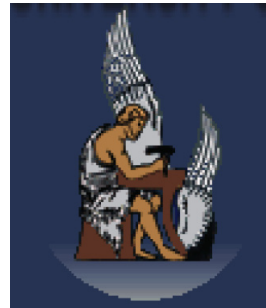


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 16η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ GAUSS

Η ολοκλήρωση κατά Gauss βασίζεται στην **αναζήτηση μιας προνομιούχου κατανομής** των κόμβων $x_i, i = 1, \dots, n$ του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ τ.ω. ο αντίστοιχος κανόνας ολοκλήρωσης

$$Q_n = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ GAUSS

Η ολοκλήρωση κατά Gauss βασίζεται στην **αναζήτηση μιας προνομιούχου κατανομής** των κόμβων $x_i, i = 1, \dots, n$ του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ τ.ω. ο αντίστοιχος κανόνας ολοκλήρωσης

$$Q_n = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

Παρατηρήσεις

- Στην ολοκλήρωση Gauss οι κόμβοι x_i δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο $[a, b]$.

ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ GAUSS

Η ολοκλήρωση κατά Gauss βασίζεται στην **αναζήτηση μιας προνομιούχου κατανομής** των κόμβων $x_i, i = 1, \dots, n$ του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ τ.ω. ο αντίστοιχος κανόνας ολοκλήρωσης

$$Q_n = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

Παρατηρήσεις

- Στην ολοκλήρωση Gauss οι κόμβοι x_i δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο $[a, b]$.
- Οι **άγνωστοι** τώρα είναι τα βάρη w_i αλλά και οι κόμβοι x_i .

ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ GAUSS

Η ολοκλήρωση κατά Gauss βασίζεται στην **αναζήτηση μιας προνομιούχου κατανομής** των κόμβων $x_i, i = 1, \dots, n$ του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ τ.ω. ο αντίστοιχος κανόνας ολοκλήρωσης

$$Q_n = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

Παρατηρήσεις

- Στην ολοκλήρωση Gauss οι κόμβοι x_i δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο $[a, b]$.
- Οι **άγνωστοι** τώρα είναι τα βάρη w_i αλλά και οι κόμβοι x_i .
- Οι τύποι ολοκλήρωσης Gauss με n κόμβους **ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα βαθμού $\leq 2n - 1$** (δηλ. μέχρι $2n - 1$ βαθμού).

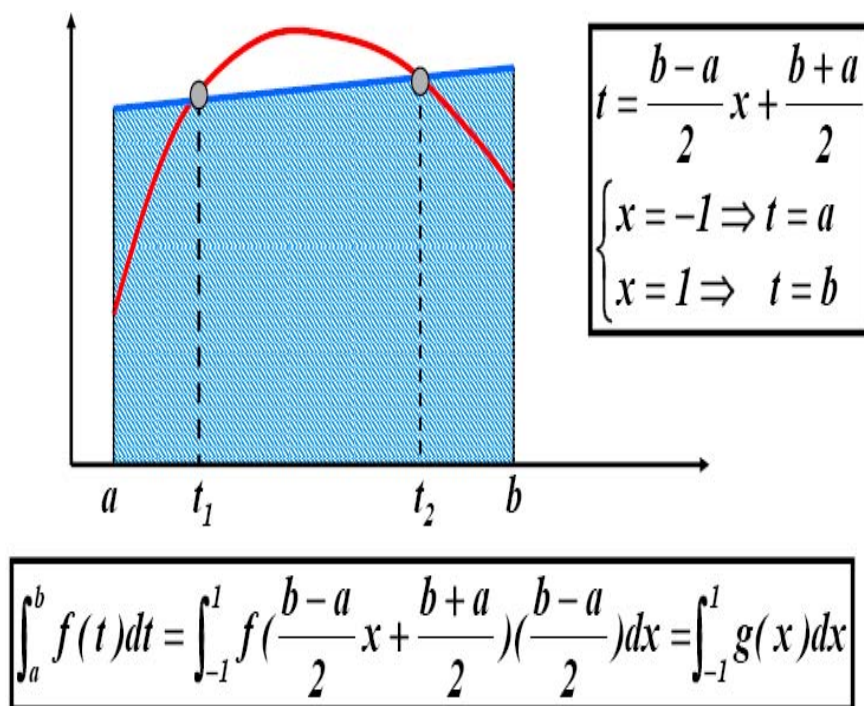
Αν είναι γνωστός ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss σ' ένα διάστημα, εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τύπο Gauss (με το ίδιο πλήθος κόμβων) σ' ένα άλλο διάστημα.

Αν είναι γνωστός ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss σ' ένα διάστημα, εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τύπο Gauss (με το ίδιο πλήθος κόμβων) σ' ένα άλλο διάστημα.

- Έστω ότι γνωρίζουμε τον τύπο στο $[-1, 1]$ για τον υπολογισμό του $I(g) = \int_{-1}^1 g(x)dx$ και θέλουμε τον αντίστοιχο στο $[a, b]$, τότε, με αλλαγή μεταβλητής

Αν είναι γνωστός ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss σ' ένα διάστημα, εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τύπο Gauss (με το ίδιο πλήθος κόμβων) σ' ένα άλλο διάστημα.

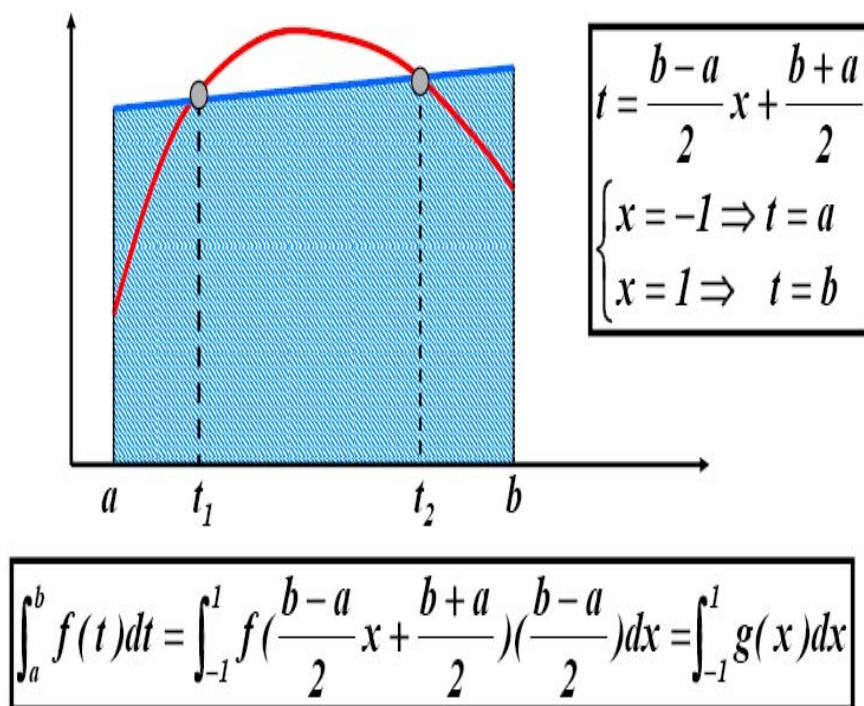
- Έστω ότι γνωρίζουμε τον τύπο στο $[-1, 1]$ για τον υπολογισμό του $I(g) = \int_{-1}^1 g(x)dx$ και θέλουμε τον αντίστοιχο στο $[a, b]$, τότε, με αλλαγή μεταβλητής



Αν είναι γνωστός ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss σ' ένα διάστημα, εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τύπο Gauss (με το ίδιο πλήθος κόμβων) σ' ένα άλλο διάστημα.

- Έστω ότι γνωρίζουμε τον τύπο στο $[-1, 1]$ για τον υπολογισμό του $I(g) = \int_{-1}^1 g(x)dx$ και θέλουμε τον αντίστοιχο στο $[a, b]$, τότε, με αλλαγή μεταβλητής

Ο τύπος ολοκλήρωσης στο $[a, b]$

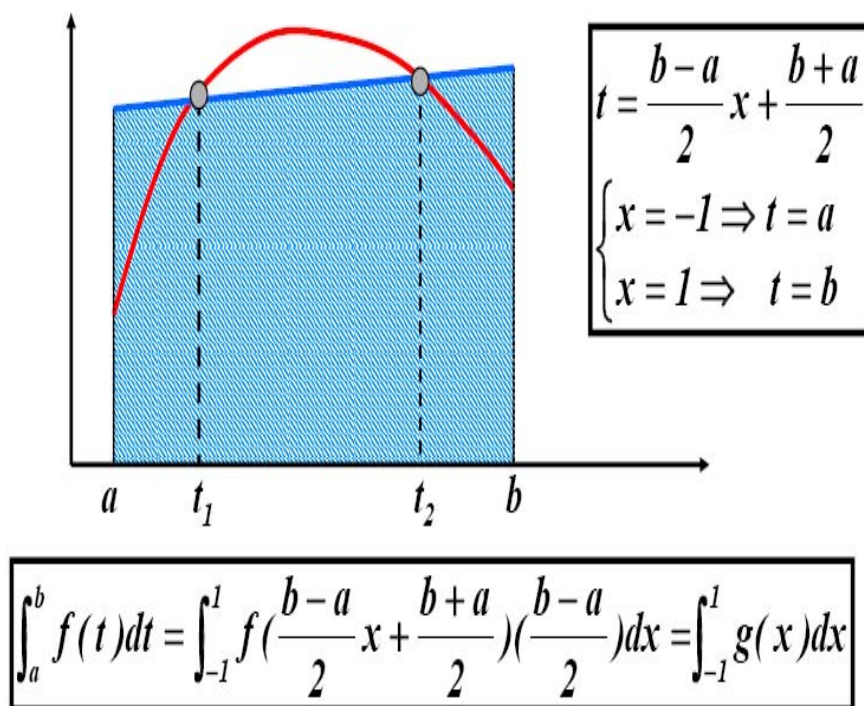


$$\tilde{Q}_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

Αν είναι γνωστός ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss σ' ένα διάστημα, εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τύπο Gauss (με το ίδιο πλήθος κόμβων) σ' ένα άλλο διάστημα.

- Έστω ότι γνωρίζουμε τον τύπο στο $[-1, 1]$ για τον υπολογισμό του $I(g) = \int_{-1}^1 g(x)dx$ και θέλουμε τον αντίστοιχο στο $[a, b]$, τότε, με αλλαγή μεταβλητής

Ο τύπος ολοκλήρωσης στο $[a, b]$



$$\tilde{Q}_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

Υπολογισμός τύπων ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$

Έστω ότι ολοκλήρωμα $I(f)$ προσεγγίζεται με τύπο ολοκλήρωσης Gauss Q_n

$$I(f) \approx Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Υπολογισμός τύπων ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$

Έστω ότι ολοκλήρωμα $I(f)$ προσεγγίζεται με τύπο ολοκλήρωσης Gauss Q_n

$$I(f) \approx Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Ζητάμε να προσδιορίσουμε τα **βάρη** και τους **κόμβους** ώστε ο τύπος Q_n να είναι **ακριβής για όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq 2n - 1$** .

Δηλ. αν $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1}$ τότε, $\forall$ πολυώνυμο βαθμού $\leq 2n - 1$.

$$R_n = \int_{-1}^1 f(x) dx - Q_n(f) = 0,$$

Υπολογισμός τύπων ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$

Έστω ότι ολοκλήρωμα $I(f)$ προσεγγίζεται με τύπο ολοκλήρωσης Gauss Q_n

$$I(f) \approx Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Ζητάμε να προσδιορίσουμε τα **βάρη** και τους **κόμβους** ώστε ο τύπος Q_n να είναι **ακριβής για όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq 2n - 1$** .

Δηλ. αν $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1}$ τότε, $\forall$ πολυώνυμο βαθμού $\leq 2n - 1$.

$$R_n = \int_{-1}^1 f(x) dx - Q_n(f) = 0,$$

Αν χρησιμοποιήσουμε σαν βάση των πολυώνυμων τις συναρτήσεις

$\phi_j(x) = x^j, j = 0, 1, \dots, 2n - 1$ από τη παραπάνω σχέση έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i^j = \int_{-1}^1 x^j dx, \quad j = 0, \dots, 2n - 1 \quad (2)$$

Τύπος ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$ για $n = 1$

Ο τύπος είναι $Q_1 = w_1 f(x_1)$ και θέλουμε να είναι ακριβής για **γραμμικά** πολυώνυμα.

Από την (2) και για $j = 0, 1$ έχουμε

$$w_1 \cdot 1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 2 \quad (3)$$

$$w_1 \cdot x_1 = \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad (4)$$

Τύπος ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$ για $n = 1$

Ο τύπος είναι $Q_1 = w_1 f(x_1)$ και θέλουμε να είναι ακριβής για **γραμμικά** πολυώνυμα.

Από την (2) και για $j = 0, 1$ έχουμε

$$w_1 \cdot 1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 2 \quad (3)$$

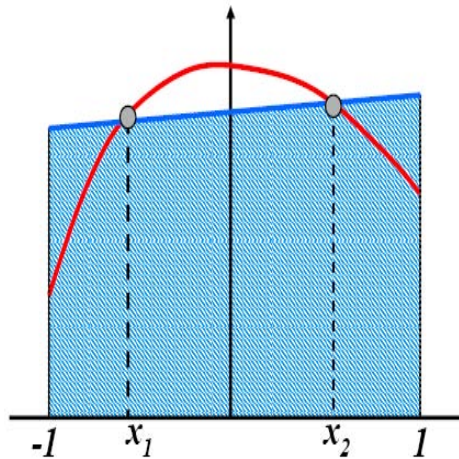
$$w_1 \cdot x_1 = \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad (4)$$

Άρα

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0) \quad (\text{κανόνας του μέσου})$$

Τύπος ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$ για $n = 2$

Ο τύπος είναι $Q_1 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$ και θέλουμε να είναι ακριβής για **κυβικά** πολυώνυμα. Από την (6) και για $j = 0, 1, 2, 3$ έχουμε το σύστημα



$$w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \quad \Rightarrow \quad w_1 + w_2 = 2$$

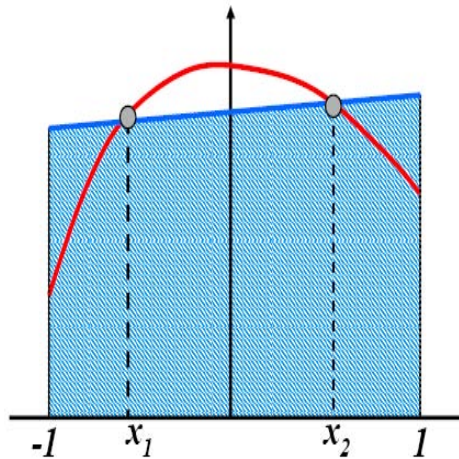
$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$$

$$w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0$$

Τύπος ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$ για $n = 2$

Ο τύπος είναι $Q_1 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$ και θέλουμε να είναι ακριβής για **κυβικά** πολυώνυμα. Από την (6) και για $j = 0, 1, 2, 3$ έχουμε το σύστημα



$$w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \quad \Rightarrow \quad w_1 + w_2 = 2$$

$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$$

$$w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

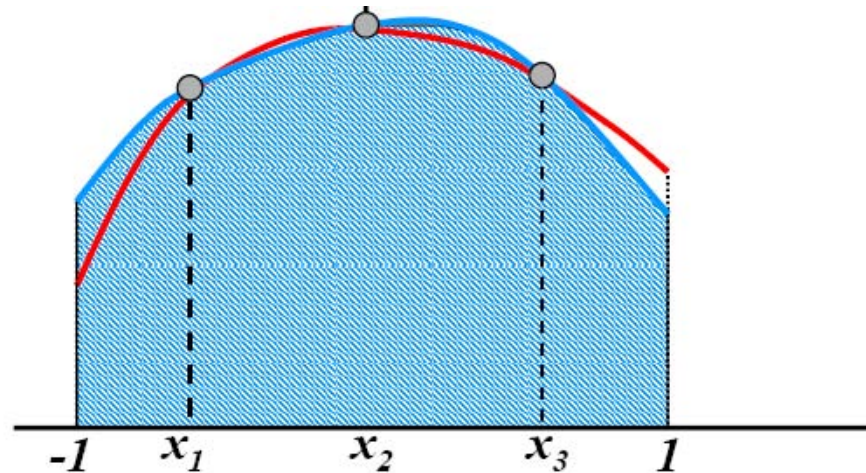
$$w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0$$

Λύνοντας έχουμε $w_1 = w_2 = 1$ και $x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ συνεπώς

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

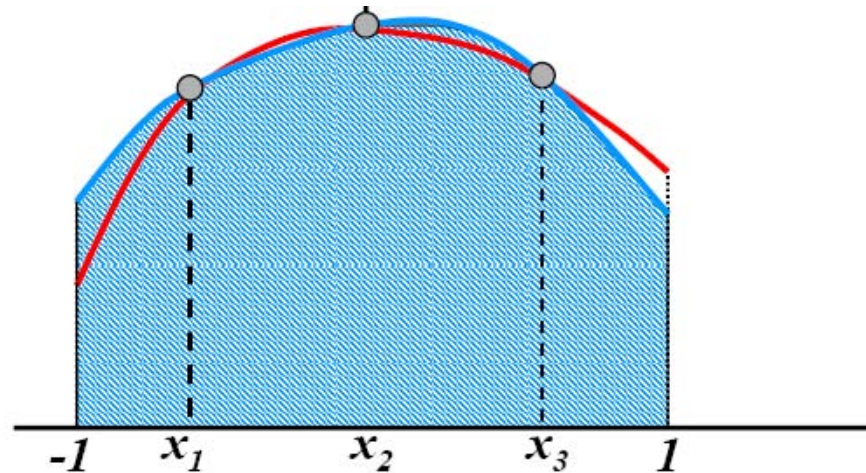
Τύπος ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$ για $n = 3$

Ο τύπος είναι $Q_1 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$ και θέλουμε να είναι ακριβής για πολυώνυμα **5ου βαθμού**.



Τύπος ολοκλήρωσης Gauss στο $[-1, 1]$ για $n = 3$

Ο τύπος είναι $Q_1 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$ και θέλουμε να είναι ακριβής για πολυώνυμα **5ου βαθμού**.



Από την (6) και για $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα και λύνοντας (άσκηση)

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, \quad w_2 = \frac{8}{9}$$

$$x_1 = -x_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0$$

Άσκηση Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 te^{2t} dt$ με τους τύπους του Gauss 2, 3 και 4 σημείων υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

Άσκηση Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 t e^{2t} dt$ με τους τύπους του Gauss 2, 3 και 4 σημείων υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

Λύση: Κατάρχην αλλάζουμε μεταβλητή από το διάστημα $[0, 4] \rightarrow [-1, 1]$

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = 2x + 2; \quad dt = 2dx$$
$$I = \int_0^4 t e^{2t} dt = \int_{-1}^1 (4x + 4) e^{4x+4} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Άσκηση Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 t e^{2t} dt$ με τους τύπους του Gauss 2, 3 και 4 σημείων υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

Λύση: Κατάρχην αλλάζουμε μεταβλητή από το διάστημα $[0, 4] \rightarrow [-1, 1]$

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = 2x + 2; \quad dt = 2dx$$
$$I = \int_0^4 t e^{2t} dt = \int_{-1}^1 (4x + 4) e^{4x+4} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Υπολογισμός με τον τύπο Gauss 2 σημείων

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4 - \frac{4}{\sqrt{3}}} + \left(4 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4 + \frac{4}{\sqrt{3}}}$$
$$= 9.167657324 + 3468.376279 = 3477.543936 \quad (\varepsilon = 33.34\%)$$

Άσκηση Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 t e^{2t} dt$ με τους τύπους του Gauss 2, 3 και 4 σημείων υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

Λύση: Κατάρχην αλλάζουμε μεταβλητή από το διάστημα $[0, 4] \rightarrow [-1, 1]$

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = 2x + 2; \quad dt = 2dx$$
$$I = \int_0^4 t e^{2t} dt = \int_{-1}^1 (4x + 4) e^{4x+4} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Υπολογισμός με τον τύπο Gauss 2 σημείων

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4 - \frac{4}{\sqrt{3}}} + \left(4 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4 + \frac{4}{\sqrt{3}}}$$
$$= 9.167657324 + 3468.376279 = 3477.543936 \quad (\varepsilon = 33.34\%)$$

Υπολογισμός με τον τύπο Gauss 3 σημείων

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{0.6}) \\ &= \frac{5}{9} (4 - 4\sqrt{0.6}) e^{4-\sqrt{0.6}} + \frac{8}{9} (4) e^4 + \frac{5}{9} (4 + 4\sqrt{0.6}) e^{4+\sqrt{0.6}} \\ &= \frac{5}{9} (2.221191545) + \frac{8}{9} (218.3926001) + \frac{5}{9} (8589.142689) \\ &= 4967.106689 \quad (\varepsilon = 4.79\%) \end{aligned}$$

Υπολογισμός με τον τύπο Gauss 3 σημείων

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{0.6}) \\ &= \frac{5}{9} (4 - 4\sqrt{0.6}) e^{4-\sqrt{0.6}} + \frac{8}{9} (4) e^4 + \frac{5}{9} (4 + 4\sqrt{0.6}) e^{4+\sqrt{0.6}} \\ &= \frac{5}{9} (2.221191545) + \frac{8}{9} (218.3926001) + \frac{5}{9} (8589.142689) \\ &= 4967.106689 \quad (\varepsilon = 4.79\%) \end{aligned}$$

Υπολογισμός με τον τύπο Gauss 4 σημείων

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.34785 [f(-0.861136) + f(0.861136)] \\ &\quad + 0.652145 [f(-0.339981) + f(0.339981)] \\ &= 5197.54375 \quad (\varepsilon = 0.37\%) \end{aligned}$$

Υπολογισμός με τον τύπο Gauss 3 σημείων

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{0.6}) \\ &= \frac{5}{9} (4 - 4\sqrt{0.6}) e^{4-\sqrt{0.6}} + \frac{8}{9} (4) e^4 + \frac{5}{9} (4 + 4\sqrt{0.6}) e^{4+\sqrt{0.6}} \\ &= \frac{5}{9} (2.221191545) + \frac{8}{9} (218.3926001) + \frac{5}{9} (8589.142689) \\ &= 4967.106689 \quad (\varepsilon = 4.79\%) \end{aligned}$$

Υπολογισμός με τον τύπο Gauss 4 σημείων

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.34785 [f(-0.861136) + f(0.861136)] \\ &\quad + 0.652145 [f(-0.339981) + f(0.339981)] \\ &= 5197.54375 \quad (\varepsilon = 0.37\%) \end{aligned}$$

- Οι παραπάνω τύποι ολοκλήρωσης Gauss, για το διάστημα $[-1, 1]$ ονομάζονται και τύποι **Gauss-Legendre**.

- Οι παραπάνω τύποι ολοκλήρωσης Gauss, για το διάστημα $[-1, 1]$ ονομάζονται και τύποι **Gauss-Legendre**.

Αυτό γιατί οι κόμβοι x_i είναι ρίζες των αντίστοιχων πολυωνύμων Legendre.

- Οι παραπάνω τύποι ολοκλήρωσης Gauss, για το διάστημα $[-1, 1]$ ονομάζονται και τύποι **Gauss-Legendre**.

Αυτό γιατί οι κόμβοι x_i είναι ρίζες των αντίστοιχων πολυωνύμων Legendre.

- Υπενθυμίζεται ότι, τα πολυώνυμα Legendre, P_n , είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot, \cdot)$ στο $[-1, 1]$ και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

όπου $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x$.

- Οι παραπάνω τύποι ολοκλήρωσης Gauss, για το διάστημα $[-1, 1]$ ονομάζονται και τύποι **Gauss-Legendre**.

Αυτό γιατί οι κόμβοι x_i είναι ρίζες των αντίστοιχων πολυωνύμων Legendre.

- Υπενθυμίζεται ότι, τα πολυώνυμα Legendre, P_n , είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot, \cdot)$ στο $[-1, 1]$ και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

όπου $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x$.

Δηλαδή

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad \text{κ.ο.κ}$$

- Οι παραπάνω τύποι ολοκλήρωσης Gauss, για το διάστημα $[-1, 1]$ ονομάζονται και τύποι **Gauss-Legendre**.

Αυτό γιατί οι κόμβοι x_i είναι ρίζες των αντίστοιχων πολυωνύμων Legendre.

- Υπενθυμίζεται ότι, τα πολυώνυμα Legendre, P_n , είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot, \cdot)$ στο $[-1, 1]$ και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

όπου $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x$.

Δηλαδή

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad \text{κ.ο.κ}$$

Άσκηση (επαναληπτική)

Για την προσέγγιση του παρακάτω ολοκληρώματος

$$I(f) = \int_1^3 x^6 - x^2 \sin(2x) dx = 317.3442466$$

(α) Προσσεγγίστε την τιμή του $I(f)$ με τον **κλειστό** τύπο Newton-Cotes με $n = 1$, τον **ανοιχτό** τύπο Newton-Cotes με $n = 1$ και τον τύπο Gauss με $n = 2$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

(β) Προσσεγγίστε την τιμή του $I(f)$ με τον **κλειστό** τύπο Newton-Cotes με $n = 2$, τον **ανοιχτό** τύπο Newton-Cotes με $n = 2$ και τον τύπο Gauss με $n = 3$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Άσκηση (επαναληπτική)

Για την προσέγγιση του παρακάτω ολοκληρώματος

$$I(f) = \int_1^3 x^6 - x^2 \sin(2x) dx = 317.3442466$$

(α) Προσσεγγίστε την τιμή του $I(f)$ με τον **κλειστό** τύπο Newton-Cotes με $n = 1$, τον **ανοιχτό** τύπο Newton-Cotes με $n = 1$ και τον τύπο Gauss με $n = 2$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

(β) Προσσεγγίστε την τιμή του $I(f)$ με τον **κλειστό** τύπο Newton-Cotes με $n = 2$, τον **ανοιχτό** τύπο Newton-Cotes με $n = 2$ και τον τύπο Gauss με $n = 3$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Λύση (α) Ο **κλειστός** τύπος Newton-Cotes με $n = 1$ είναι αυτός του τραπεζίου

$$\frac{2}{2} [f(1) + f(3)] = 731.6054420.$$

Άσκηση (επαναληπτική)

Ο **ανοιχτός** τύπος Newton-Cotes με $n = 1$ είναι αυτός της σελ. 11 στη Διάλεξη 15

$$\frac{2}{2} [f(5/3) + f(7/3)] = 188.7856682.$$

Άσκηση (επαναληπτική)

Ο **ανοιχτός** τύπος Newton-Cotes με $n = 1$ είναι αυτός της σελ. 11 στη Διάλεξη 15

$$\frac{2}{2} [f(5/3) + f(7/3)] = 188.7856682.$$

Για τον τύπο του Gauss με $n = 2$ πρώτα μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα στο $[-1, 1]$

$$\int_1^3 x^6 - x^2 \sin(2x) dx = \int_{-1}^1 (t+2)^6 - (t+2)^2 \sin(2(t+2)) dt$$

Άρα με $w_1 = 1 = w_2$ και $t_1 = -1/\sqrt{3}$ και $t_2 = 1/\sqrt{3}$ έχουμε

$$I(f) \approx 1 \cdot f(-1/\sqrt{3} + 2) + 1 \cdot f(1/\sqrt{3} + 2) = 306.8199344$$

Κάθε μέθοδος χρειάστηκε 2 τιμές της $f(x)$ και ποιο ακριβής είναι ο τύπος του Gauss.

Άσκηση (επαναληπτική)

(β) Ο κλειστός τύπος Newton-Cotes με $n = 2$ είναι αυτός του Simpson 1/3

$$\frac{1}{3} [f(1) + 4f(2) + f(3)] = 333.2380940$$

Άσκηση (επαναληπτική)

(β) Ο **κλειστός** τύπος Newton-Cotes με $n = 2$ είναι αυτός του Simpson $1/3$

$$\frac{1}{3} [f(1) + 4f(2) + f(3)] = 333.2380940$$

Ο **ανοιχτός** τύπος Newton-Cotes με $n = 3$ είναι αυτός του Milne της σελ. 13 στη Διάλεξη 15

$$\frac{2}{3} [2f(1.5) - f(2) + 2f(2.5)] = 303.5912023$$

Άσκηση (επαναληπτική)

(β) Ο **κλειστός** τύπος Newton-Cotes με $n = 2$ είναι αυτός του Simpson 1/3

$$\frac{1}{3} [f(1) + 4f(2) + f(3)] = 333.2380940$$

Ο **ανοιχτός** τύπος Newton-Cotes με $n = 3$ είναι αυτός του Milne της σελ. 13 στη Διάλεξη 15

$$\frac{2}{3} [2f(1.5) - f(2) + 2f(2.5)] = 303.5912023$$

Για τον τύπο του Gauss με $n = 3$ έχουμε $t_1 = -t_3 = -\sqrt{3/5}$, $t_2 = 0$ και $w_1 = w_3 = 5/9$ και $w_2 = 8/9$

$$I(f) \approx w_1 f(-0.774596 + 2) + w_2 f(2) + w_3 f(0.774596 + 2) = 317.2641516.$$

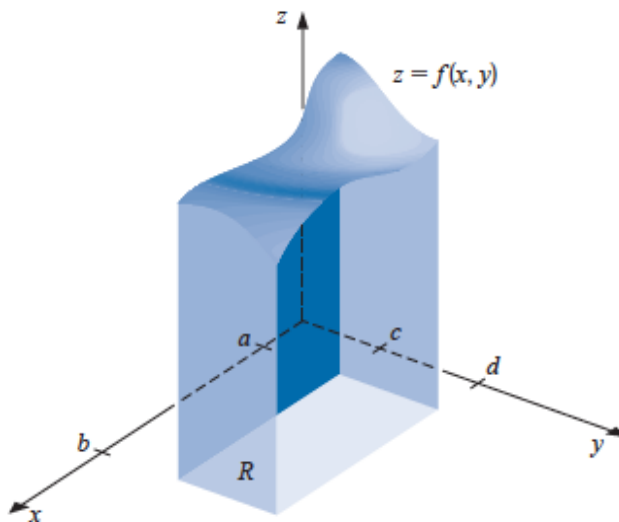
Πολύ καλύτερη προσέγγιση με τον τύπο του Gauss με χρήση 3 τιμών της f .

Διπλά Ολοκληρώματα

Όλες οι τεχνικές που είδαμε μέχρι τώρα μπορούν να εφαρμοστούν κατάλληλα και για την προσέγγιση διπλών ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

με $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

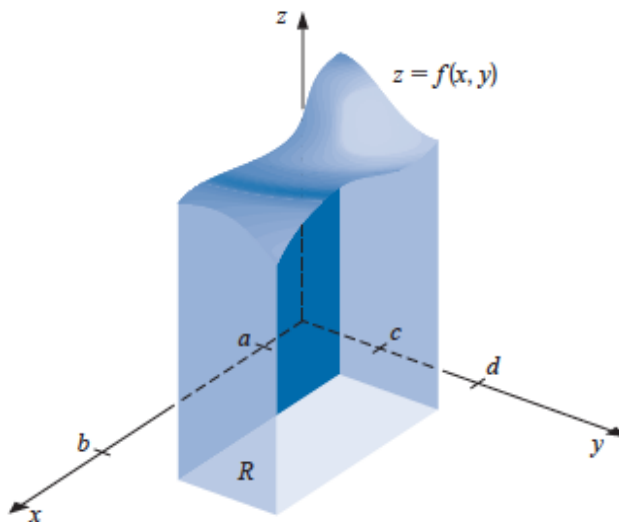


Διπλά Ολοκληρώματα

Όλες οι τεχνικές που είδαμε μέχρι τώρα μπορούν να εφαρμοστούν κατάλληλα και για την προσέγγιση διπλών ολοκληρωμάτων της μορφής

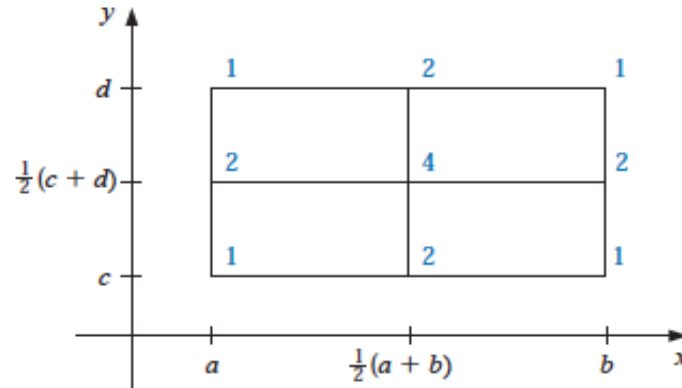
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

με $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.



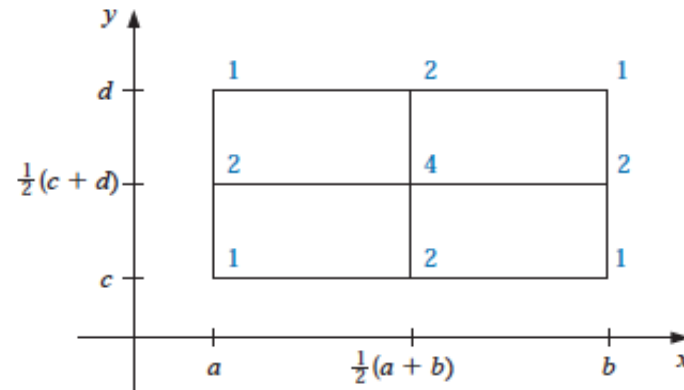
Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Τραπεζίου

Για να εφαρμόσουμε το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου σε 2 υποδιαστήματα, ανα κατεύθυνση, και με $h = (b - a)/2$ και $k = (d - c)/2$



Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Τραπεζίου

Για να εφαρμόσουμε το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου σε 2 υποδιαστήματα, ανα κατεύθυνση, και με $h = (b - a)/2$ και $k = (d - c)/2$

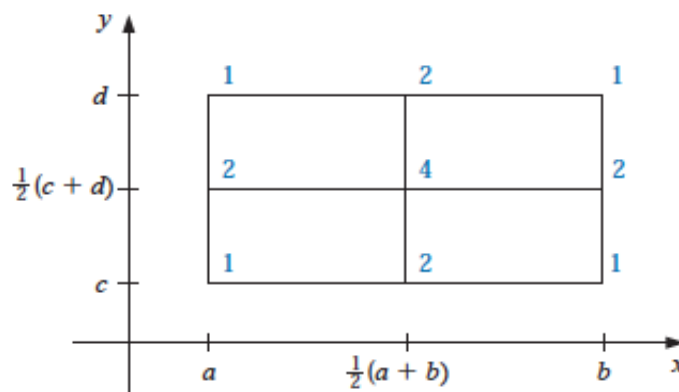


Το εσωτερικό ολοκλήρωμα αρχικά προσεγγίζεται ως προς y σαν

$$\int_c^d f(x, y) dy \approx \frac{k}{2} \left[f(x, c) + 2f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + f(x, d) \right]$$

Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Τραπεζίου

Για να εφαρμόσουμε το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου σε 2 υποδιαστήματα, ανα κατεύθυνση, και με $h = (b - a)/2$ και $k = (d - c)/2$



Το εσωτερικό ολοκλήρωμα αρχικά προσεγγίζεται ως προς y σαν

$$\int_c^d f(x, y) dy \approx \frac{k}{2} \left[f(x, c) + 2f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + f(x, d) \right]$$

Για το ολοκλήρωμα ως προς x έχουμε

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \approx \int_a^b \frac{k}{2} \left[f(x, c) + 2f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + f(x, d) \right] dx$$

Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Τραπεζίου

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx &\approx \int_a^b \left(\frac{d-c}{4} \right) \left[f(x, c) + 2f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + f(x, d) \right] dx \\&= \frac{b-a}{4} \left(\frac{d-c}{4} \right) \left[f(a, c) + 2f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f(a, d) \right] \\&\quad + \frac{b-a}{4} \left(2 \left(\frac{d-c}{4} \right) \left[f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right. \right. \\&\quad \left. \left. + 2f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] \right) \\&\quad + \frac{b-a}{4} \left(\frac{d-c}{4} \right) \left[f(b, c) + 2f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f(b, d) \right] \\&= \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left[f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) \right. \\&\quad \left. + 2 \left(f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right. \right. \\&\quad \left. \left. + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right]\end{aligned}$$

Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Simpson 1/3-Παράδειγμα

Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx$$

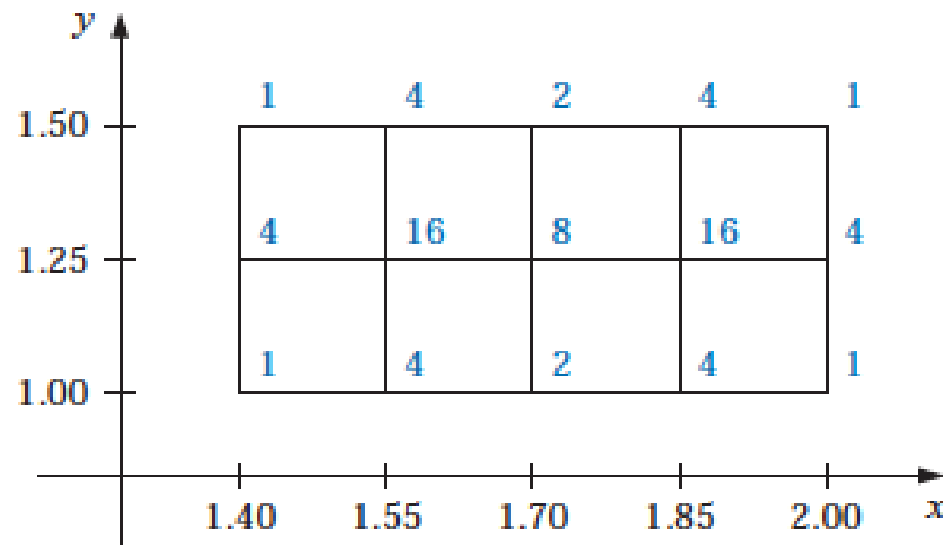
με $n = 4$ υποδιαστήματα ως προς x και $m = 2$ υποδιαστήματα ως προς y

Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Simpson 1/3-Παράδειγμα

Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx$$

με $n = 4$ υποδιαστήματα ως προς x και $m = 2$ υποδιαστήματα ως προς y



Στο σχήμα με μπλε είναι τα βάρη w_{ij} που πολλαπλασιάζουν της τιμές της συνάρτησης $f(x, y)$ στα σημεία του πλέγματος.

Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Simpson 1/3-Παράδειγμα

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx \approx \frac{(0.15)(0.25)}{9} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 w_{ij} \ln(x_i + 2y_j) \\ &= 0.4295524387 \end{aligned}$$

Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Simpson 1/3-Παράδειγμα

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx \approx \frac{(0.15)(0.25)}{9} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 w_{ij} \ln(x_i + 2y_j) \\ &= 0.4295524387 \end{aligned}$$

Η πραγματική τιμή είναι $I(f) = 0.4295545265$.

Η προσέγγισή μας έχει σφάλμα $2.1 \cdot 10^{-6}$.

Διπλά Ολοκληρώματα-Κανόνας Simpson 1/3-Παράδειγμα

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx \approx \frac{(0.15)(0.25)}{9} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 w_{ij} \ln(x_i + 2y_j) \\ &= 0.4295524387 \end{aligned}$$

Η πραγματική τιμή είναι $I(f) = 0.4295545265$.

Η προσέγγισή μας έχει σφάλμα $2.1 \cdot 10^{-6}$.

Όμως χρειάστηκαν 15 τιμές της $f(x, y)$ για να το πετύχουμε.

Διπλά Ολοκληρώματα-Ολοκλήρωση Gauss-Παράδειγμα

Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx$$

Πρώτα πρέπει να μετασχηματίσουμε το χωρίο ολοκλήρωσης (αλλαγή μεταβλητών)

$$R = \{(x, y) \mid 1.4 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1.5\}$$

στο

$$\tilde{R} = \{(u, v) \mid -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$$

$$x = \frac{2 - 1.4}{2}u + \frac{1.4 + 2}{2} = 0.3u + 1.7 \quad \text{και} \quad y = 0.25v + 1.25$$

Αρα

$$I(f) = \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx = 0.075 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln(0.3u + 0.5v + 4.2) dv du$$

Διπλά Ολοκληρώματα-Ολοκλήρωση Gauss-Παράδειγμα

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss για $n = 3$ (βλεπε σελ. 6) κατά κατεύθυνση έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &\approx 0.075 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \ln(0.3u_i + 0.5v_j + 4.2) \\ &= 0.4295545213 \end{aligned}$$

Διπλά Ολοκληρώματα-Ολοκλήρωση Gauss-Παράδειγμα

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss για $n = 3$ (βλεπε σελ. 6) κατά κατεύθυνση έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &\approx 0.075 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \ln(0.3u_i + 0.5v_j + 4.2) \\ &= 0.4295545213 \end{aligned}$$

Η πραγματική τιμή είναι $I(f) = 0.4295545265$.

Η προσέγγισή μας έχει σφάλμα $4.8 \cdot 10^{-9}$.

Διπλά Ολοκληρώματα-Ολοκλήρωση Gauss-Παράδειγμα

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss για $n = 3$ (βλεπε σελ. 6) κατά κατεύθυνση έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &\approx 0.075 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \ln(0.3u_i + 0.5v_j + 4.2) \\ &= 0.4295545213 \end{aligned}$$

Η πραγματική τιμή είναι $I(f) = 0.4295545265$.

Η προσέγγισή μας έχει σφάλμα $4.8 \cdot 10^{-9}$.

Όμως χρειάστηκαν **μόνο 9 τιμές** της $f(x, y)$ για να το πετύχουμε.