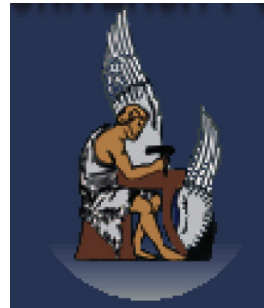


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 14η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

ΚΕΦ. 5 (ΜΕΡΟΣ Β): ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Στόχος η αριθμητική η προσέγγιση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad [a, b] \subset \mathbf{R} \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}.$$

ΚΕΦ. 5 (ΜΕΡΟΣ Β): ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Στόχος η αριθμητική η προσέγγιση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad [a, b] \subset \mathbf{R} \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}.$$

Αν F είναι μία παράγουσα της f τότε $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$. Όμως η F μπορεί να είναι δύσκολο να υπολογιστεί και να είναι πολύπλοκη, ακόμη και για μία απλή f .

ΚΕΦ. 5 (ΜΕΡΟΣ Β): ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Στόχος η αριθμητική η προσέγγιση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad [a, b] \subset \mathbf{R} \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}.$$

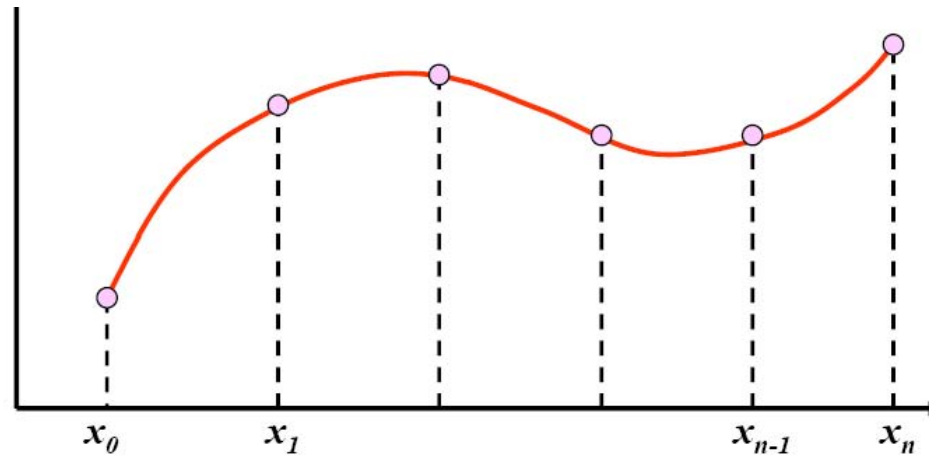
Αν F είναι μία παράγουσα της f τότε $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$. Όμως η F μπορεί να είναι δύσκολο να υπολογιστεί και να είναι πολύπλοκη, ακόμη και για μία απλή f .

Στην αριθμητική ολοκλήρωση το ολοκλήρωμα $I(f)$ προσεγγίζεται με **τύπους (κανόνες) ολοκλήρωσης**, Q_{n+1} , δηλ.

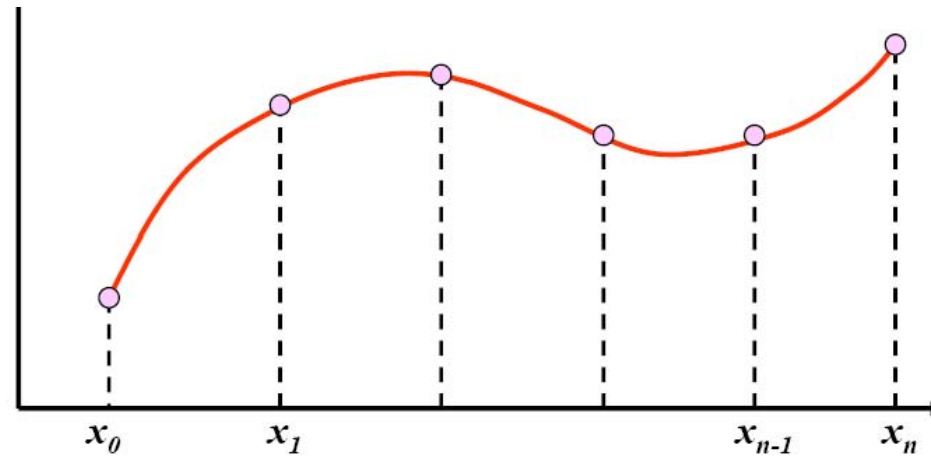
$$I(f) \approx Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Όπου x_i **κόμβοι** στο $[a, b]$ και w_i **τα βάρη** ($\in \mathbf{R}$).

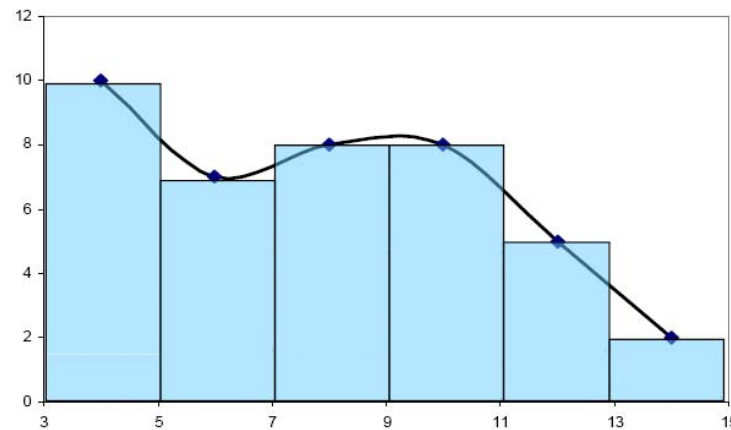
$$I(f) \approx Q_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$



$$I(f) \approx Q_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$



Η ιδέα εδώ είναι να προσεγγιστεί ένα ολοκλήρωμα με μικρά αθροίσματα



Τύποι ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $n + 1$ (ομοιόμορφα κατανεμημένοι) κόμβοι $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$ με βήμα $h = (b - a)/n$.

- Οι **κλειστοί τύποι** Newton-Cotes χρησιμοποιούν όλους τους κόμβους.
- Οι **ανοικτοί τύποι** Newton-Cotes δεν χρησιμοποιούν τους κόμβους στα άκρα.

Τύποι ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $n + 1$ (ομοιόμορφα κατανεμημένοι) κόμβοι $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$ με βήμα $h = (b - a)/n$.

- Οι **κλειστοί τύποι** Newton-Cotes χρησιμοποιούν όλους τους κόμβους.
- Οι **ανοικτοί τύποι** Newton-Cotes δεν χρησιμοποιούν τους κόμβους στα άκρα.

Έστω ότι η $f(x)$ προσεγγίζεται με ένα πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(x)$

$$f(x) \approx p_n(x)$$

Τότε

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$$

Τύποι ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $n + 1$ (ομοιόμορφα κατανεμημένοι) κόμβοι $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$ με βήμα $h = (b - a)/n$.

- Οι **κλειστοί τύποι** Newton-Cotes χρησιμοποιούν όλους τους κόμβους.
- Οι **ανοικτοί τύποι** Newton-Cotes δεν χρησιμοποιούν τους κόμβους στα άκρα.

Έστω ότι η $f(x)$ προσεγγίζεται με ένα πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(x)$

$$f(x) \approx p_n(x)$$

Τότε

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε τύπους ολοκλήρωσης Q_{n+1} τ.ώ.

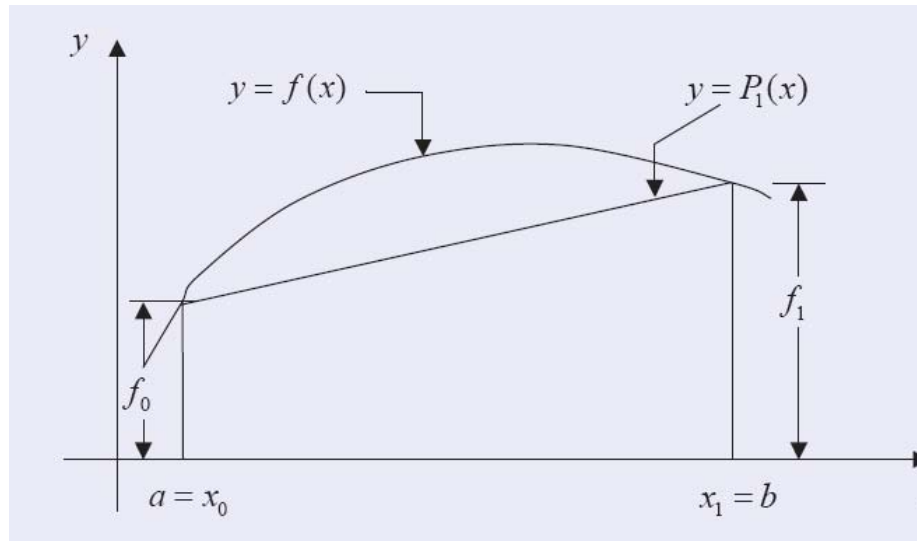
$$Q_{n+1}(f) = I(p_n) = \int_a^b p_n(x)dx$$

δηλ. να υπολογίζουν ακριβώς το ολόκληρωμα του πολυωνύμου παρεμβολής.

Τότε λέμε **ότι ο τύπος Q_{n+1} ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα n –βαθμού.**

Κανόνας (απλός τύπος) του τραπεζίου

Έστω το p_1 πολυώνυμο παρεμβολής της $f \in C[a, b]$ (στα $x_0 = a, x_1 = b$).

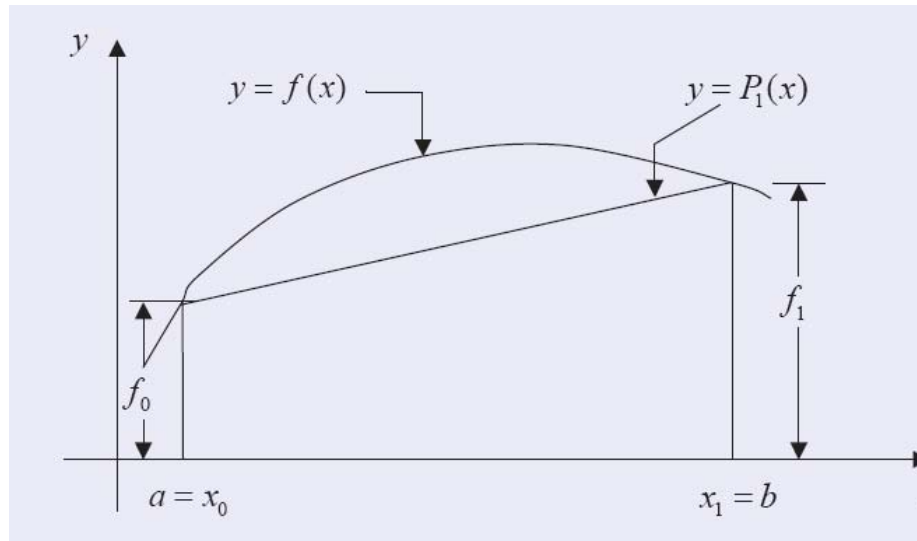


Τότε

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Κανόνας (απλός τύπος) του τραπεζίου

Έστω το p_1 πολυώνυμο παρεμβολής της $f \in C[a, b]$ (στα $x_0 = a, x_1 = b$).



Τότε

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Ολοκληρώνοντας

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \dots = \frac{(b - a)}{2} [f(a) + f(b)] = Q_2(f)$$

Σφάλμα στην αριθμητική ολοκλήρωση

Γενικά για παρεμβολή με πολυώνυμο n —βαθμού από το **σφάλμα πολυωνυμικής παρεμβολής** έχουμε

$$\begin{aligned} R_{n+1}(f) &= I(f) - Q_{n+1}(f) = I(f) - I(p_n) = \int_a^b [f(x) - p_n(x)] dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx, \quad \text{για } \xi \in (a, b), \end{aligned}$$

Σφάλμα στην αριθμητική ολοκλήρωση

Γενικά για παρεμβολή με πολυώνυμο n —βαθμού από το **σφάλμα πολυωνυμικής παρεμβολής** έχουμε

$$\begin{aligned} R_{n+1}(f) &= I(f) - Q_{n+1}(f) = I(f) - I(p_n) = \int_a^b [f(x) - p_n(x)] dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx, \quad \text{για } \xi \in (a, b), \end{aligned}$$

Για $n = 1$ έχουμε

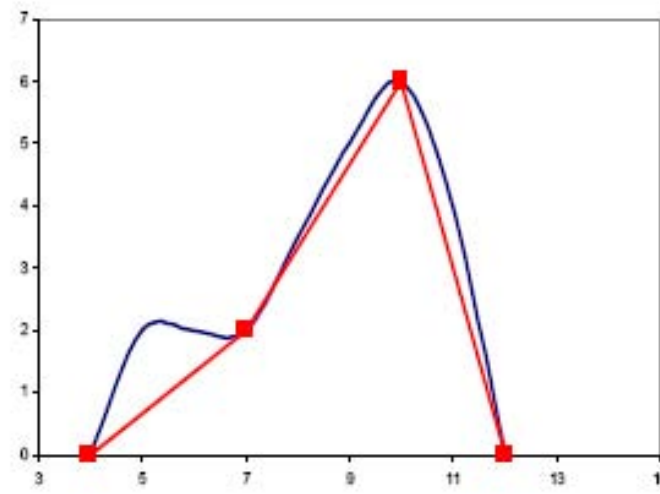
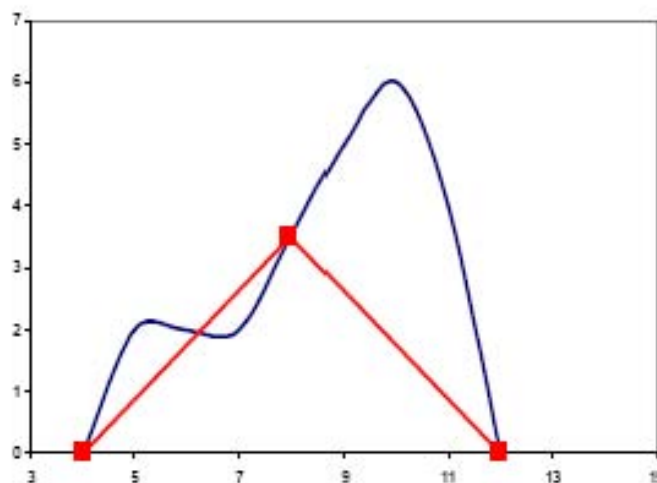
$$R_2(f) = -\frac{1}{2!} \int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi) dx$$

Με χρήση του **θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής του διαφορικού λογισμού**

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad (\text{Τοπικό σφάλμα αποκοπής})$$

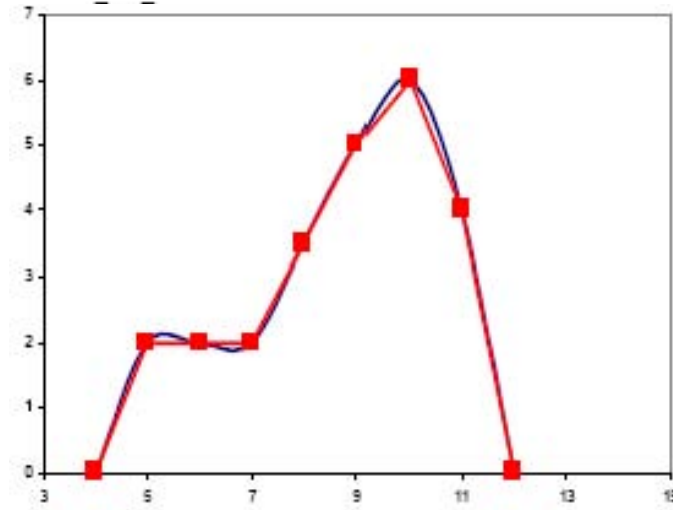
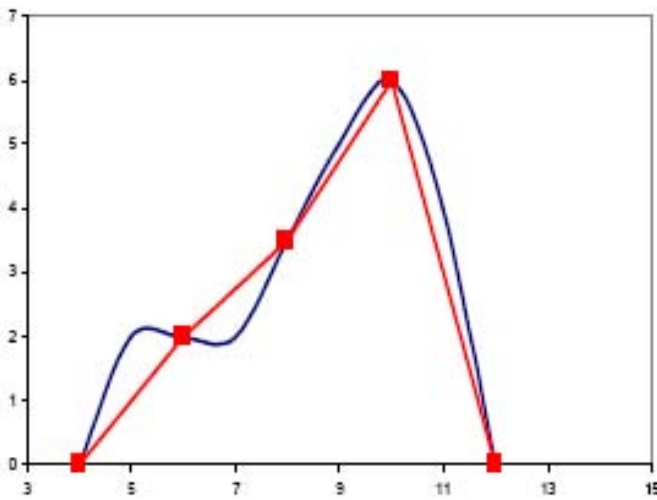
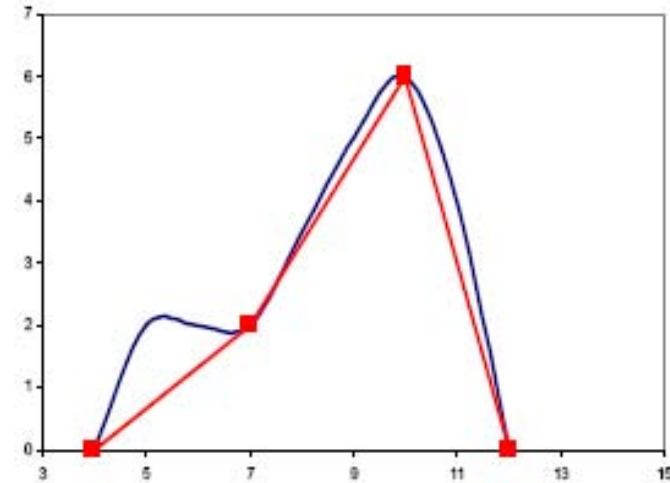
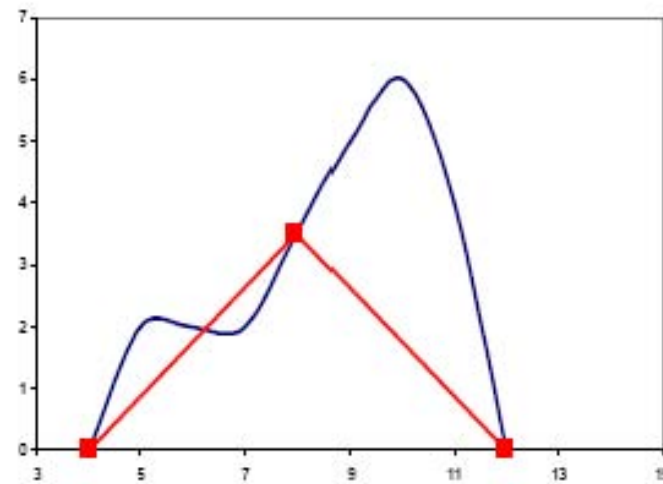
Βελτίωση της προσέγγισης

Εφαρμογή του απλού τύπου του τραπεζίου σε περισσότερα διαστήματα στο διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$



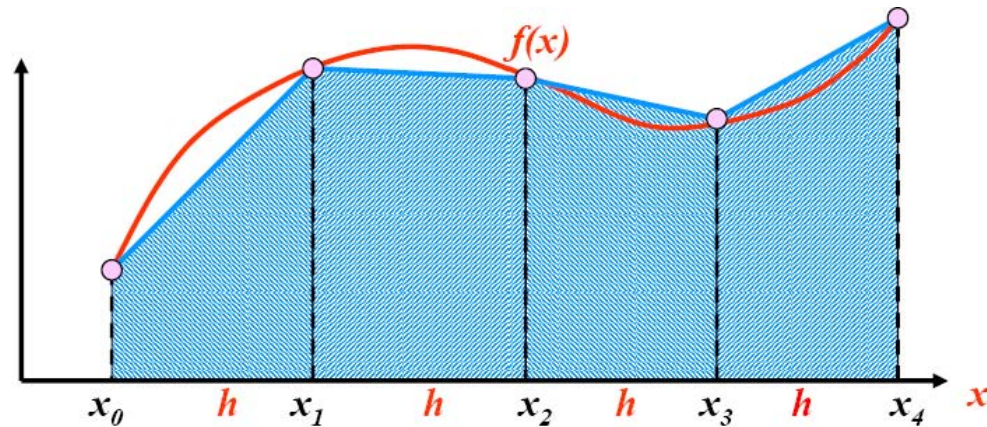
Βελτίωση της προσέγγισης

Εφαρμογή του απλού τύπου του τραπεζίου σε περισσότερα διαστήματα στο διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$



Βελτίωση της προσέγγισης

Διαιρούμε το $[a, b]$ σε n **ίσα** διαστήματα, μήκους $h = (b - a)/n$ και σε κάθε $[x_{i+1} - x_i]$ από αυτά εφαρμόζεται ο απλός τύπος του τραπεζίου.



Εφόσον

$$I(f) = \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

έχουμε

$$Q_{n+1}^T = h \left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right]$$

που είναι ο **σύνθετος τύπος του τραπεζίου**.

Σφάλμα για το σύνθετο τύπος του τραπεζίου

Αθροίζοντας για κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$ το αντίστοιχο τοπικό σφάλμα συνεπάγεται ότι το **ολικό σφάλμα** αποκοπής δίνεται ως

$$\forall f \in C^2[a, b] \quad \exists \xi \in (a, b) \quad R_{n+1}^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}^T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty \quad \forall f \in C^2[a, b]$$

Το σφάλμα είναι τάξης δύο (για $h \rightarrow 0$) δηλ. $O(h^2)$.

Σφάλμα για το σύνθετο τύπος του τραπεζίου

Αθροίζοντας για κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$ το αντίστοιχο τοπικό σφάλμα συνεπάγεται ότι το **ολικό σφάλμα** αποκοπής δίνεται ως

$$\forall f \in C^2[a, b] \quad \exists \xi \in (a, b) \quad R_{n+1}^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}^T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty \quad \forall f \in C^2[a, b]$$

Το σφάλμα είναι τάξης δύο (για $h \rightarrow 0$) δηλ. $O(h^2)$.

Η παραπάνω εκτίμηση για το φράγμα του σφάλματος μπορεί να μας δώσει **εκ των προτέρων** ένα πλήθος κόμβων n που εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα έχει ακρίβεια k —σημαντικών δεκαδικών ψηφίων δηλ. ότι,

$$|R_{n+1}^T| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

Παράδειγμα Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $I(f)$ στο $[0, 1]$ της $f(x) = e^{-x^2}$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου και με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

Παράδειγμα Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $I(f)$ στο $[0, 1]$ της $f(x) = e^{-x^2}$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου και με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

Θέλουμε δηλ.

$$|R_{n+1}^T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \quad (2)$$

Έχουμε

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \quad \text{και} \quad \|f''\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f''| = 2$$

Συνεπώς από την (2)

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad n > 183$$

Άρα, ο σύνθετος τύπος χρειάζεται περισσότερους από 184 ομοιόμορφα κατανεμημένους κόμβους για να πετύχει τη ζητούμενη ακρίβεια.

Άσκηση Υπολογίστε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ και στη συνέχεια εφαρμόστε το σύνθετο τύπο του τραπεζίου για διάφορες τιμές κόμβων. Πιο είναι το πλήθος κόμβων n που εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα έχει ακρίβεια 4 σημαντικών δεκαδικών ψηφίων;

Άσκηση Υπολογίστε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ και στη συνέχεια εφαρμόστε το σύνθετο τύπο του τραπεζίου για διάφορες τιμές κόμβων. Πιο είναι το πλήθος κόμβων n που εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα έχει ακρίβεια 4 σημαντικών δεκαδικών ψηφίων;
Λύση: Η πραγματική τιμή είναι $I(f) = 5216.926477$.

$$n = 1, h = 4 \Rightarrow I = \frac{h}{2} [f(0) + f(4)] = 23847.66$$

$$n = 2, h = 2 \Rightarrow I = \frac{h}{2} [f(0) + 2f(2) + f(4)] = 12142.23$$

$$n = 4, h = 1 \Rightarrow I = \frac{h}{2} [f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + f(4)] = 7288.79$$

$$n = 8, h = 0.5 \Rightarrow I = \frac{h}{2} [f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + 2f(2) + 2f(2.5) + 2f(3) + 2f(3.5) + f(4)] = 5764.76$$

$$n = 16, h = 0.25 \Rightarrow I = \frac{h}{2} [f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + \dots + 2f(3.5) + 2f(3.75) + f(4)] = 5355.95$$

Παρατηρήσεις

- Η θεωρητική πρόβλεψη για τα σημεία είναι γενικά κάπως απαισιόδοξη σε σύγκριση με την πράξη (χρειάζονται λιγότεροι κόμβοι για να πετύχουμε δεδομένη ακρίβεια).

Παρατηρήσεις

- Η θεωρητική πρόβλεψη για τα σημεία είναι γενικά κάπως απαισιόδοξη σε σύγκριση με την πράξη (χρειάζονται λιγότεροι κόμβοι για να πετύχουμε δεδομένη ακρίβεια).
- Όμως για να πετύχουμε ικανοποιητική ακρίβεια με το τύπο του τραπεζίου χρειάζονται πολλοί κόμβοι, ακόμη και για ολοκλήρωση ομαλών συναρτήσεων.

Παρατηρήσεις

- Η θεωρητική πρόβλεψη για τα σημεία είναι γενικά κάπως απαισιόδοξη σε σύγκριση με την πράξη (χρειάζονται λιγότεροι κόμβοι για να πετύχουμε δεδομένη ακρίβεια).
- Όμως για να πετύχουμε ικανοποιητική ακρίβεια με το τύπο του τραπεζίου χρειάζονται πολλοί κόμβοι, ακόμη και για ολοκλήρωση ομαλών συναρτήσεων.
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζονται πολλοί περισσότεροι. Η αύξηση όμως των κόμβων μπορεί να έχει σαν συνέπεια την αλλοίωση του αποτελέσματος λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης

Παρατηρήσεις

- Η θεωρητική πρόβλεψη για τα σημεία είναι γενικά κάπως απαισιόδοξη σε σύγκριση με την πράξη (χρειάζονται λιγότεροι κόμβοι για να πετύχουμε δεδομένη ακρίβεια).
- Όμως για να πετύχουμε ικανοποιητική ακρίβεια με το τύπο του τραπεζίου χρειάζονται πολλοί κόμβοι, ακόμη και για ολοκλήρωση ομαλών συναρτήσεων.
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζονται πολλοί περισσότεροι. Η αύξηση όμως των κόμβων μπορεί να έχει σαν συνέπεια την αλλοίωση του αποτελέσματος λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης
- Υπάρχουν τύποι ολοκλήρωσης που με πολύ λιγότερους κόμβους δίνουν αποτελέσματα υψηλότερης ακρίβειας.

Παρατηρήσεις

- Η θεωρητική πρόβλεψη για τα σημεία είναι γενικά κάπως απαισιόδοξη σε σύγκριση με την πράξη (χρειάζονται λιγότεροι κόμβοι για να πετύχουμε δεδομένη ακρίβεια).
- Όμως για να πετύχουμε ικανοποιητική ακρίβεια με το τύπο του τραπεζίου χρειάζονται πολλοί κόμβοι, ακόμη και για ολοκλήρωση ομαλών συναρτήσεων.
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζονται πολλοί περισσότεροι. Η αύξηση όμως των κόμβων μπορεί να έχει σαν συνέπεια την αλλοίωση του αποτελέσματος λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης
- Υπάρχουν τύποι ολοκλήρωσης που με πολύ λιγότερους κόμβους δίνουν αποτελέσματα υψηλότερης ακρίβειας.
- Ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου μπορεί να εφαρμοστεί και σε **μη ομοιόμορφες διαμερήσεις** ως

$$Q_{n+1}^T = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

Παράδειγμα: Με βάση την τελευταία παρατήρηση υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου στο $[0, 4]$ και με υποδιαστήματα $h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 0.5, h_4 = 0.5$ και υπολογίστε το % σφάλμα.

Παράδειγμα: Με βάση την τελευταία παρατήρηση υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου στο $[0, 4]$ και με υποδιαστήματα $h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 0.5, h_4 = 0.5$ και υπολογίστε το % σφάλμα.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{3.5} f(x) dx + \int_{3.5}^4 f(x) dx \\ &= \frac{h_1}{2} [f(0) + f(2)] + \frac{h_2}{2} [f(2) + f(3)] \\ &\quad + \frac{h_3}{2} [f(3) + f(3.5)] + \frac{h_4}{2} [f(3.5) + f(4)] \\ &= \frac{2}{2} [0 + 2e^4] + \frac{1}{2} [2e^4 + 3e^6] + \frac{0.5}{2} [3e^6 + 3.5e^7] \\ &\quad + \frac{0.5}{2} [3.5e^7 + 4e^8] = 5971.58 \quad \Rightarrow \varepsilon = -14.45\% \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Με βάση την τελευταία παρατήρηση υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με το σύνθετο τύπο του τραπεζίου στο $[0, 4]$ και με υποδιαστήματα $h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 0.5, h_4 = 0.5$ και υπολογίστε το % σφάλμα.

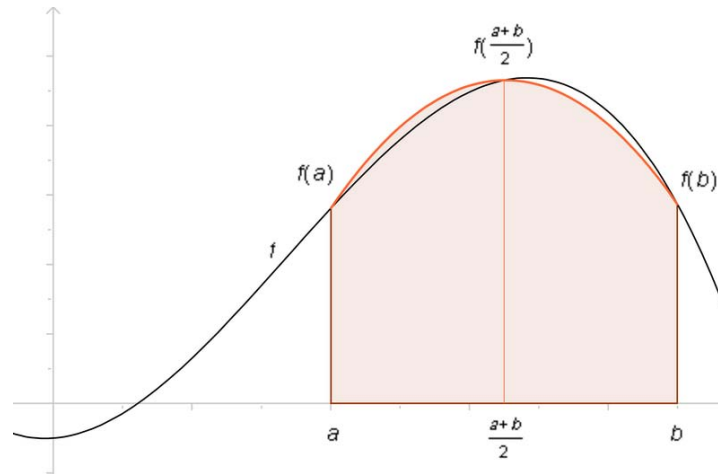
$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{3.5} f(x) dx + \int_{3.5}^4 f(x) dx \\ &= \frac{h_1}{2} [f(0) + f(2)] + \frac{h_2}{2} [f(2) + f(3)] \\ &\quad + \frac{h_3}{2} [f(3) + f(3.5)] + \frac{h_4}{2} [f(3.5) + f(4)] \\ &= \frac{2}{2} [0 + 2e^4] + \frac{1}{2} [2e^4 + 3e^6] + \frac{0.5}{2} [3e^6 + 3.5e^7] \\ &\quad + \frac{0.5}{2} [3.5e^7 + 4e^8] = 5971.58 \quad \Rightarrow \varepsilon = -14.45\% \end{aligned}$$

Ο (απλός) τύπος του Simpson 1/3

Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο 2ου βαθμού στα σημεία $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ τότε

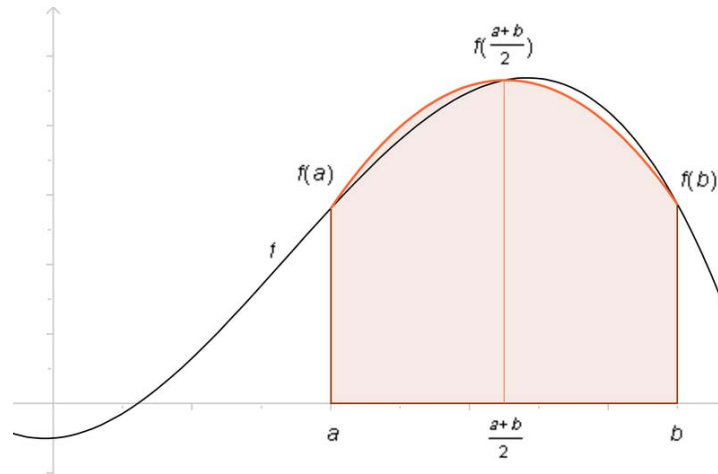
Ο (απλός) τύπος του Simpson 1/3

Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο 2ου βαθμού στα σημεία $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ τότε



Ο (απλός) τύπος του Simpson 1/3

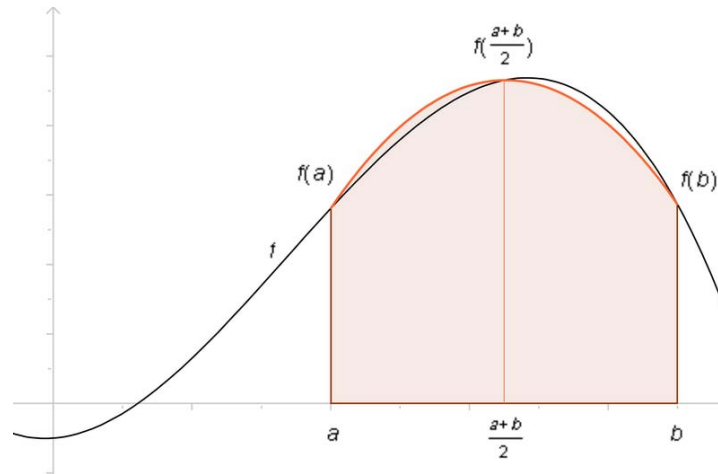
Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο 2ου βαθμού στα σημεία $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ τότε



$$\text{Τότε } I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)dx$$

Ο (απλός) τύπος του Simpson 1/3

Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο 2ου βαθμού στα σημεία $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ τότε



$$\text{Τότε } I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)dx$$

Συνεπώς

$$Q_3(f) = \int_a^b p_2(x)dx = \dots = \frac{(b-a)}{2} \left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b) \right]$$

Θέτοντας $h = (b - a)/2$ ο απλός τύπος του Simpson 1/3 γράφεται

$$Q_3(f) = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]$$

Θέτοντας $h = (b - a)/2$ ο απλός τύπος του Simpson 1/3 γράφεται

$$Q_3(f) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Ο τύπος του Simpson αναμένεται να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα 2ου βαθμού. Όμως για $f(x) = x^3 \dots\dots$

Θέτοντας $h = (b - a)/2$ ο απλός τύπος του Simpson 1/3 γράφεται

$$Q_3(f) = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]$$

Ο τύπος του Simpson αναμένεται να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα 2ου βαθμού. Όμως για $f(x) = x^3 \dots\dots$

$$I(x^3) - Q_3(x^3) = \int_a^b x^3 dx - \frac{b-a}{6} \left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3 \right] = \dots = 0!$$

Συνεπώς ο τύπος του Simpson 1/3 υπολογίζει ακριβώς τα ολοκληρώματα (ολοκληρώνει ακριβώς) πολυωνύμων μέχρι και τρίτου βαθμού.

Σφάλμα στην αριθμητική ολοκλήρωση με τον απλό τύπος του Simpson 1/3

Για παρεμβολή με πολυώνυμο 2ου βαθμού και από το σφάλμα πολυωνυμικής παρεμβολής έχουμε

$$R_3(f) = -\frac{1}{3!} \int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(b-x) f^{(3)}(\xi)$$

Με χρήση του **θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής του διαφορικού λογισμού**

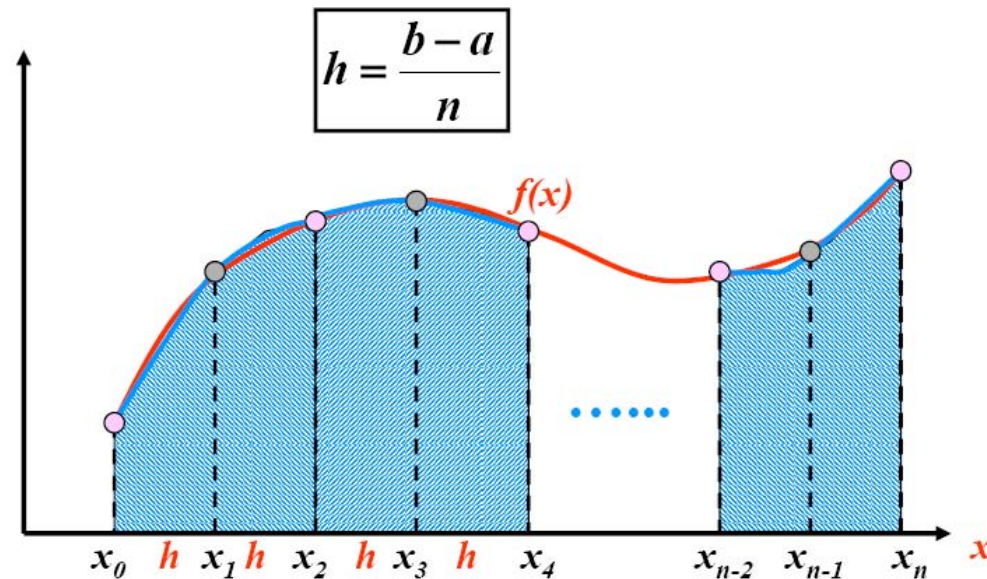
$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Από τον τύπο του σφάλματος μπορούμε επίσης να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι ο τύπος του Simpson 1/3 είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού ≤ 3 (γιατί αν $f(x) \equiv p_3(x)$ τότε $f^{(4)} \equiv p_3^{(4)} = 0$ και άρα $R_3(f) = 0$).

Ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3

Έστω ότι ο αριθμός των **διαστημάτων** n είναι **άρτιος**, με

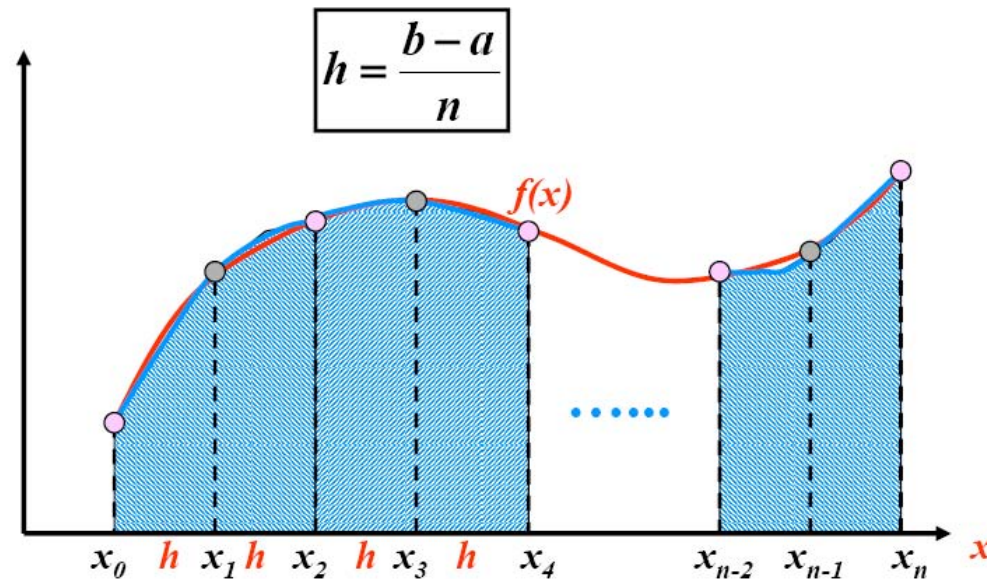
$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$ και εφαρμόζουμε το τύπο του Simpson 1/3 στα $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$.



Ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3

Έστω ότι ο αριθμός των **διαστημάτων** n **είναι άρτιος**, με

$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$ και εφαρμόζουμε το τύπο του Simpson 1/3 στα $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$.



Κάνοντας δηλ. αρχικά μία κατά τμήματα παραβολική παρεμβολή και αθροίζοντας τα τοπικά ολοκληρώματα, προκύπτει ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 ως

$$Q_{n+1}^S = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 στο $[0, 4]$ με χρήση 3 και 5 κόμβων και υπολογίστε το % σφάλμα.

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 στο $[0, 4]$ με χρήση 3 και 5 κόμβων και υπολογίστε το % σφάλμα.

- $n = 2, h = 2$

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} [f(0) + 4f(2) + f(4)] \\ &= \frac{2}{3} [0 + 4(2e^4) + 4e^8] = 8240.411 \Rightarrow \varepsilon = -57.96\% \end{aligned}$$

- $n = 4, h = 1$

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} [f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)] \\ &= \frac{1}{3} [0 + 4(e^2) + 2(2e^4) + 4(3e^6) + 4e^8] \\ &= 5670.975 \Rightarrow \varepsilon = -8.70\% \end{aligned}$$

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 στο $[0, 4]$ με χρήση 3 και 5 κόμβων και υπολογίστε το % σφάλμα.

- $n = 2, h = 2$

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} [f(0) + 4f(2) + f(4)] \\ &= \frac{2}{3} [0 + 4(2e^4) + 4e^8] = 8240.411 \Rightarrow \varepsilon = -57.96\% \end{aligned}$$

- $n = 4, h = 1$

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} [f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)] \\ &= \frac{1}{3} [0 + 4(e^2) + 2(2e^4) + 4(3e^6) + 4e^8] \\ &= 5670.975 \Rightarrow \varepsilon = -8.70\% \end{aligned}$$

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με χρήση του τύπου Simpson 1/3 στους κόμβους $x_0 = 0, x_1 = 1.5, x_2 = 3, x_3 = 3.5, x_4 = 4$ και υπολογίστε το % σφάλμα.

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με χρήση του τύπου Simpson 1/3 στους κόμβους

$x_0 = 0, x_1 = 1.5, x_2 = 3, x_3 = 3.5, x_4 = 4$ και υπολογίστε το % σφάλμα.

• $h_1 = 1.5, h_2 = 0.5$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \\ &= \frac{h_1}{3} [f(0) + 4f(1.5) + 2f(3)] \\ &\quad + \frac{h_2}{3} [f(3) + 4f(3.5) + 2f(4)] \\ &= \frac{1.5}{3} [0 + 4(1.5e^3) + 3e^6] + \frac{0.5}{3} [3e^6 + 4(3.5e^7) + 4e^8] \\ &= 5413.23 \quad \Rightarrow \varepsilon = -3.76\% \end{aligned}$$

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$ με χρήση του τύπου Simpson 1/3 στους κόμβους

$x_0 = 0, x_1 = 1.5, x_2 = 3, x_3 = 3.5, x_4 = 4$ και υπολογίστε το % σφάλμα.

• $h_1 = 1.5, h_2 = 0.5$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \\ &= \frac{h_1}{3} [f(0) + 4f(1.5) + 2f(3)] \\ &\quad + \frac{h_2}{3} [f(3) + 4f(3.5) + 2f(4)] \\ &= \frac{1.5}{3} [0 + 4(1.5e^3) + 3e^6] + \frac{0.5}{3} [3e^6 + 4(3.5e^7) + 4e^8] \\ &= 5413.23 \quad \Rightarrow \varepsilon = -3.76\% \end{aligned}$$

Σφάλμα για το σύνθετο τύπος του Simpson 1/3

Αθροίζοντας για κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+2}]$, το αντίστοιχο τοπικό σφάλμα συνεπάγεται ότι το **ολικό σφάλμα** δίνεται ως

$$\forall f \in C^4[a, b] \quad \exists \xi \in (a, b) \quad R_{n+1}^S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}^S| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} \quad \forall f \in C^4[a, b]$$

Το σφάλμα είναι τάξης τέσσερα (για $h \rightarrow 0$) δηλ. $O(h^4)$.

Σφάλμα για το σύνθετο τύπος του Simpson 1/3

Αθροίζοντας για κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+2}]$, το αντίστοιχο τοπικό σφάλμα συνεπάγεται ότι το **ολικό σφάλμα** δίνεται ως

$$\forall f \in C^4[a, b] \quad \exists \xi \in (a, b) \quad R_{n+1}^S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}^S| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} \quad \forall f \in C^4[a, b]$$

Το σφάλμα είναι τάξης τέσσερα (για $h \rightarrow 0$) δηλ. $O(h^4)$.

Η παραπάνω εκτίμηση για το φράγμα του σφάλματος μπορεί επίσης να μας δώσει **εκ των προτέρων** ένα πλήθος κόμβων n που εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα έχει ακρίβεια k —σημαντικών δεκαδικών ψηφίων δηλ. ότι,

$$|R_{n+1}^S| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$