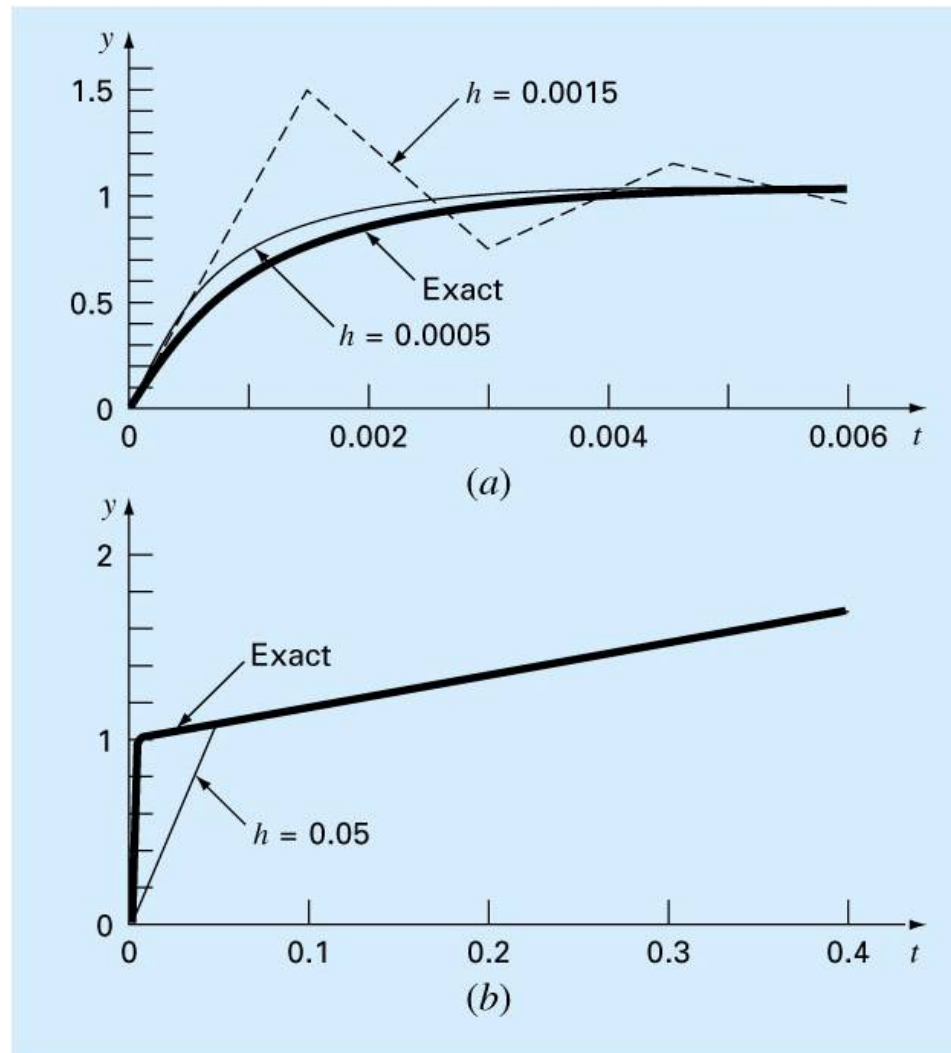
για κάποια σταθερά C ανεξάρτητη του h .

Άσκηση: Με τις μεθόδους (a) Euler και (b) πεπλεγμένη Euler να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. για διαφορες τιμές του h

$$y'(t) = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}, \quad y(0) = 0$$

Άσκηση: Με τις μεθόδους (a) Euler και (b) πεπλεγμένη Euler να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. για διαφορες τιμές του h

$$y'(t) = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}, \quad y(0) = 0$$



Άσκηση: Με τη πεπλεγμένη Euler να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ.
για $t = \pi$ με $h = \pi/2$

$$y'(t) = \sin(y), \quad y(0) = y^0 = 1$$

Άσκηση: Με τη πεπλεγμένη Euler να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. για $t = \pi$ με $h = \pi/2$

$$y'(t) = \sin(y), \quad y(0) = y^0 = 1$$

Λύση

$$y^1 = y^0 + h \cdot \sin(y^1) = 1 + \frac{\pi}{2} \sin(y^1),$$

άρα έχουμε με $x = y^1$ να λύσουμε την $g(x) = x - 1 - \frac{\pi}{2} \sin(x) = 0$, π.χ. με τη **μέθοδο σταθερού σημείου** $x_{k+1} = \phi(x_k)$ με $x_0 = 1$ έχουμε (αν η $\phi(x) = 1 + 0.5\pi \sin(x)$ ικανοποιεί το Θ. συστολής)

$$x_1 = 1 + 0.5\pi \sin(x_0) \approx 2.3218$$

$$x_2 = 1 + 0.5\pi \sin(x_1) \approx 2.1483$$

.....

$$x^* \approx 2.2359 = y^1 \quad (\text{ακριβής τιμή } y(\pi/2) = 2.414)$$

Άσκηση: Με τη πεπλεγμένη Euler να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. για $t = \pi$ με $h = \pi/2$

$$y'(t) = \sin(y), \quad y(0) = y^0 = 1$$

Λύση

$$y^1 = y^0 + h \cdot \sin(y^1) = 1 + \frac{\pi}{2} \sin(y^1),$$

άρα έχουμε με $x = y^1$ να λύσουμε την $g(x) = x - 1 - \frac{\pi}{2} \sin(x) = 0$, π.χ. με τη **μέθοδο σταθερού σημείου** $x_{k+1} = \phi(x_k)$ με $x_0 = 1$ έχουμε (αν η $\phi(x) = 1 + 0.5\pi \sin(x)$ ικανοποιεί το Θ. συστολής)

$$x_1 = 1 + 0.5\pi \sin(x_0) \approx 2.3218$$

$$x_2 = 1 + 0.5\pi \sin(x_1) \approx 2.1483$$

.....

$$x^* \approx 2.2359 = y^1 \quad (\text{ακριβής τιμή } y(\pi/2) = 2.414)$$

Το δεύτερο βήμα: $y^2 = y^1 + h \cdot \sin(y^2) = 2.2359 + \frac{\pi}{2} \sin(y^2)$

Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $g(x) = x - 2.2359 - \frac{\pi}{2} \sin(x) = 0$, έστω
τώρα με τη μέθοδο Newton-Raphson: $x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$, $x_0 = 2.2359$,

Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $g(x) = x - 2.2359 - \frac{\pi}{2} \sin(x) = 0$, έστω
τώρα με τη μέθοδο Newton-Raphson: $x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$, $x_0 = 2.2359$,

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2.2359 - \frac{-1.5708 \sin(2.2359)}{1 - 1.5708 \cos(2.1359)} \approx 2.86349$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = \dots \approx 2.78527$$

$$x_3 \approx 2.78469 \quad \dots \quad x_4 \approx 2.78469$$

Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $g(x) = x - 2.2359 - \frac{\pi}{2} \sin(x) = 0$, έστω
τώρα με τη μέθοδο Newton-Raphson: $x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$, $x_0 = 2.2359$,

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2.2359 - \frac{-1.5708 \sin(2.2359)}{1 - 1.5708 \cos(2.1359)} \approx 2.86349$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = \dots \approx 2.78527$$

$$x_3 \approx 2.78469 \quad \dots \quad x_4 \approx 2.78469$$

Αρα

$$y^2 \approx 2.78469 (\approx y(\pi) = 2.983).$$

Η μέθοδος Euler για συστήματα Δ.Ε.

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Η μέθοδος Euler για συστήματα Δ.Ε.

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Παράδειγμα: οι εξισώσεις

$$x_1'(t) = 2tx_1 + e^t x_2 + t^2 = f_1(t, x_1, x_2)$$

$$x_2'(t) = \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t = f_2(t, x_1, x_2)$$

Η μέθοδος Euler για συστήματα Δ.Ε.

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Παράδειγμα: οι εξισώσεις

$$x_1'(t) = 2tx_1 + e^t x_2 + t^2 = f_1(t, x_1, x_2)$$

$$x_2'(t) = \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t = f_2(t, x_1, x_2)$$

Γράφονται στη μορφή

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ 1/t & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος Euler για συστήματα Δ.Ε.

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t) \quad \text{ή} \quad \vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}$$

Η λύση είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ που ικανοποιεί το σύστημα.

Παράδειγμα: οι εξισώσεις

$$x_1'(t) = 2tx_1 + e^t x_2 + t^2 = f_1(t, x_1, x_2)$$

$$x_2'(t) = \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t = f_2(t, x_1, x_2)$$

Γράφονται στη μορφή

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ 1/t & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$$

- Αν $\vec{g} = \vec{0}$ το σύστημα λέγεται **ομογενές**
- Αν ο $\mathbf{A}$ ανεξάρτητος από το t τότε έχει **σταθερούς συντελεστές**

Παράδειγμα (ομογενές γραμμικό με σταθερούς συντελεστές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Παράδειγμα (ομογενές γραμμικό με σταθερούς συντελεστές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$

Παράδειγμα (ομογενές γραμμικό με σταθερούς συντελεστές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (ομογενές γραμμικό με σταθερούς συντελεστές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Έχει λύσεις τις

$$x_1(t) = c_1 e^t \quad \text{και} \quad x_2(t) = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$$

Παράδειγμα (ομογενές γραμμικό με σταθερούς συντελεστές σύστημα)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

Με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Έχει λύσεις τις

$$x_1(t) = c_1 e^t \quad \text{και} \quad x_2(t) = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2}e^t & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(0)\vec{c} = \vec{x}(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος Euler δίνει

$$x_1^{n+1} = x_1^n + h f_1(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + h f_2(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

Η μέθοδος Euler δίνει

$$x_1^{n+1} = x_1^n + hf_1(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + hf_2(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα για $h = 0.5$ (για 3 βήματα της μεθόδου)

$$x_1^1 = x_1^0 + 0.5f_1(t^0, x_1^0, x_2^0) = 1 + 0.5 \cdot 1 = 1.5$$

$$x_2^1 = x_2^0 + 0.5f_2(t^0, x_1^0, x_2^0) = 2 + 0.5 \cdot (1 - 2) = 1.5$$

Η μέθοδος Euler δίνει

$$x_1^{n+1} = x_1^n + h f_1(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + h f_2(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα για $h = 0.5$ (για 3 βήματα της μεθόδου)

$$x_1^1 = x_1^0 + 0.5 f_1(t^0, x_1^0, x_2^0) = 1 + 0.5 \cdot 1 = 1.5$$

$$x_2^1 = x_2^0 + 0.5 f_2(t^0, x_1^0, x_2^0) = 2 + 0.5 \cdot (1 - 2) = 1.5$$

$$x_1^2 = x_1^1 + 0.5 f_1(t^1, x_1^1, x_2^1) = 1.5 + 0.5 \cdot 1.5 = 2.25$$

$$x_2^2 = x_2^1 + 0.5 f_2(t^1, x_1^1, x_2^1) = 1.5 + 0.5 \cdot (1.5 - 1.5) = 1.5$$

Η μέθοδος Euler δίνει

$$x_1^{n+1} = x_1^n + h f_1(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + h f_2(t^n, x_1^n, x_2^n)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα για $h = 0.5$ (για 3 βήματα της μεθόδου)

$$x_1^1 = x_1^0 + 0.5 f_1(t^0, x_1^0, x_2^0) = 1 + 0.5 \cdot 1 = 1.5$$

$$x_2^1 = x_2^0 + 0.5 f_2(t^0, x_1^0, x_2^0) = 2 + 0.5 \cdot (1 - 2) = 1.5$$

$$x_1^2 = x_1^1 + 0.5 f_1(t^1, x_1^1, x_2^1) = 1.5 + 0.5 \cdot 1.5 = 2.25$$

$$x_2^2 = x_2^1 + 0.5 f_2(t^1, x_1^1, x_2^1) = 1.5 + 0.5 \cdot (1.5 - 1.5) = 1.5$$

$$x_1^3 = x_1^2 + 0.5 f_1(t^2, x_1^2, x_2^2) = 2.25 + 0.5 \cdot 2.25 = 3.375$$

$$x_2^3 = x_2^2 + 0.5 f_2(t^2, x_1^2, x_2^2) = 1.5 + 0.5 \cdot (2.25 - 1.5) = 1.875$$

Η πεπλεγμένη μέθοδος Euler δίνει

$$x_1^{n+1} = x_1^n + h f_1(t^{n+1}, x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + h f_2(t^{n+1}, x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$$

Η πεπλεγμένη μέθοδος Euler δίνει

$$x_1^{n+1} = x_1^n + h f_1(t^{n+1}, x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + h f_2(t^{n+1}, x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα για $h = 0.5$ (για το πρώτο βήμα)

$$x_1^1 = x_1^0 + 0.5 f_1(t^1, x_1^1, x_2^1) = 1 + 0.5 \cdot x_1^1 \Rightarrow x_1^1 = 2$$

$$x_2^1 = x_2^0 + 0.5 f_2(t^1, x_1^1, x_2^1) = 2 + 0.5 \cdot (x_1^1 - x_2^1) \Rightarrow x_2^1 = 2$$

βάζοντας το x_1^1 που υπολογίσαμε στη δεύτερη εξίσωση. Όμως, γενικά, για ομογενές (γραμμικό) σύστημα Δ.Ε.

Η πεπλεγμένη μέθοδος Euler δίνει

$$x_1^{n+1} = x_1^n + h f_1(t^{n+1}, x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + h f_2(t^{n+1}, x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα για $h = 0.5$ (για το πρώτο βήμα)

$$x_1^1 = x_1^0 + 0.5 f_1(t^1, x_1^1, x_2^1) = 1 + 0.5 \cdot x_1^1 \Rightarrow x_1^1 = 2$$

$$x_2^1 = x_2^0 + 0.5 f_2(t^1, x_1^1, x_2^1) = 2 + 0.5 \cdot (x_1^1 - x_2^1) \Rightarrow x_2^1 = 2$$

βάζοντας το x_1^1 που υπολογίσαμε στη δεύτερη εξίσωση. Όμως, γενικά, για ομογενές (γραμμικό) σύστημα Δ.Ε.

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h \cdot \mathbf{A}(t^{n+1}) \vec{x}^{n+1} \Rightarrow (\mathbf{I} - h \mathbf{A}(t^{n+1})) \vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n$$

δηλ. έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων της μορφής $\mathbf{B} \vec{x} = \vec{b}$ σε κάθε βήμα.

Παράδειγμα (ποιό γενική περίπτωση συστήματος 3 γραμμικών Δ.Ε.)

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t & t^2 \\ t^3 & -1 & t \\ e^{-t} & 2 & -t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{g}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}^0$$

Παράδειγμα (ποιά γενική περίπτωση συστήματος 3 γραμμικών Δ.Ε.)

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t & t^2 \\ t^3 & -1 & t \\ e^{-t} & 2 & -t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{g}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}^0$$

- Η μέθοδος Euler γράφεται ως:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h \cdot [\mathbf{A}(t^n)\vec{x}^n + \vec{g}(t^n)]$$

Παράδειγμα (ποιό γενική περίπτωση συστήματος 3 γραμμικών Δ.Ε.)

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t & t^2 \\ t^3 & -1 & t \\ e^{-t} & 2 & -t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{g}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}^0$$

- Η μέθοδος Euler γράφεται ως:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h \cdot [\mathbf{A}(t^n)\vec{x}^n + \vec{g}(t^n)]$$

- Η πεπλεγμένη μέθοδος Euler γράφεται ως:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h \cdot [\mathbf{A}(t^{n+1})\vec{x}^{n+1} + \vec{g}(t^{n+1})] \Rightarrow$$

$$[\mathbf{I} - h \cdot \mathbf{A}(t^{n+1})] \vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h\vec{g}(t^{n+1})$$

Παράδειγμα (ποιό γενική περίπτωση συστήματος 3 γραμμικών Δ.Ε.)

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2t & e^t & t^2 \\ t^3 & -1 & t \\ e^{-t} & 2 & -t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{g}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}^0$$

- Η μέθοδος Euler γράφεται ως:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h \cdot [\mathbf{A}(t^n)\vec{x}^n + \vec{g}(t^n)]$$

- Η πεπλεγμένη μέθοδος Euler γράφεται ως:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h \cdot [\mathbf{A}(t^{n+1})\vec{x}^{n+1} + \vec{g}(t^{n+1})] \Rightarrow$$

$$[\mathbf{I} - h \cdot \mathbf{A}(t^{n+1})] \vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + h\vec{g}(t^{n+1})$$

- Σε περίπτωση που έχουμε μη-γραμμικό σύστημα Δ.Ε., τότε πρέπει να λυθεί ένα **μή-γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων** σε κάθε βήμα (βλ. ΚΕΦ. 2) για την πεπλεγμένη Euler.