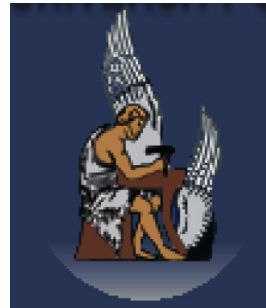


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 8η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Κεφ. 3: Παρεμβολή

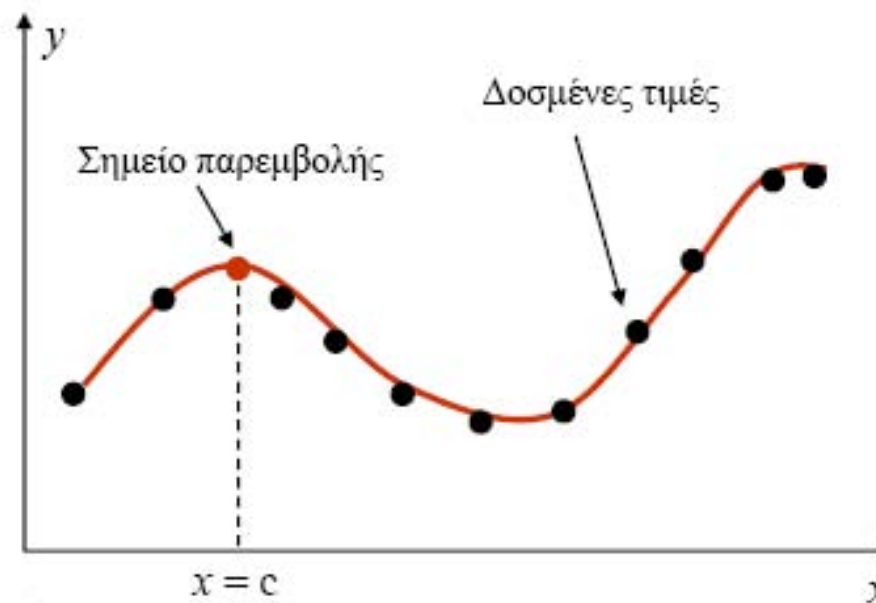
- Σε πολλά πρακτικά προβλήματα (π.χ. πειράματα) γνωρίζουμε τιμές σέ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $\{x_i\}$ (π.χ. μετρήσεις) μίας **άγνωστης** συνάρτησης f . Το ερώτημα εδώ είναι αν μπορούμε να **προσεγγίσουμε** την f με μία άλλη συνάρτηση η οποία είναι εύκολο να υπολογιστεί.

Κεφ. 3: Παρεμβολή

- Σε πολλά πρακτικά προβλήματα (π.χ. πειράματα) γνωρίζουμε τιμές σέ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $\{x_i\}$ (π.χ. μετρήσεις) μίας **άγνωστης** συνάρτησης f . Το ερώτημα εδώ είναι αν μπορούμε να **προσεγγίσουμε** την f με μία άλλη συνάρτηση η οποία είναι εύκολο να υπολογιστεί.
- Ειδικότερα, αν μας δίνουν σημεία $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$, τα οποία αντιστοιχούν σε $n + 1$ "μετρήσεις" στα x_i σημεία της μεταβλητής y θέλουμε να **παρεμβάλουμε** μία άλλη συνάρτηση $p(x)$ στα δεδομένα τ.ω.
$$p(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Κεφ. 3: Παρεμβολή

- Σε πολλά πρακτικά προβλήματα (π.χ. πειράματα) γνωρίζουμε τιμές σέ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $\{x_i\}$ (π.χ. μετρήσεις) μίας **άγνωστης** συνάρτησης f . Το ερώτημα εδώ είναι αν μπορούμε να **προσεγγίσουμε** την f με μία άλλη συνάρτηση η οποία είναι εύκολο να υπολογιστεί.
- Ειδικότερα, αν μας δίνουν σημεία $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$, τα οποία αντιστοιχούν σε $n + 1$ "μετρήσεις" στα x_i σημεία της μεταβλητής y θέλουμε να **παρεμβάλουμε** μία άλλη συνάρτηση $p(x)$ στα δεδομένα τ.ω.
 $p(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$.



Πολυωνυμική Παρεμβολή

Δίνονται τα σημεία (δεδομένα)

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array} \quad n + 1 \text{ τιμές}$$

Το πρόβλημα: ζητάμε να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο $p_n(x)$, **βαθμού το πολύ n** τ.ω.

$$p_n(x_i) = y_i (= f(x_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Το $p_n(x)$ θα ονομάζεται **πολυώνυμο παρεμβολής** (στα δοσμένα σημεία).

Πολυωνυμική Παρεμβολή

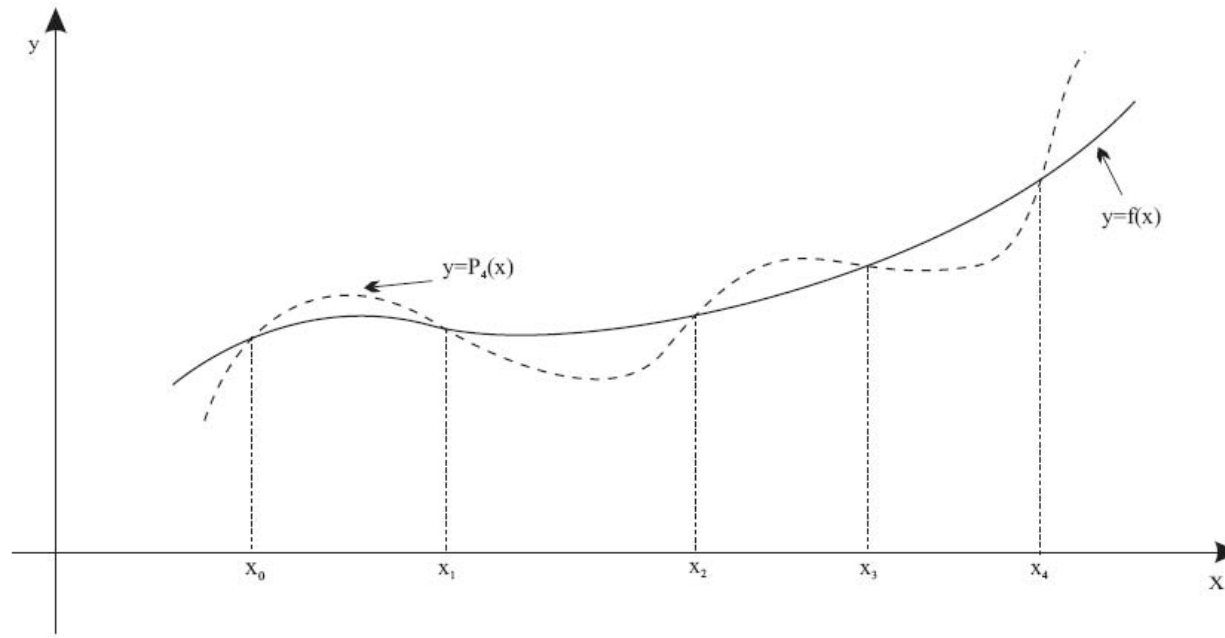
Δίνονται τα σημεία (δεδομένα)

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array} \quad n + 1 \text{ τιμές}$$

Το πρόβλημα: ζητάμε να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο $p_n(x)$, **βαθμού το πολύ n** τ.ω.

$$p_n(x_i) = y_i (= f(x_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Το $p_n(x)$ θα ονομάζεται **πολυώνυμο παρεμβολής** (στα δοσμένα σημεία).



Γιατί παρεμβάλουμε πολυώνυμα;

- Μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, μ'ένα πεπερασμένο πλήθος πράξεων.
- Παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται εύκολα
- Έχουν καλές προσεγγιστικές ιδιότητες

Θεώρημα Προσέγγισης Weierstrass: Εάν $f \in C[a, b]$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο P_ε στο $[a, b]$ τ.ω.

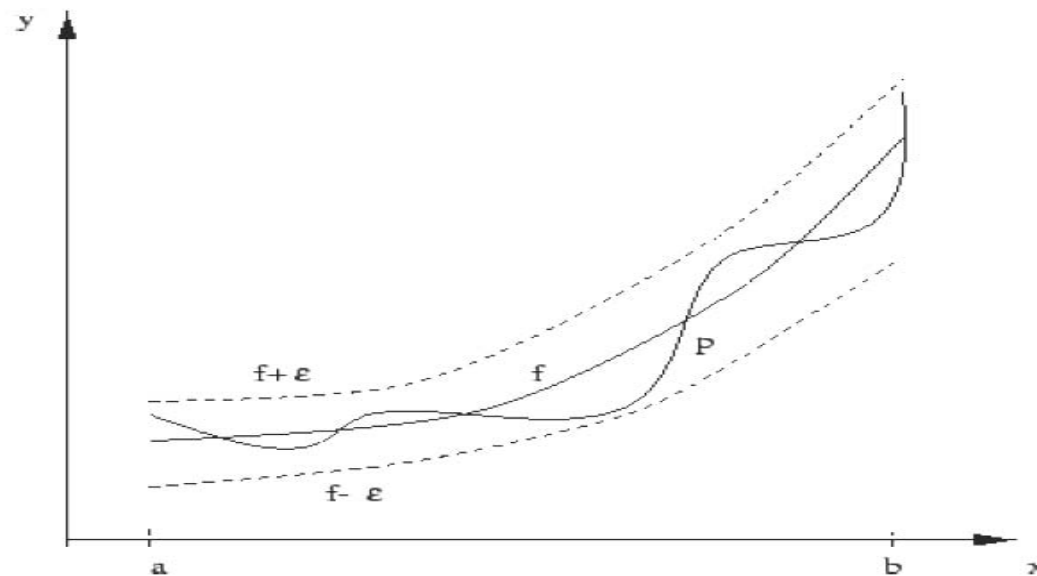
$$\|f - P_\varepsilon\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_\varepsilon| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Γιατί παρεμβάλλουμε πολυώνυμα;

- Μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, μ' ένα πεπερασμένο πλήθος πράξεων.
- Παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται εύκολα
- Έχουν καλές προσεγγιστικές ιδιότητες

Θεώρημα Προσέγγισης Weierstrass: Εάν $f \in C[a, b]$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο P_ε στο $[a, b]$ τ.ω.

$$\|f - P_\varepsilon\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_\varepsilon| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$



Πολυωνυμική Παρεμβολή

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange): Έστω $\{x_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}$ να είναι $n + 1$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $\{y_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}$. Τότε $\exists$ **μοναδικό** πολυώνυμο p **βαθμού το πολύ n** (γράφουμε $p \in \mathbf{P}_n$) τ.ω.
$$p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n.$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange): Έστω $\{x_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}$ να είναι $n + 1$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $\{y_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}$. Τότε $\exists$ **μοναδικό** πολυώνυμο p **βαθμού το πολύ n** (γράφουμε $p \in \mathbf{P}_n$) τ.ω.

$$p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n.$$

Απόδειξη: Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ με άγνωστους $a_0, a_1, \dots, a_n$. Από τη σχέση $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ έχουμε $(n + 1)$ εξισώσεις με $(n + 1)$ αγνώστους.

$$V\mathbf{a} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & : & : & & \\ : & : & : & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ : \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ο πίνακας V λέγεται πίνακας Vandermonde.

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange): Έστω $\{x_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}$ να είναι $n + 1$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $\{y_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}$. Τότε $\exists$ **μοναδικό** πολυώνυμο p **βαθμού το πολύ n** (γράφουμε $p \in \mathbf{P}_n$) τ.ω.

$$p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n.$$

Απόδειξη: Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ με άγνωστους $a_0, a_1, \dots, a_n$. Από τη σχέση $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ έχουμε $(n + 1)$ εξισώσεις με $(n + 1)$ αγνώστους.

$$V \mathbf{a} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & : & : & & \\ : & : & : & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ : \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ο πίνακας V λέγεται πίνακας Vandermonde.

Το σύστημα (1) λύνεται μοναδικά (γιατί;)

Παράσταση και κατασκευή του πολωνύμου παρεμβολής

Παράσταση στη μορφή Lagrange

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και έστω το n -βαθμού πολυώνυμο $L_i(x)$

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \end{aligned}$$

που μηδενίζεται στα $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, δηλ.

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Παράσταση και κατασκευή του πολωνύμου παρεμβολής

Παράσταση στη μορφή Lagrange

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και έστω το n -βαθμού πολυώνυμο $L_i(x)$

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \end{aligned}$$

που μηδενίζεται στα $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, δηλ.

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Τα πολυώνυμα $L_0, \dots, L_n$ λέγονται πολυώνυμα Lagrange

Παράσταση στη μορφή Lagrange

Το άθροισμα πολυωνύμων n –βαθμού $\Rightarrow$ n –βαθμού πολυώνυμο και τότε

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad (\text{παράσταση σε μορφή Lagrange})$$

Παράσταση στη μορφή Lagrange

Το άθροισμα πολυωνύμων n –βαθμού $\Rightarrow$ n –βαθμού πολυώνυμο και τότε

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad (\text{παράσταση σε μορφή Lagrange})$$

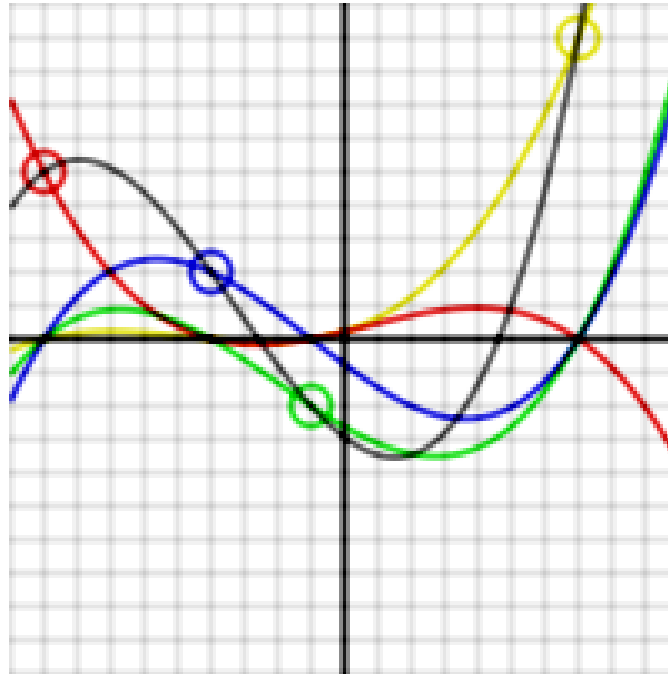
Αν $f(x)$ συνάρτηση τ.ω. $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ τότε το πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange είναι

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (2)$$

Το πολυώνυμο $p(x)$ που κατασκευάζεται στη (2) είναι προφανώς n –βαθμού, μοναδικό ως προς τα σημεία $\{x_i\}_{i=0}^n$ και έχει την τιμή $f(x_k)$ στο $x = x_k$ για $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Έστω τα σημεία $(-9, 5)$, $(-4, 2)$, $(-1, -2)$, $(7, 9)$

Το πολυώνυμο παρεμβολής τότε θα είναι το πολύ 3ου βαθμού και τα πολυώνυμα Lagrange $5L_1$, $2L_2$, $(-2)L_3$, $9L_4$



Το πολυώνυμο $p_3(x)$ περνά και από τα 4 σημεία. Τα κάθε πολυώνυμο Lagrange περνά από το αντίστοιχο σημείο και είναι 0 στα υπόλοιπα 3.

Παράδειγμα: Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = -1.5, x_1 = -0.75, x_2 = 0, x_3 = 0.75, x_4 = 1.5$ της $f(x) = \tan(x)$.

Παράδειγμα: Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = -1.5, x_1 = -0.75, x_2 = 0, x_3 = 0.75, x_4 = 1.5$ της $f(x) = \tan(x)$.

Υπολογίζουμε αρχικά τα $f(x_0) = -14.1014, f(x_1) = -0.931596, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0.931596, f(x_4) = 14.1014$.

Παράδειγμα: Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = -1.5, x_1 = -0.75, x_2 = 0, x_3 = 0.75, x_4 = 1.5$ της $f(x) = \tan(x)$.

Υπολογίζουμε αρχικά τα $f(x_0) = -14.1014, f(x_1) = -0.931596, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0.931596, f(x_4) = 14.1014$.
Τα πολυώνυμα Lagrange είναι

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_0 - x_4} = \frac{1}{243}x(2x - 3)(4x - 3)(4x + 3) \\L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_1 - x_4} = -\frac{8}{243}x(2x - 3)(2x + 3)(4x - 3) \\L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{3}{243}(2x + 3)(4x + 3)(4x - 3)(2x - 3) \\L_3(x) &= \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} = -\frac{8}{243}x(2x - 3)(2x + 3)(4x + 3) \\L_4(x) &= \frac{x - x_0}{x_4 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_4 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_4 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{1}{243}x(2x + 3)(4x - 3)(4x + 3)\end{aligned}$$

. . . Παράδειγμα . . . Συνεπώς το πολυώνυμο παρεμβολής

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{243} \left(f(x_0)x(2x-3)(4x-3)(4x+3) \right. \\ &\quad - 8f(x_1)x(2x-3)(2x+3)(4x-3) \\ &\quad + 3f(x_2)(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3) \\ &\quad - 8f(x_3)x(2x-3)(2x+3)(4x+3) \\ &\quad \left. + f(x_4)x(2x+3)(4x-3)(4x+3) \right) \\ &= 4.834848x^3 - 1.477474x. \end{aligned}$$

. . . Παράδειγμα . . . Συνεπώς το πολυώνυμο παρεμβολής

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{243} \left(f(x_0)x(2x-3)(4x-3)(4x+3) \right. \\ &\quad - 8f(x_1)x(2x-3)(2x+3)(4x-3) \\ &\quad + 3f(x_2)(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3) \\ &\quad - 8f(x_3)x(2x-3)(2x+3)(4x+3) \\ &\quad \left. + f(x_4)x(2x+3)(4x-3)(4x+3) \right) \\ &= 4.834848x^3 - 1.477474x. \end{aligned}$$

