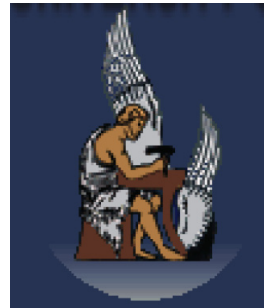


Αριθμητική Ανάλυση

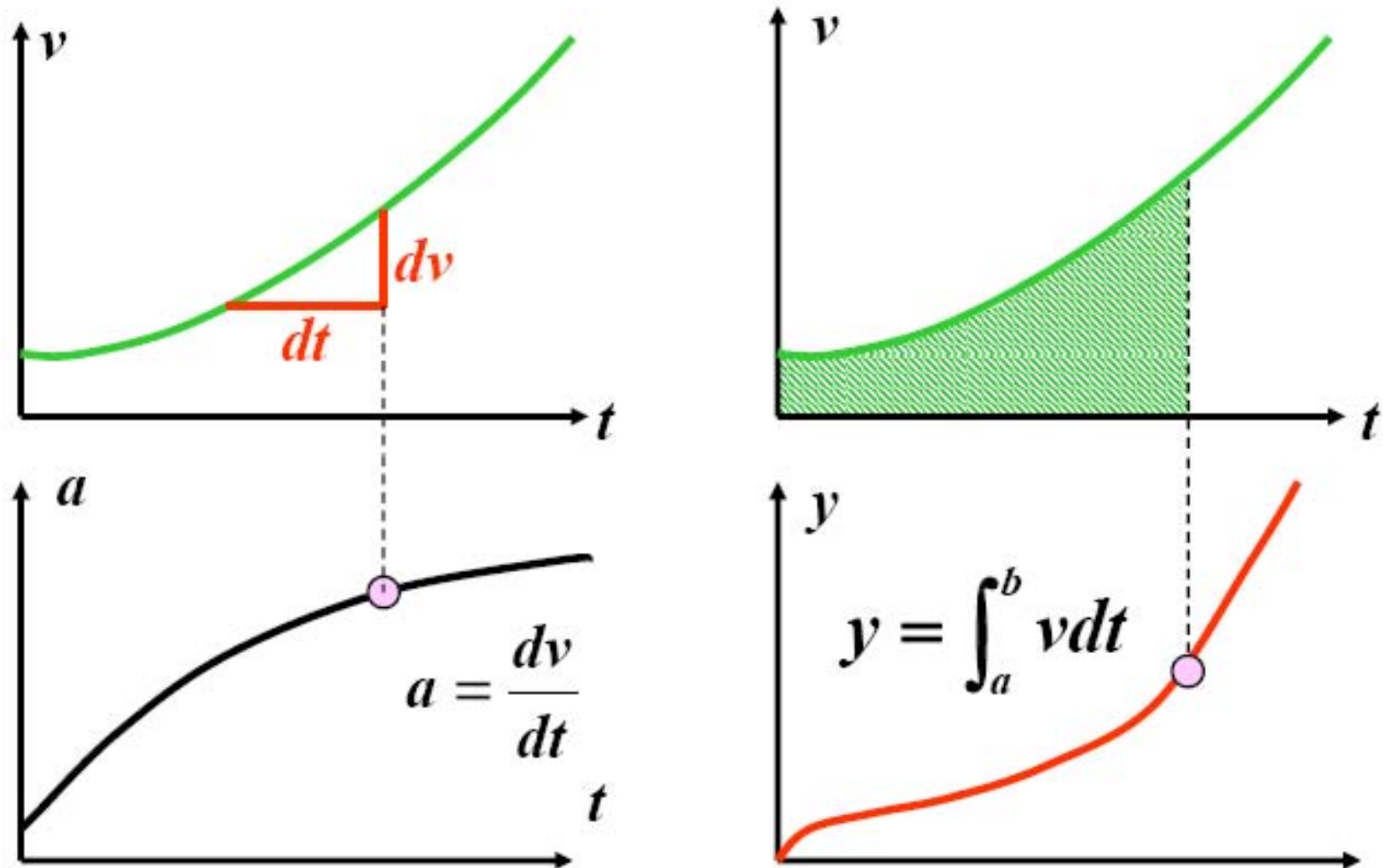
Αργύρης Δελής

Διάλεξη 13η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

ΚΕΦ. 5: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ



ΜΕΡΟΣ Α: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ (ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ)

- Πολλές φορές η παράγωγος, καθώς και παράγωγοι ανώτερης τάξης, μίας συνάρτησης f είναι δύσκολο να υπολογιστούν, λόγω της πολυπλοκότητάς της.

ΜΕΡΟΣ Α: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ (ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ)

- Πολλές φορές η παράγωγος, καθώς και παράγωγοι ανώτερης τάξης, μίας συνάρτησης f είναι δύσκολο να υπολογιστούν, λόγω της πολυπλοκότητάς της.
- Άλλες φορές γνωρίζουμε **διακριτές** τιμές μίας συνάρτησης ή έχουμε δεδομένα (x_i, y_i) και θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο (μεταβολή) σε κάποιο από τα x_i ή και σε σημεία $x \neq x_i$.

ΜΕΡΟΣ Α: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ (ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ)

- Πολλές φορές η παράγωγος, καθώς και παράγωγοι ανώτερης τάξης, μίας συνάρτησης f είναι δύσκολο να υπολογιστούν, λόγω της πολυπλοκότητάς της.
- Άλλες φορές γνωρίζουμε **διακριτές** τιμές μίας συνάρτησης ή έχουμε δεδομένα (x_i, y_i) και θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο (μεταβολή) σε κάποιο από τα x_i ή και σε σημεία $x \neq x_i$.
- Η κατασκευή αριθμητικών τύπων παραγωγίσης κυρίως στηρίζεται σε **χρήση αναπτυγμάτων Taylor** και η ακρίβεια των παραγόμενων τύπων εξαρτάται κυρίως από το πλήθος των όρων των αναπτυγμάτων που χρησιμοποιούνται καθώς και από τη μορφή της συνάρτησης.

ΜΕΡΟΣ Α: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ (ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ)

- Πολλές φορές η παράγωγος, καθώς και παράγωγοι ανώτερης τάξης, μίας συνάρτησης f είναι δύσκολο να υπολογιστούν, λόγω της πολυπλοκότητάς της.
- Άλλες φορές γνωρίζουμε **διακριτές** τιμές μίας συνάρτησης ή έχουμε δεδομένα (x_i, y_i) και θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο (μεταβολή) σε κάποιο από τα x_i ή και σε σημεία $x \neq x_i$.
- Η κατασκευή αριθμητικών τύπων παραγωγίσης κυρίως στηρίζεται σε **χρήση αναπτυγμάτων Taylor** και η ακρίβεια των παραγόμενων τύπων εξαρτάται κυρίως από το πλήθος των όρων των αναπτυγμάτων που χρησιμοποιούνται καθώς και από τη μορφή της συνάρτησης.
- Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού παραγώγων είναι με **χρήση παρεμβολής** (πολυωνυμικής, spline κ.τ.λ.)

Υπολογισμός Παραγώγων μέσω αναπτυγμάτων Taylor

Γνωρίζουμε ότι για συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η παράγωγος σ' ένα σημείο x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Υπολογισμός Παραγώγων μέσω αναπτυγμάτων Taylor

Γνωρίζουμε ότι για συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η παράγωγος σ' ένα σημείο x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η πιο απλή προσέγγιση της παραγώγου μπορεί να δωθεί τότε ως

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (\text{τέμνουσα})$$

Υπολογισμός Παραγώγων μέσω αναπτυγμάτων Taylor

Γνωρίζουμε ότι για συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η παράγωγος σ' ένα σημείο x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η πιο απλή προσέγγιση της παραγώγου μπορεί να δοθεί τότε ως

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (\text{τέμνουσα})$$

Έστω τώρα το ανάπτυγμα Taylor για την $f(x) \in C^n[a, b]$ γύρω από το x

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi_1) \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi_2) \quad (2)$$

Υπολογισμός Παραγώγων μέσω αναπτυγμάτων Taylor

Γνωρίζουμε ότι για συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η παράγωγος σ' ένα σημείο x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η πιο απλή προσέγγιση της παραγώγου μπορεί να δωθεί τότε ως

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (\text{τέμνουσα})$$

Έστω τώρα το ανάπτυγμα Taylor για την $f(x) \in C^n[a, b]$ γύρω από το x

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi_1) \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi_2) \quad (2)$$

Κρατώντας τους δύο πρώτους όρους

$$(1) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(\xi_1) \quad (\text{προς τα εμπρός διαφορά}) \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!}f''(\xi_2) \quad (\text{προς τα πίσω διαφορά}) \quad (4)$$

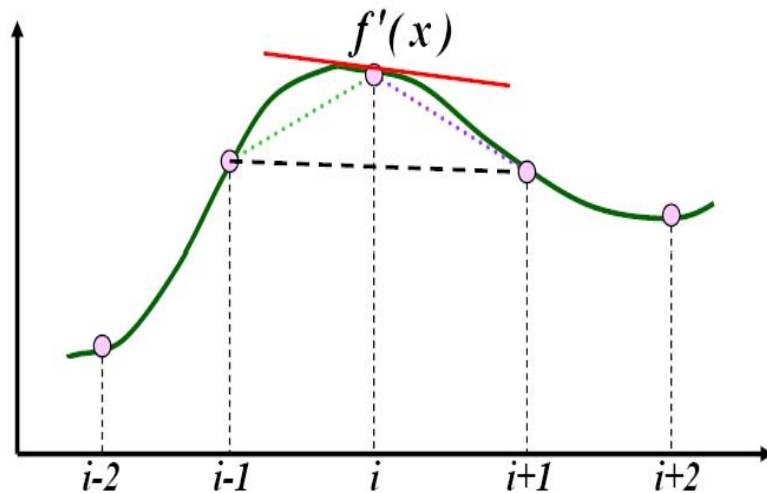
Αφαιρώντας τώρα την (2) από την (1) $\Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad (\text{κεντρική διαφορά}) \quad (5)$$

Αφαιρώντας τώρα την (2) από την (1) $\Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad (\text{κεντρική διαφορά}) \quad (5)$$

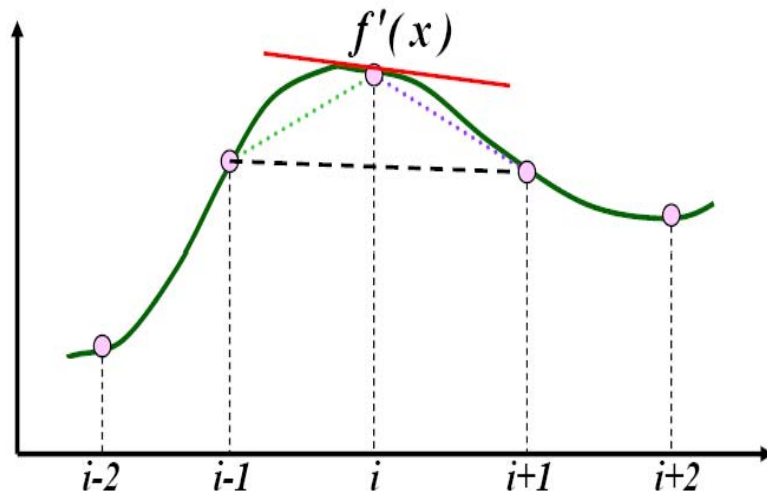
Έστω η συνάρτηση $f(x) \in [a, b]$ σε σημεία $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$



Αφαιρώντας τώρα την (2) από την (1) $\Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad (\text{κεντρική διαφορά}) \quad (5)$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) \in [a, b]$ σε σημεία $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$



$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h)$$

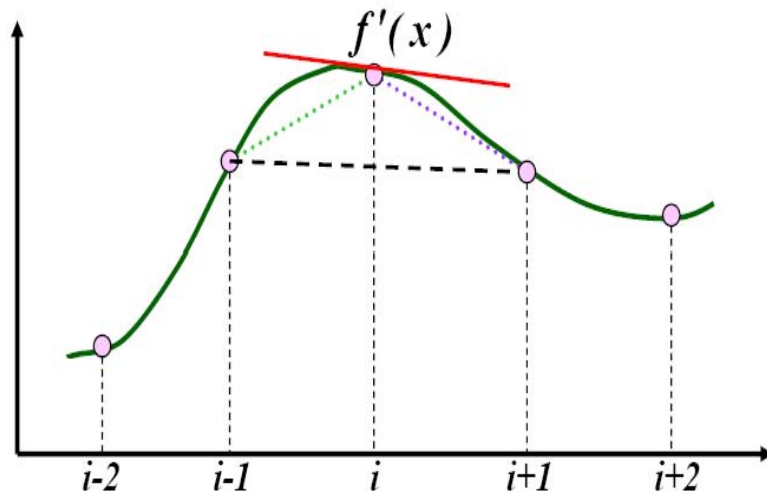
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

- Οι όροι $O(\cdot)$ είναι η ποσότητα **σφάλματος της κάθε προσέγγισης** λόγω αποκοπής των όρων στα αναπτύγματα Taylor.

Αφαιρώντας τώρα την (2) από την (1) $\Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad (\text{κεντρική διαφορά}) \quad (5)$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) \in [a, b]$ σε σημεία $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$



$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

- Οι όροι $O(\cdot)$ είναι η ποσότητα **σφάλματος της κάθε προσέγγισης** λόγω αποκοπής των όρων στα αναπτύγματα Taylor.
- Μιά ποσότητα ψ , που εξαρτάται από το h , είναι **τάξης** k , αν και μόνο αν καθώς το $h \rightarrow 0$ $\exists C \in \mathbf{R} : |\psi(h)| \leq Ch^k$, διαβάζεται O του h^k και γράφουμε $\psi(h) = O(h^k)$.

Προσθέτοντας τις (1) και (2) υπολογίζουμε μια προσέγγιση της $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)] \quad (6)$$

$\Rightarrow$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (7)$$

(Κεντρική διαφορά 3 σημείων).

Προσθέτοντας τις (1) και (2) υπολογίζουμε μια προσέγγιση της $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)] \quad (6)$$

$\Rightarrow$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (7)$$

(Κεντρική διαφορά 3 σημείων).

Αντικαθιστώντας την (7) στο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το x_i

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2}f''(x_i) + O(h^2) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2} \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \Rightarrow \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \end{aligned}$$

Άσκηση Χρησιμοποιήστε εμπρός, πίσω και κεντρικές διαφορές για να εκτιμήσετε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο $x = 0.5$ της $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$, με βήμα $h = 0.5$ και βήμα $h = 0.25$ και συγκρίνεται με την πραγματική τιμή για κάθε περίπτωση.

Άσκηση Χρησιμοποιήστε εμπρός, πίσω και κεντρικές διαφορές για να εκτιμήσετε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο $x = 0.5$ της $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$, με βήμα $h = 0.5$ και βήμα $h = 0.25$ και συγκρίνεται με την πραγματική τιμή για κάθε περίπτωση.

Λύση Για $h = 0.5$ υπολογίζουμε τα

$$x_{i-1} = 0 \quad f(x_{i-1}) = 1.2$$

$$x_i = 0.5 \quad f(x_i) = 0.925$$

$$x_{i+1} = 1.0 \quad f(x_{i+1}) = 0.2$$

Τότε

$$(Ε.Δ) \quad f'(0.5) \approx \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45, \quad (Π.Δ) \quad f'(0.5) \approx \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55$$

$$(Κ.Δ) \quad f'(0.5) \approx \frac{0.2 - 1.2}{2 \cdot 0.5} = -1.0$$

Τύποι προσέγγισης παραγώγων με προς τα εμπρός διαφορές

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (8)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \quad (9)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (10)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} + O(h^2) \quad (11)$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3} + O(h) \quad (12)$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3} + O(h^2) \quad (13)$$

Τύποι προσέγγισης παραγώγων με προς τα πίσω διαφορές

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \quad (14)$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2) \quad (15)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2} + O(h) \quad (16)$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2} + O(h^2) \quad (17)$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^3} + O(h) \quad (18)$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4}))}{2h^3} + O(h^2) \quad (19)$$

Τύποι προσέγγισης παραγώγων με κεντρικές διαφορές

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (20)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h} + O(h^4) \quad (21)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (22)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2} + O(h^4) \quad (23)$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3} + O(h^2) \quad (24)$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3} + O(h^4)$$

Τύποι προσέγγισης παραγώγων με κεντρικές διαφορές

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (20)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h} + O(h^4) \quad (21)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (22)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2} + O(h^4) \quad (23)$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3} + O(h^2) \quad (24)$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3} + O(h^4)$$

Άσκηση Αποδείξτε τους τύπους (9), (15), (16), (17), (21) και (22) και εφαρμόστε τους στην προηγούμενη άσκηση για βήμα $h = 0.25$.

Παραγωγή μέσω πολυωνυμικής παρεμβολής

Υπενθυμίζεται ότι αν $f \in C^{n+1}[a, b]$ και $x_0, x_1, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Έαν $p_n \in \mathbf{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής στα $\{x_i\}_{i=0}^n$ τότε ισχύουν $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \text{για } \xi \in (a, b), \quad (25)$$

όπου

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (\text{μορφή Langrange}) \quad (26)$$

Παραγωγή μέσω πολωνυμικής παρεμβολής

Υπενθυμίζεται ότι αν $f \in C^{n+1}[a, b]$ και $x_0, x_1, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Έαν $p_n \in \mathbf{P}_n$ το πολώνυμο παρεμβολής στα $\{x_i\}_{i=0}^n$ τότε ισχύουν $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \text{για } \xi \in (a, b), \quad (25)$$

όπου

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (\text{μορφή Langrange}) \quad (26)$$

Συνεπώς παραγωγίζοντας την (25)

$$\begin{aligned} f'(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_i(x) &+ \frac{d}{dx} \left[\frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \right] f^{(n+1)}(\xi) + \\ &+ \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} [f^{(n+1)}(\xi)] \end{aligned} \quad (27)$$

Έαν το x πάρει μία τιμή από τις $x_0, x_1, \dots, x_n$ ο τρίτος όρος του αθροίσματος στην (27) μηδενίζεται και συνεπώς

$$f'(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_i(x_i) + \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (28)$$

Έαν το x πάρει μία τιμή από τις $x_0, x_1, \dots, x_n$ ο τρίτος όρος του αθροίσματος στην (27) μηδενίζεται και συνεπώς

$$f'(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_i(x_i) + \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (28)$$

- Αν τα σημεία x_i είναι **ισαπέχοντα** τότε από την σχέση (28) παράγουμε τους αντίστοιχους τύπους προσέγγισης της πρώτης παραγώγου όπως και με τη χρήση αναπτυγμάτων Taylor, επιλέγοντας φυσικά τα κατάλληλα σημεία που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. (**Άσκηση**)

Έαν το x πάρει μία τιμή από τις $x_0, x_1, \dots, x_n$ ο τρίτος όρος του αθροίσματος στην (27) μηδενίζεται και συνεπώς

$$f'(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_i(x_i) + \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (28)$$

- Αν τα σημεία x_i είναι **ισαπέχοντα** τότε από την σχέση (28) παράγουμε τους αντίστοιχους τύπους προσέγγισης της πρώτης παραγώγου όπως και με τη χρήση αναπτυγμάτων Taylor, επιλέγοντας φυσικά τα κατάλληλα σημεία που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. (**Άσκηση**)
- Η παραγωγή με παρεμβολή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν τα σημεία (ή τα δεδομένα) δεν είναι ισαπέχοντα.

Έαν το x πάρει μία τιμή από τις $x_0, x_1, \dots, x_n$ ο τρίτος όρος του αθροίσματος στην (27) μηδενίζεται και συνεπώς

$$f'(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_i(x_i) + \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (28)$$

- Αν τα σημεία x_i είναι **ισαπέχοντα** τότε από την σχέση (28) παράγουμε τους αντίστοιχους τύπους προσέγγισης της πρώτης παραγώγου όπως και με τη χρήση αναπτυγμάτων Taylor, επιλέγοντας φυσικά τα κατάλληλα σημεία που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. (**Άσκηση**)
- Η παραγωγή με παρεμβολή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν τα σημεία (η τα δεδομένα) δεν είναι ισαπέχοντα.
- Υπενθυμίζεται ότι η για παραγωγή με παρεμβολή κυβικών splines έχουμε και αντίστοιχες εκτιμήσεις σφάλματος μέχρι παραγώγους **τρίτης** τάξης.

Παράδειγμα Η ροή θερμότητας στο μέτωπο αέρα/επιφάνεια του εδάφους όπως δίνεται από το νόμο Fourier είναι

$$q \Big|_{z=0} = -k\rho C \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0}$$

όπου

q = ροή θερμότητας, > 0 από τον αέρα στο έδαφος, σε W/m^2 ,

k = συντελεστής θερμικής διάχυσης στο έδαφος $\approx 3.5 \cdot 10^{-7} m^2/s$

ρ = πυκνότητα εδάφους $\approx 1800 Kg/m^3$

C = ειδική θερμότητα εδάφους $\approx 840 J/(Kg \cdot ^\circ C)$

Παράδειγμα Η ροή θερμότητας στο μέτωπο αέρα/επιφάνεια του εδάφους όπως δίνεται από το νόμο Fourier είναι

$$q \Big|_{z=0} = -k\rho C \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0}$$

όπου

q = ροή θερμότητας, > 0 από τον αέρα στο έδαφος, σε W/m^2 ,

k = συντελεστής θερμικής διάχυσης στο έδαφος $\approx 3.5 \cdot 10^{-7} m^2/s$

ρ = πυκνότητα εδάφους $\approx 1800 Kg/m^3$

C = ειδική θερμότητα εδάφους $\approx 840 J/(Kg \cdot ^\circ C)$

Χρησιμοποιήστε αριθμητική διαφόριση για τον υπολογισμό της αλλαγής θερμοκρασίας (dT/dz) στο μέτωπο ($z = 0$) αέρα/έδαφος και υπολογίστε το q στην επιφάνεια του εδάφους έχοντας τα πειραματικά δεδομένα

$z_i(cm)$	0	1.25	3.75
$T_i(^{\circ}C)$	13.5	12	10

Από τον τύπο (28) και χωρίς τον όρο του σφάλματος, χρειάζεται να υπολογιστούν τα πολυώνυμα $L_0(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ καθώς και τα $L'_0(z)$, $L'_1(z)$, $L'_2(z)$ έτσι ώστε

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = T'(0) = \sum_{i=0}^n T_i L'_i(z_i)$$

Από τον τύπο (28) και χωρίς τον όρο του σφάλματος, χρειάζεται να υπολογιστούν τα πολυώνυμα $L_0(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ καθώς και τα $L'_0(z)$, $L'_1(z)$, $L'_2(z)$ έτσι ώστε

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = T'(0) = \sum_{i=0}^n T_i L'_i(z_i)$$

Έχουμε

$$L'_0(z) = \frac{2z - z_1 - z_2}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} \quad L'_1(z) = \frac{2z - z_0 - z_2}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)}, \quad L'_2(z) = \frac{2z - z_0 - z_1}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)}$$

Από τον τύπο (28) και χωρίς τον όρο του σφάλματος, χρειάζεται να υπολογιστούν τα πολυώνυμα $L_0(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ καθώς και τα $L'_0(z)$, $L'_1(z)$, $L'_2(z)$ έτσι ώστε

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = T'(0) = \sum_{i=0}^n T_i L'_i(z_i)$$

Έχουμε

$$L'_0(z) = \frac{2z - z_1 - z_2}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} \quad L'_1(z) = \frac{2z - z_0 - z_2}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)}, \quad L'_2(z) = \frac{2z - z_0 - z_1}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)}$$

Αντικαθιστώντας

$$T'(0) = 13.5 \frac{2(0) - 1.25 - 3.75}{(0 - 1.25)(0 - 3.75)} + 12 \frac{2(0) - 0 - 3.75}{(1.25 - 0)(1.25 - 3.75)} + 10 \frac{2(0) - 0 - 1.25}{(3.75 - 0)(3.75 - 1.25)}$$

$$\Rightarrow T'(0) = -1.333333^\circ\text{C}/\text{cm} = -133.3333^\circ\text{C}/\text{m}$$

Από τον τύπο (28) και χωρίς τον όρο του σφάλματος, χρειάζεται να υπολογιστούν τα πολυώνυμα $L_0(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ καθώς και τα $L'_0(z)$, $L'_1(z)$, $L'_2(z)$ έτσι ώστε

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = T'(0) = \sum_{i=0}^n T_i L'_i(z_i)$$

Έχουμε

$$L'_0(z) = \frac{2z - z_1 - z_2}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} \quad L'_1(z) = \frac{2z - z_0 - z_2}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)}, \quad L'_2(z) = \frac{2z - z_0 - z_1}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)}$$

Αντικαθιστώντας

$$T'(0) = 13.5 \frac{2(0) - 1.25 - 3.75}{(0 - 1.25)(0 - 3.75)} + 12 \frac{2(0) - 0 - 3.75}{(1.25 - 0)(1.25 - 3.75)} + 10 \frac{2(0) - 0 - 1.25}{(3.75 - 0)(3.75 - 1.25)}$$

$$\Rightarrow T'(0) = -1.333333^\circ\text{C}/\text{cm} = -133.3333^\circ\text{C}/\text{m}$$

$$\text{Άρα } q \Big|_{z=0} = 70.56 \text{ W}/\text{m}^2. \quad (1 \text{ W} = 1 \text{ J}/\text{s})$$

Αριθμητική παραγωγή με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών

Εστω ότι δίνονται διακριτές τιμές $(x_i, f(x_i))$ και έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν τύπο αριθμητικής παραγωγής της μορφής

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) \approx f'(x_k),$$

θέλουμε τότε να υπολογίσουμε τα $w_0, w_1, \dots, w_n$ (τα λεγόμενα **βάρη**), ώστε να είναι όσο το **δυνατόν πιο ακριβής**.

Αριθμητική παραγωγή με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών

Εστω ότι δίνονται διακριτές τιμές $(x_i, f(x_i))$ και έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν τύπο αριθμητικής παραγωγής της μορφής

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) \approx f'(x_k),$$

θέλουμε τότε να υπολογίσουμε τα $w_0, w_1, \dots, w_n$ (τα λεγόμενα **βάρη**), ώστε να είναι όσο το **δυνατόν πιο ακριβής**.

Για να το πετύχουμε αυτό ζητάμε ο τύπος να παραγωγίζει ακριβώς πολυώνυμα έως και n -βαθμού.

Αριθμητική παραγωγή με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών

Εστω ότι δίνονται διακριτές τιμές $(x_i, f(x_i))$ και έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν τύπο αριθμητικής παραγωγής της μορφής

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) \approx f'(x_k),$$

θέλουμε τότε να υπολογίσουμε τα $w_0, w_1, \dots, w_n$ (τα λεγόμενα **βάρη**), ώστε να είναι όσο το **δυνατόν πίο ακριβής**.

Για να το πετύχουμε αυτό ζητάμε ο τύπος να παραγωγίζει ακριβώς πολυώνυμα έως και n -βαθμού.

Δηλαδή, αν η $f(x) \equiv p_n(x)$, τότε σε κάποιο σημείο x_k , $k \in 0, 1, 2, \dots, n$

$$p'_n(x_k) = w_0 p_n(x_0) + w_1 p_n(x_1) + \cdots + w_n p_n(x_n)$$

Χρησιμοποιώντας τη βάση του $\mathbf{P}_n$, $\phi_i(x) = x^i$, $i = 0, \dots, n$ έχουμε θέτωντας διαδοχικά $p_n(x) = x^i$ για $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\phi'_0(x_k) &= w_0\phi_0(x_0) + w_1\phi_0(x_1) + \cdots + w_n\phi_0(x_n) \\
\phi'_1(x_k) &= w_0\phi_1(x_0) + w_1\phi_1(x_1) + \cdots + w_n\phi_1(x_n) \\
\phi'_2(x_k) &= w_0\phi_2(x_0) + w_1\phi_2(x_1) + \cdots + w_n\phi_2(x_n) \\
&\vdots \\
\phi'_n(x_k) &= w_0\phi_n(x_0) + w_1\phi_n(x_1) + \cdots + w_n\phi_n(x_n)
\end{aligned}$$

και λύνουμε το γραμμικό $(n + 1) \times (n + 1)$ σύστημα ως προς τα βάρη $w_0, w_1, \dots, w_n$.

$$\begin{aligned}
\phi'_0(x_k) &= w_0\phi_0(x_0) + w_1\phi_0(x_1) + \cdots + w_n\phi_0(x_n) \\
\phi'_1(x_k) &= w_0\phi_1(x_0) + w_1\phi_1(x_1) + \cdots + w_n\phi_1(x_n) \\
\phi'_2(x_k) &= w_0\phi_2(x_0) + w_1\phi_2(x_1) + \cdots + w_n\phi_2(x_n) \\
&\vdots \\
\phi'_n(x_k) &= w_0\phi_n(x_0) + w_1\phi_n(x_1) + \cdots + w_n\phi_n(x_n)
\end{aligned}$$

και λύνουμε το γραμμικό $(n+1) \times (n+1)$ σύστημα ως προς τα βάρη $w_0, w_1, \dots, w_n$.

Παράδειγμα Να υπολογιστούν τα βάρη w_{-1}, w_1 έτσι ώστε ο προσεγγιστικός τύπος της αριθμητικής παραγωγίσης $w_{-1}f(x_{-1}) + w_1f(x_1)$ να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής, για την προσέγγιση του $f'(x_0)$, στα σημεία $x_i = x_0 + ih, i = -1, 0, 1$.

$$\begin{aligned}
\phi'_0(x_k) &= w_0\phi_0(x_0) + w_1\phi_0(x_1) + \cdots + w_n\phi_0(x_n) \\
\phi'_1(x_k) &= w_0\phi_1(x_0) + w_1\phi_1(x_1) + \cdots + w_n\phi_1(x_n) \\
\phi'_2(x_k) &= w_0\phi_2(x_0) + w_1\phi_2(x_1) + \cdots + w_n\phi_2(x_n) \\
&\vdots \\
\phi'_n(x_k) &= w_0\phi_n(x_0) + w_1\phi_n(x_1) + \cdots + w_n\phi_n(x_n)
\end{aligned}$$

και λύνουμε το γραμμικό $(n+1) \times (n+1)$ σύστημα ως προς τα βάρη $w_0, w_1, \dots, w_n$.

Παράδειγμα Να υπολογιστούν τα βάρη w_{-1}, w_1 έτσι ώστε ο προσεγγιστικός τύπος της αριθμητικής παραγωγής $w_{-1}f(x_{-1}) + w_1f(x_1)$ να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής, για την προσέγγιση του $f'(x_0)$, στα σημεία $x_i = x_0 + ih, i = -1, 0, 1$.

Λύση Για $f(x) = p(x) = 1$ και $f(x) = p(x) = x$ έχουμε

$$1' = 0 = w_{-1} \cdot 1 + w_1 \cdot 1$$

$$x' = 1 = w_{-1} \cdot x_{-1} + w_1 \cdot x_1 = w_{-1} \cdot (x_0 - h) + w_1 \cdot (x_0 + h)$$

$\Rightarrow$

$$w_{-1} + w_1 = 0$$

$$(-w_{-1} + w_1)h = 1$$

$$\Rightarrow w_1 = -w_{-1} = \frac{1}{h}. \text{ Συνεπώς}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h} \quad (\text{κεντρική διαφορά})$$

$$1' = 0 = w_{-1} \cdot 1 + w_1 \cdot 1$$

$$x' = 1 = w_{-1} \cdot x_{-1} + w_1 \cdot x_1 = w_{-1} \cdot (x_0 - h) + w_1 \cdot (x_0 + h)$$

$\Rightarrow$

$$w_{-1} + w_1 = 0$$

$$(-w_{-1} + w_1)h = 1$$

$$\Rightarrow w_1 = -w_{-1} = \frac{1}{h}. \text{ Συνεπώς}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h} \quad (\text{κεντρική διαφορά})$$

Άσκηση Να προσδιοριστούν τα w_0, w_1, w_2 ώστε ο προσεγγιστικός τύπος της αριθμητικής παραγωγής $\left(w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \right) / h$ να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής, για την προσέγγιση του $f'(x_0)$, με $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, 2$.

Η μέθοδος παρεκβολής (extrapolation) Richardson

Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται για να δώσει αποτελέσματα υψηλής ακρίβειας χρησιμοποιώντας τύπους χαμηλής τάξης σφάλματος.

Η ιδέα: Έστω μία ποσότητα D που προσεγγίζεται από έναν υπολογιστικό τύπο $q(h)$ με σφάλμα $O(h)$ ως

$$D = q(h) + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots, \quad h > 0, \quad c_i \text{ κατάλληλες σταθερές} \quad (29)$$

Αν αντικαταστήσουμε το h με $\frac{h}{2}$ στην (29) έχουμε

$$D = q\left(\frac{h}{2}\right) + c_1 \frac{h}{2} + c_2 \frac{h^2}{4} + c_3 \frac{h^3}{8} + \dots \quad (30)$$

Διπλασιάζουμε την (30) και αφαιρούμε την (29) (απαλείφουμε το c_1)

$$D = \left[q\left(\frac{h}{2}\right) + \left(q\left(\frac{h}{2}\right) - q(h) \right) \right] + c_2 \left(\frac{h^2}{2} - h^2 \right) + c_3 \left(\frac{h^3}{4} - h^3 \right) + \dots \quad (31)$$

Η νέα αυτή προσέγγιση του D έχει σφάλμα $O(h^2)$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} q_1(h) &= q(h) \quad \text{και} \\ q_2(h) &= \left[q_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(q_1\left(\frac{h}{2}\right) - q_1(h) \right) \right] \quad \text{τότε} \\ D &= q_2(h) - c_2 \frac{h^2}{2} - c_3 \frac{3h^3}{4} - \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Αν αντικαταστήσουμε το h με $\frac{h}{2}$ στη (32) και τετραπλασιάσουμε, τότε αφαιρώντας την (31) (απαλείφουμε το c_2) έχουμε

$$D = \left[q_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{q_2\left(\frac{h}{2}\right) - q_2(h)}{3} \right] + c_3 \frac{7h^3}{32} + \dots$$

Η νέα αυτή προσέγγιση του D έχει σφάλμα $O(h^3)$ και θέτουμε

$$q_3(h) = \left[q_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{q_2\left(\frac{h}{2}\right) - q_2(h)}{3} \right]$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία κατασκευάζουμε για $k = 2, 3, \dots, m$ τον προσεγγιστικό τύπο με σφάλμα $O(h^k)$

$$q_k(h) = \frac{2^{k-1}q_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) - q_{k-1}(h)}{2^{k-1} - 1}$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία κατασκευάζουμε για $k = 2, 3, \dots, m$ τον προσεγγιστικό τύπο με σφάλμα $O(h^k)$

$$q_k(h) = \frac{2^{k-1}q_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) - q_{k-1}(h)}{2^{k-1} - 1}$$

Έαν ο αρχικός προσεγγιστικός τύπος έχει στους όρους σφάλματος **άρτιες δυνάμεις του h** , τότε θα έχουμε σφάλμα προσέγγισης $O(h^{2k})$ και

$$q_k(h) = \frac{4^{k-1}q_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) - q_{k-1}(h)}{4^{k-1} - 1}$$

Άσκηση Να βρεθεί η προσεγγιστική τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = x \ln x$ στο σημείο $x_0 = 2$ με $h = 0.1$ με ακρίβεια $O(h^4)$ και χρήση της τεχνικής Richardson.

Άσκηση Να βρεθεί η προσεγγιστική τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = x \ln x$ στο σημείο $x_0 = 2$ με $h = 0.1$ με ακρίβεια $O(h^4)$ και χρήση της τεχνικής Richardson.

Λύση Ξεκινώντας από το τύπο κεντρικών διαφορών (με **άρτια τάξη** σφάλματος)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2)$$

θέτουμε

$$q_1(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \Rightarrow$$

$$q_1(0.1) = \frac{1}{0.2} \left[(2.1) \cdot \ln(2.1) - (1.9) \cdot \ln(1.9) \right] = 1.692728$$

και

$$q_1(h/2) = \frac{1}{h} \left[f(x_0 + h/2) - f(x_0 - h/2) \right] \Rightarrow$$

$$q_1(0.05) = \frac{1}{0.1} \left[(2.05) \cdot \ln(2.05) - (1.95) \cdot \ln(1.95) \right] = 1.693043$$

Για $k = 2$ έχουμε

$$q_2(h) = \frac{4q_1(\frac{h}{2}) - q_1(h)}{4 - 1} \Rightarrow$$
$$q_2(0.1) = \frac{4q_1(0.05) - q_1(0.1)}{3} = 1.693148$$

Για $k = 2$ έχουμε

$$q_2(h) = \frac{4q_1(\frac{h}{2}) - q_1(h)}{4 - 1} \Rightarrow$$
$$q_2(0.1) = \frac{4q_1(0.05) - q_1(0.1)}{3} = 1.693148$$

Η ακριβής τιμή της παραγώγου είναι

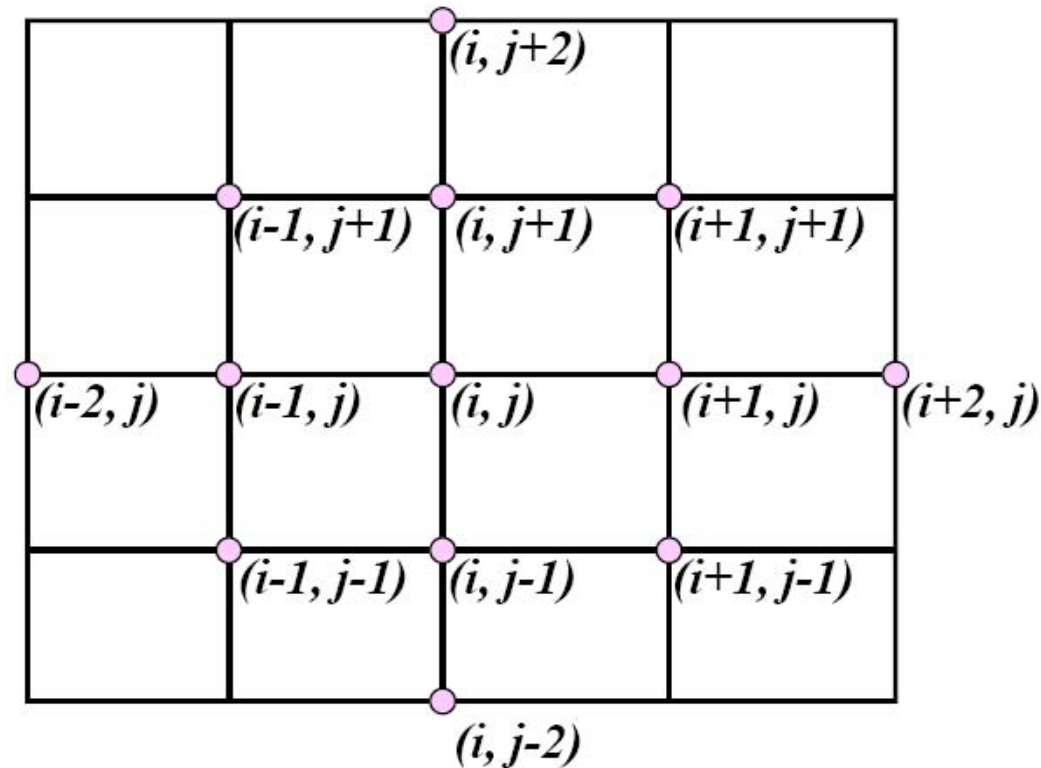
$$f'(2) = \ln(2) + 1 = 1.693147$$

Έχουμε δηλ. σωστά 5 δεκαδικά ψηφία ενώ στις $q_1(0.1)$ και $q_1(0.05)$ μόνο 2 και 3, αντίστοιχα!

Υπολογισμός Μερικών Παραγώγων

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2h} \{ \textcolor{teal}{-1} - \textcolor{teal}{0} - \textcolor{teal}{1} \}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \{ \textcolor{teal}{1} - \textcolor{teal}{-2} - \textcolor{teal}{1} \}$$



$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} =$$

$$\frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{ccc} & \textcircled{1} & \\ & | & \\ \textcircled{1} & - & \textcircled{-4} & - & \textcircled{1} \\ & | & \\ & \textcircled{1} & \end{array} \right\} \begin{array}{l} j+1 \\ j \\ j-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} i-1 & i & i+1 \end{array}$$

$$u_{xy} = \frac{1}{4h^2} \left\{ \begin{array}{ccc} \textcircled{-1} & - & 0 & - & \textcircled{1} \\ | & & | & & | \\ 0 & - & 0 & - & 0 \\ | & & | & & | \\ \textcircled{1} & - & 0 & - & \textcircled{-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} j+1 \\ j \\ j-1 \end{array}$$

$i-1 \qquad i \qquad i+1$