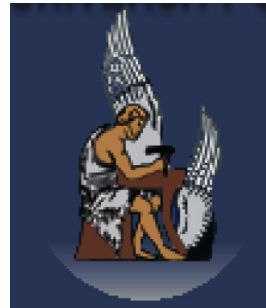


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 7η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Άσκηση: Υπολογισμός του $1/c$ χωρίς διαίρεση. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος NR για δεδομένο $c > 0$ για τον υπολογισμό του $1/c$. Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος συγκλίνει τετραγωνικά και να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του $1/e$ με $x_0 = 0.3$ και ανοχή σφάλματος $\epsilon = 10^{-6}$.

Άσκηση: Υπολογισμός του $1/c$ χωρίς διαίρεση. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος NR για δεδομένο $c > 0$ για τον υπολογισμό του $1/c$. Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος συγκλίνει τετραγωνικά και να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του $1/e$ με $x_0 = 0.3$ και ανοχή σφάλματος $\epsilon = 10^{-6}$.

Παραλλαγή της μεθόδου NR-Μέθοδος σταθερής κλίσης

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Αντικαθιστούμε την $f'(x)$ με μία σταθερή ποσότητα (π.χ. $g = f'(x_0)$)
- Η συνάρτηση επανάληψης είναι $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{g}$ και επιλέγεται g τ.ω. η ϕ συστολή.
- Η μέθοδος συγκλίνει γραμμικά

Η μέθοδος της Τέμνουσας

- Η μέθοδος NR συγκλίνει ταχύτερα από τις μεθόδους αγκυλών, όμως πρέπει να επιλεγεί x_0 κοντά στη ρίζα x^* και να υπολογιστεί η $f'(x)$.
- Στη NR χρειάζεται ο υπολογισμός της $f'(x_n) \quad \forall n$. Αν η f είναι πολύπλοκη συνάρτηση αυτό παρουσιάζει δυσκολίες καθώς ο υπολογισμός πρέπει να είναι ακριβής για να αποφεύγονται σφάλματα στρογγύλευσης.
- Η μέθοδος της τέμνουσας είναι η ενδιάμεση λύση. Η τάξη σύγκλισής της καλύτερη από γραμμική αλλά όχι τετραγωνική και δεν χρειάζεται τον υπολογισμό της παραγώγου.

Η μέθοδος της Τέμνουσας

- Η μέθοδος NR συγκλίνει ταχύτερα από τις μεθόδους αγκυλών, όμως πρέπει να επιλεγεί x_0 κοντά στη ρίζα x^* και να υπολογιστεί η $f'(x)$.
- Στη NR χρειάζεται ο υπολογισμός της $f'(x_n) \quad \forall n$. Αν η f είναι πολύπλοκη συνάρτηση αυτό παρουσιάζει δυσκολίες καθώς ο υπολογισμός πρέπει να είναι ακριβής για να αποφεύγονται σφάλματα στρογγύλευσης.
- Η μέθοδος της τέμνουσας είναι η ενδιάμεση λύση. Η τάξη σύγκλισής της καλύτερη από γραμμική αλλά όχι τετραγωνική και δεν χρειάζεται τον υπολογισμό της παραγώγου.

Αντικαθιστώντας (προσεγγίζοντας) την $f'(x_n)$ με ένα πηλίκο διαφορών

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

προκύπτει η μέθοδος της τέμνουσας.

Η μέθοδος της Τέμνουσας

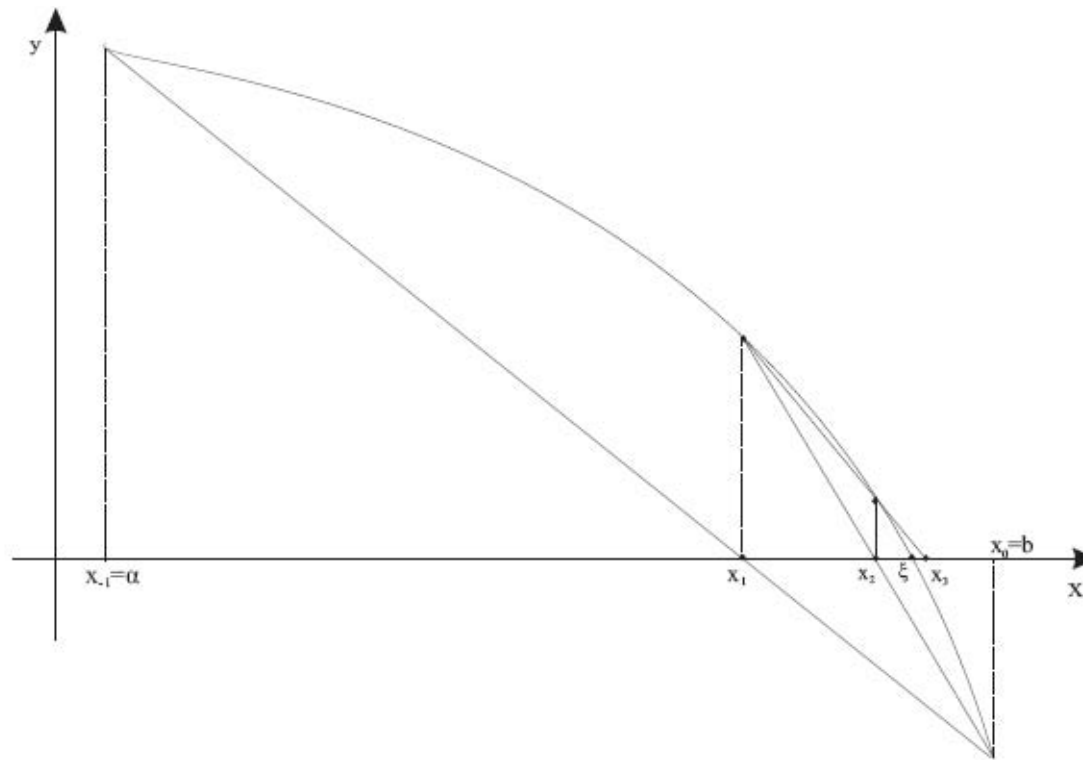
Δίνεται $f \in C[a, b]$ και **δύο** αρχικές προσεγγίσεις x_{-1}, x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η μέθοδος της Τέμνουσας

Δίνεται $f \in C[a, b]$ και **δύο** αρχικές προσεγγίσεις x_{-1}, x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Σχήμα: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της τέμνουσας.

Θεώρημα: Έστω x^* ρίζα μίας συνάρτησης $f(x)$ και $f(x) \in C^2(a, b)$ με $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$. Τότε υπάρχει διάστημα I με $x^* \in I$, τ.ω. για $x_{-1}, x_0 \in I$ η ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}$ που παράγει η μέθοδος της τέμνουσας είναι **καλώς ορισμένη** και συγκλίνει στο x^* . Ισχύει μάλιστα ότι η τάξη σύγκλισης της είναι $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$.

Θεώρημα: Έστω x^* ρίζα μίας συνάρτησης $f(x)$ και $f(x) \in C^2(a, b)$ με $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$. Τότε υπάρχει διάστημα I με $x^* \in I$, τ.ω. για $x_{-1}, x_0 \in I$ η ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}$ που παράγει η μέθοδος της τέμνουσας είναι **καλώς ορισμένη** και συγκλίνει στο x^* . Ισχύει μάλιστα ότι η τάξη σύγκλισης της είναι $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$.

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος απαιτεί μόνο την γνώση της f και όχι της f' .
- Χρειάζεται μια καλή επιλογή των x_{-1}, x_0 για να συγκλίνει.
- Ακόμη και αν η f' είναι γνωστή είναι οικονομικότερη της NR γιατί απαιτεί μόνο τον υπολογισμό του $f(x_n)$ **ανά βήμα**. (Ποια μέθοδος είναι **συνολικά οικονομικότερη** εξαρτάται από το κόστος υπολογισμού της f' σε σχέση μ'αυτόν της f και τον αριθμό των βημάτων για σύγκλιση με ορισμένη ανοχή σφάλματος.)
- Μπορεί να εμφανιστούν περιπτώσεις αποτυχίας όμοιες με αυτές της NR.

Λύση μη γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο NR

Παράδειγμα: έστω το σύστημα

$$xy = z^2 + 1$$

$$xyz + y^2 = x^2 + 2$$

$$e^x + z = e^y + 3$$

Ποιό είναι το διάνυσμα της λύσης $\mathbf{X} = [x, y, z]^T$;

Λύση μη γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο NR

Παράδειγμα: έστω το σύστημα

$$\begin{aligned}xy &= z^2 + 1 \\xyz + y^2 &= x^2 + 2 \\e^x + z &= e^y + 3\end{aligned}$$

Ποιό είναι το διάνυσμα της λύσης $\mathbf{X} = [x, y, z]^T$;

Γενικότερα αν έχουμε

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0\end{aligned}$$

Γενίκευση της μεθόδου NR

Έστω το σύστημα 2 μη-γραμμικών εξισώσεων και έστω $[x_1^*, x_2^*]^T$ η λύση του

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

Από το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0 = f_1(x_1, x_2) + (x_1^* - x_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2) \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dots$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*) = 0 = f_2(x_1, x_2) + (x_1^* - x_1) \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2) \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots$$

Γενίκευση της μεθόδου NR

Έστω το σύστημα 2 μη-γραμμικών εξισώσεων και έστω $[x_1^*, x_2^*]^T$ η λύση του

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

Από το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0 = f_1(x_1, x_2) + (x_1^* - x_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2) \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dots$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*) = 0 = f_2(x_1, x_2) + (x_1^* - x_1) \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2) \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας $\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ και οι παραπάνω

εξισώσεις δίνουν το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) \begin{bmatrix} x_1^* - x_1 \\ x_2^* - x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}(x_1, x_2) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Το σύστημα (1) λύνεται (π.χ. με απαλοιφή Gauss) ή αν $\exists$ ο $\mathbf{J}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(x_1, x_2) \Rightarrow \quad (2)$$

Το σύστημα (1) λύνεται (π.χ. με απαλοιφή Gauss) ή αν $\exists$ ο $\mathbf{J}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(x_1, x_2) \Rightarrow \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(n)} \\ h_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα (1) λύνεται (π.χ. με απαλοιφή Gauss) ή αν $\exists$ ο $\mathbf{J}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(x_1, x_2) \Rightarrow \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(n)} \\ h_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

Γενικεύοντας, για N εξισώσεις, και για αρχικό διάνυσμα $\mathbf{X}^{(0)}$ η μέθοδος NR

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{J}_n^{-1}(\mathbf{X}^{(n)}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

με $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(n)})$, $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq N$ και $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$,
 $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ με $\mathbf{X}, \mathbf{F} \in \mathbf{R}^N$.

Το σύστημα (1) λύνεται (π.χ. με απαλοιφή Gauss) ή αν $\exists$ ο $\mathbf{J}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(x_1, x_2) \Rightarrow \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(n)} \\ h_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

Γενικεύοντας, για N εξισώσεις, και για αρχικό διάνυσμα $\mathbf{X}^{(0)}$ η μέθοδος NR

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{J}_n^{-1}(\mathbf{X}^{(n)}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

με $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(n)})$, $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq N$ και $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$,
 $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ με $\mathbf{X}, \mathbf{F} \in \mathbf{R}^N$.

Κριτήριο Τερματισμού

$$\|\mathbf{H}^{(n+1)}\|_{\infty} = \|\mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^{(n)}\|_{\infty} \leq \delta = 10^{-k}$$

Παράδειγμα: Να εφαρμοστεί ένα βήμα της μεθόδου NR στο σύστημα με $\mathbf{X}^{(0)} = [x^{(0)}, y^{(0)}]^T = [1, 1]^T$.

$$f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1 = 0$$

$$f_2(x, y) = 3x^2y - y^3 = 0$$

Παράδειγμα: Να εφαρμοστεί ένα βήμα της μεθόδου NR στο σύστημα με $\mathbf{X}^{(0)} = [x^{(0)}, y^{(0)}]^T = [1, 1]^T$.

$$f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1 = 0$$

$$f_2(x, y) = 3x^2y - y^3 = 0$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας $\mathbf{J}(x, y)$ είναι

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}, \det(\mathbf{J}) = 9(x^2 + y^2)^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_0^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Να εφαρμοστεί ένα βήμα της μεθόδου NR στο σύστημα με $\mathbf{X}^{(0)} = [x^{(0)}, y^{(0)}]^T = [1, 1]^T$.

$$f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1 = 0$$

$$f_2(x, y) = 3x^2y - y^3 = 0$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας $\mathbf{J}(x, y)$ είναι

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}, \det(\mathbf{J}) = 9(x^2 + y^2)^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_0^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Λύνοντας } \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{J}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}), \quad \text{με } \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}.$$

Επιτάχυνση Σύγκλισης Επαναληπτικών Μεθόδων

Στόχος η τάξη σύγκλισης από γραμμική $\rightarrow$ τετραγωνική.

Επιτάχυνση Σύγκλισης Επαναληπτικών Μεθόδων

Στόχος η τάξη σύγκλισης από γραμμική $\rightarrow$ τετραγωνική.

Έστω η $\{x_n\}$ ακολουθία που παράγεται από τη $x_n = \phi(x_{n-1})$ και συγκλίνει γραμμικά στο x^* δηλ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = C, \quad 0 < C < 1.$$

Κατασκευάζουμε $\{\hat{x}_n\}$ που να συγκλίνει γρηγορότερα, τ.ω. για $n \gg$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx \frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \Rightarrow x^* = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Επιτάχυνση Σύγκλισης Επαναληπτικών Μεθόδων

Στόχος η τάξη σύγκλισης από γραμμική $\rightarrow$ τετραγωνική.

Έστω η $\{x_n\}$ ακολουθία που παράγεται από τη $x_n = \phi(x_{n-1})$ και συγκλίνει γραμμικά στο x^* δηλ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = C, \quad 0 < C < 1.$$

Κατασκευάζουμε $\{\hat{x}_n\}$ που να συγκλίνει γρηγορότερα, τ.ω. για $n \gg$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx \frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \Rightarrow x^* = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Αϊτκεν Δ^2 μέθοδος

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \quad (\text{Προς τα εμπρός διαφορά})$$

$$\Delta^2 x_n = \Delta(x_{n+1} - x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$$

Επιτάχυνση Σύγκλισης-Aitken Δ^2 μέθοδος

Συνεπώς

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Η ακολουθία $\{\hat{x}_n\} \rightarrow x^*$ γρηγορότερα από την $\{x_n\}$.

Επιτάχυνση Σύγκλισης-Aitken Δ^2 μέθοδος

Συνεπώς

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Η ακολουθία $\{\hat{x}_n\} \rightarrow x^*$ γρηγορότερα από την $\{x_n\}$.

Μέθοδος Steffensen

Συνδυασμός επαναληπτικής σταθερού σημείου και Aitken

Επιτάχυνση Σύγκλισης-Aitken Δ^2 μέθοδος

Συνεπώς

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Η ακολουθία $\{\hat{x}_n\} \rightarrow x^*$ γρηγορότερα από την $\{x_n\}$.

Μέθοδος Steffensen

Συνδυασμός επαναληπτικής σταθερού σημείου και Aitken

Θεωρούμε $\phi(x)$ η οποία ικανοποιεί το Θ. συστολής σ' ένα διάστημα $[a, b]$. Η μέθοδος σταθερού σημείου

$$x_n = \phi(x_{n-1}) \rightarrow x^*, \quad n \rightarrow \infty$$

υπολογίζοντας 2 τιμές $x_1 = \phi(x_0)$ και $x_2 = \phi(x_1)$ εφαρμόζεται επαναληπτικά η διαδικασία Aitken.

Αλγόριθμος Steffensen

Δίνονται x_0 , $N_{\max}$, $\phi(x)$ και ϵ

1 Για $n = 1, N_{\max}$

$$x_1 = \phi(x_0)$$

$$x_2 = \phi(x_1)$$

$$\hat{x} \leftarrow x_0 - \frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0}$$

αν $|\hat{x} - x_0| \leq \epsilon$, τύπωσε: $\hat{x}, N = n, \rightarrow$ έξοδος $x^* = \hat{x}$ λύση

διαφορετικά

$$x_0 \leftarrow \hat{x}$$

$$n \leftarrow n + 1$$

πήγαινε στο 1

Ρίζες Πολυωνύμων

Οι πραγματικές ρίζες πολυωνύμων της μορφής

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n^{th} - \text{βαθμού πολυώνυμο.}$$

μπορούν να υπολογιστούν με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους. Οι ειδικές ιδιότητες όμως των πολυωνύμων μας δίνουν τη δυνατότητα να βρούμε ειδικές μεθόδους για όλες τις πραγματικές και **μιγαδικές** ρίζες.

Ρίζες Πολυωνύμων

Οι πραγματικές ρίζες πολυωνύμων της μορφής

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n^{th} - \text{βαθμού πολυώνυμο.}$$

μπορούν να υπολογιστούν με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους. Οι ειδικές ιδιότητες όμως των πολυωνύμων μας δίνουν τη δυνατότητα να βρούμε ειδικές μεθόδους για όλες τις πραγματικές και **μιγαδικές** ρίζες.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας: Έστω $f(x)$ n^{th} βαθμού πολυώνυμο, $n \geq 1$ με $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ (ή $\mathbf{C}$). Τότε το $f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα πραγματική ή μιγαδική.

Ρίζες Πολυωνύμων

Οι πραγματικές ρίζες πολυωνύμων της μορφής

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n^{th} - \text{βαθμού πολυώνυμο.}$$

μπορούν να υπολογιστούν με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους. Οι ειδικές ιδιότητες όμως των πολυωνύμων μας δίνουν τη δυνατότητα να βρούμε ειδικές μεθόδους για όλες τις πραγματικές και **μιγαδικές** ρίζες.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας: Έστω $f(x)$ n^{th} βαθμού πολυώνυμο, $n \geq 1$ με $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ (ή $\mathbf{C}$). Τότε το $f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα πραγματική ή μιγαδική.

Πόρισμα: Για το $f(x) = 0$ υπάρχουν **μοναδικές** τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ και

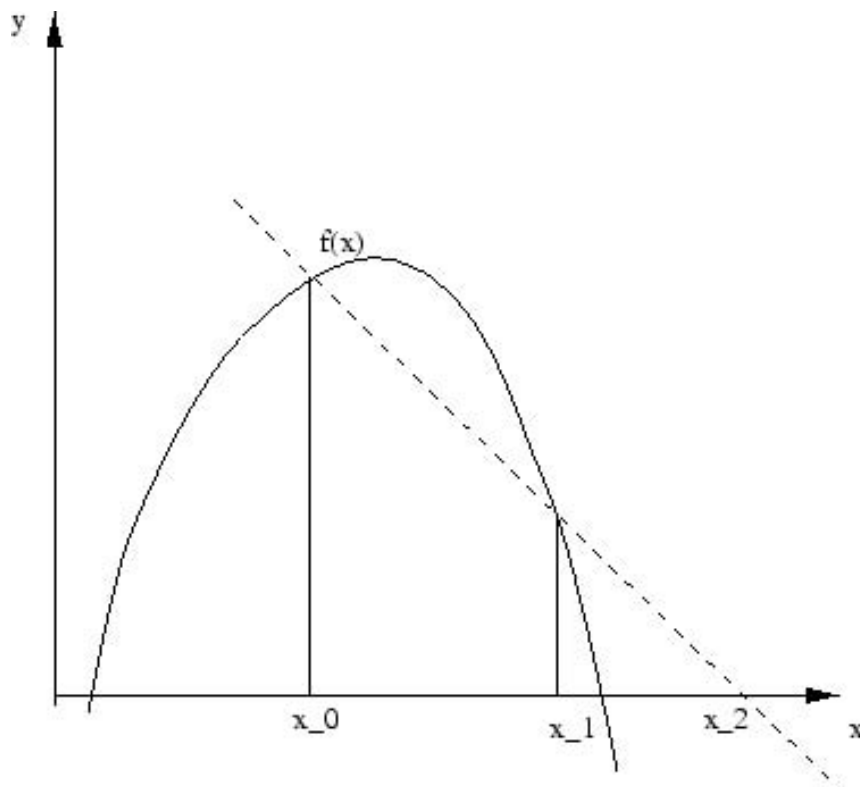
ακέραιοι $m_1, m_2, \dots, m_k$ με $\sum_{i=1}^k m_i = n$ τ.ω.

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

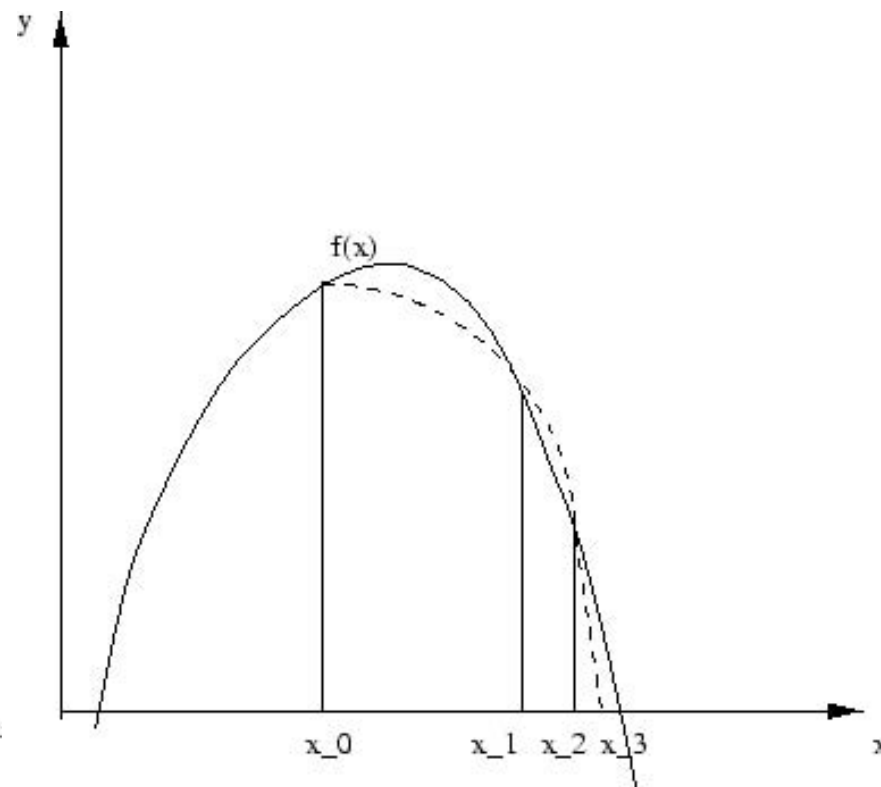
Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Horner.

Η μέθοδος του Muller (1956)

Είναι παραλλαγή της μεθόδου της τέμνουσας και δεν χρειάζεται παράγωγος.



Τέμνουσα



Muller

Για δοσμένη $f(x)$, κατασκευάζουμε το $P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$, ως την παραβολή που περνά από τα $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Υπολογίζουμε τα a, b, c από $P(x_0) = f(x_0)$, $P(x_1) = f(x_1)$, $P(x_2) = f(x_2)$
 $\Rightarrow x_3$ θα είναι μία ρίζα του $P(x)$.

Η μέθοδος του Muller: Υπολογίζονται τα a, b, c ως

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

$$f(x_2) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$c = f(x_2)$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

Η μέθοδος του Muller: Υπολογίζονται τα a, b, c ως

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

$$f(x_2) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$c = f(x_2)$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

Για τον υπολογισμό του x_3 **(το κοντινότερο στο x_2)** επίλυση τριωνύμου (2 δυνατότητες)

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Η μέθοδος του Muller: Υπολογίζονται τα a, b, c ως

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

$$f(x_2) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$c = f(x_2)$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

Για τον υπολογισμό του x_3 **(το κοντινότερο στο x_2)** επίλυση τριωνύμου (2 δυνατότητες)

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Θέτουμε $x_0 = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ και συνεχίζουμε μέχρι σύγκλισης

Αλγόριθμος του Muller

Δίνονται $x_0, x_1, x_2, \epsilon, N_{\max}$.

1 Για $n = 1, N_{\max}$

$$h_1 = x_1 - x_0, \quad h_2 = x_2 - x_1$$

$$\delta_1 = (f(x_1) - f(x_0))/h_1$$

$$\delta_2 = (f(x_2) - f(x_1))/h_2;$$

$$d = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$$

$$b = \delta_2 + h_2 d$$

$$D = \sqrt{b^2 - 4f(x_2)d} \quad \% \text{ ίσως μιγαδικό}$$

$$\text{Αν } |b - D| < |b + D|$$

$$\text{τότε } E = b + D$$

$$\text{διαφορετικά } E = b - D$$

$$h = -2f(x_2)/E$$

$$x = x_2 + h$$

$$\text{Αν } |h| < \epsilon \text{ τύπωσε } x, N = i, \rightarrow \text{έξοδος } x^* = x$$

$$\text{διαφορετικά}$$

$$x_0 \leftarrow x_1, \quad x_1 \leftarrow x_2 \quad x_3 \leftarrow x$$

$$n \leftarrow n + 1$$

πήγαινε στο 1

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = e^x + 1$ (η οποία δεν έχει πραγματικές ρίζες, $x^* = \pi i$) και οι αρχικές τιμές $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = -1$.

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = e^x + 1$ (η οποία δεν έχει πραγματικές ρίζες, $x^* = \pi i$) και οι αρχικές τιμές $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = -1$.

Για το $P(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

$$c = f(x_2) = 1 + 1/e \approx 1.3679$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} \\ &= \frac{4(1 - 1/e) - (e - 1/e)}{2} \approx 0.0890 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} \\ &= \frac{(e - 1/e) - 2(1 - 1/e)}{2} \approx 0.5431 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = e^x + 1$ (η οποία δεν έχει πραγματικές ρίζες, $x^* = \pi i$) και οι αρχικές τιμές $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = -1$.

Για το $P(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

$$c = f(x_2) = 1 + 1/e \approx 1.3679$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} \\ &= \frac{4(1 - 1/e) - (e - 1/e)}{2} \approx 0.0890 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} \\ &= \frac{(e - 1/e) - 2(1 - 1/e)}{2} \approx 0.5431 \end{aligned}$$

Για το $x = x_3$ κοντά στο x_2

$$x_3 - x_2 = x_3 + 1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \approx -0.0820 + 1.5849i \Rightarrow x_3 \approx -1.0820 + 1.5849i$$

....Παράδειγμα: Στη επόμενη επανάληψη

$$a \approx 0.2157 + 0.1094i, \quad b \approx 0.0343 + 0.5563i, \quad c \approx 0.9952 + 0.3389i$$

n	x_n
0	1.0000
1	0.0000
2	-1.0000
3	-1.0820 + 1.5849i
4	-1.2735 + 2.8505i
5	-0.3814 + 3.7475i
6	0.1973 + 3.1457i
7	-0.0168 + 3.1571i
8	0.0000 + 3.1421i
9	0.0000 + 3.1416i

Επαναληπτικές Ασκήσεις Κεφ. 2

Άσκηση Η μεταβολή, στο χρόνο, της συγκέντρωσης, $c(\text{gr}/\text{m}^3)$, ενός ρύπου σε μία λίμνη μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν

$$V \frac{dc}{dt} = W - Qc - kV \sqrt{c}.$$

Δίνονται οι παράμετροι $V = 10^6 \text{m}^3$, $Q = 10^5 \text{m}^3/\text{y}$, $W = 10^6 \text{gr}/\text{y}$ και $k = 0.25 \text{m}^{1/2} \text{y}/\text{gr}^{1/2}$. Με τη μέθοδο σταθερού σημείου υπολογίστε τη συγκέντρωση του ρύπου σε στάσιμη κατάσταση όταν $c \in [2, 6]$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις Κεφ. 2

Άσκηση Η μεταβολή, στο χρόνο, της συγκέντρωσης, $c(\text{gr}/\text{m}^3)$, ενός ρύπου σε μία λίμνη μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν

$$V \frac{dc}{dt} = W - Qc - kV \sqrt{c}.$$

Δίνονται οι παράμετροι $V = 10^6 \text{m}^3$, $Q = 10^5 \text{m}^3/\text{y}$, $W = 10^6 \text{gr}/\text{y}$ και $k = 0.25 \text{m}^{1/2} \text{y}/\text{gr}^{1/2}$. Με τη μέθοδο σταθερού σημείου υπολογίστε τη συγκέντρωση του ρύπου σε στάσιμη κατάσταση όταν $c \in [2, 6]$.

Στάσιμη κατάσταση $\frac{dc}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$f(c) = \frac{W}{V} - \frac{Q}{V}c - k\sqrt{c} = 0$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις Κεφ. 2

Άσκηση Η μεταβολή, στο χρόνο, της συγκέντρωσης, $c(\text{gr}/\text{m}^3)$, ενός ρύπου σε μία λίμνη μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν

$$V \frac{dc}{dt} = W - Qc - kV\sqrt{c}.$$

Δίνονται οι παράμετροι $V = 10^6 \text{m}^3$, $Q = 10^5 \text{m}^3/\text{y}$, $W = 10^6 \text{gr}/\text{y}$ και $k = 0.25 \text{m}^{1/2} \text{y}/\text{gr}^{1/2}$. Με τη μέθοδο σταθερού σημείου υπολογίστε τη συγκέντρωση του ρύπου σε στάσιμη κατάσταση όταν $c \in [2, 6]$.

Στάσιμη κατάσταση $\frac{dc}{dt} = 0 \Rightarrow$

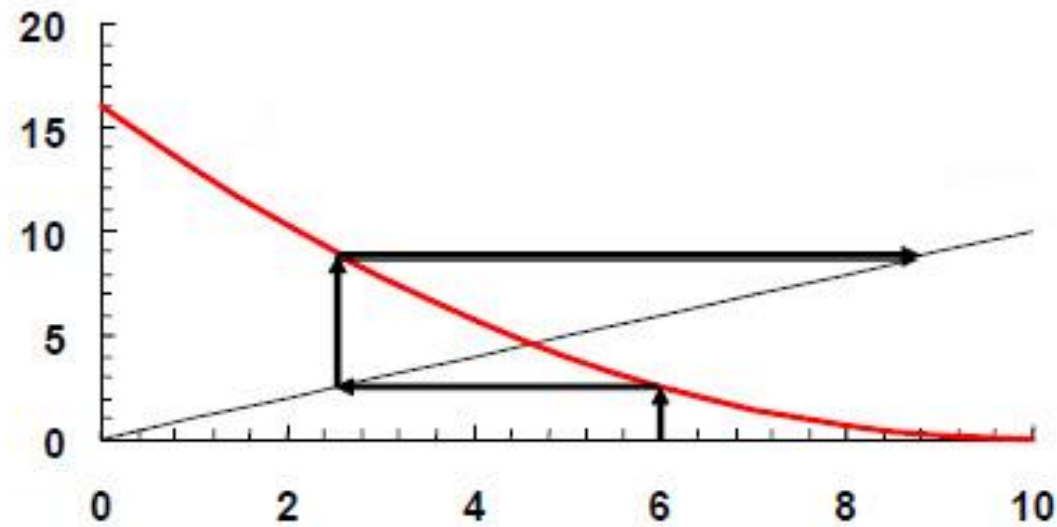
$$f(c) = \frac{W}{V} - \frac{Q}{V}c - k\sqrt{c} = 0$$

Έστω οι δύο επιλογές σταθερού σημείου της μορφής $c_{i+1} = \phi(c_i)$

$$c = \left(\frac{W - Qc}{kV} \right)^2 \quad \text{και} \quad c = \frac{W - kV\sqrt{c}}{Q}$$

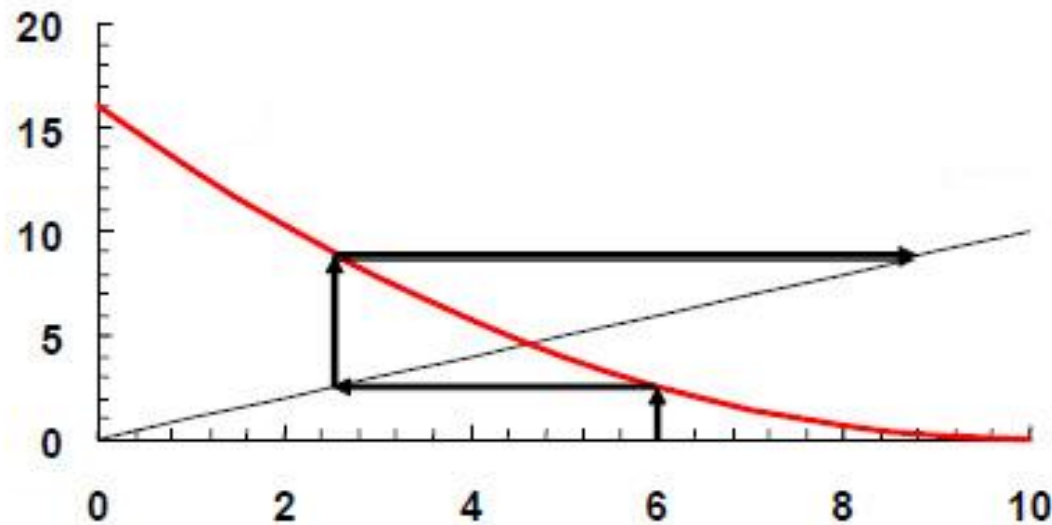
Για την πρώτη $\phi'(c) = -\frac{2Q(W - Qc)}{(kV)^2} = -3.2 + 0.32c$

$|\phi'(c)| < 1 \Rightarrow c \in [6.875, 13.125] \Rightarrow$ δεν είναι συστολή στο $[2, 6]$



Για την πρώτη $\phi'(c) = -\frac{2Q(W - Qc)}{(kV)^2} = -3.2 + 0.32c$

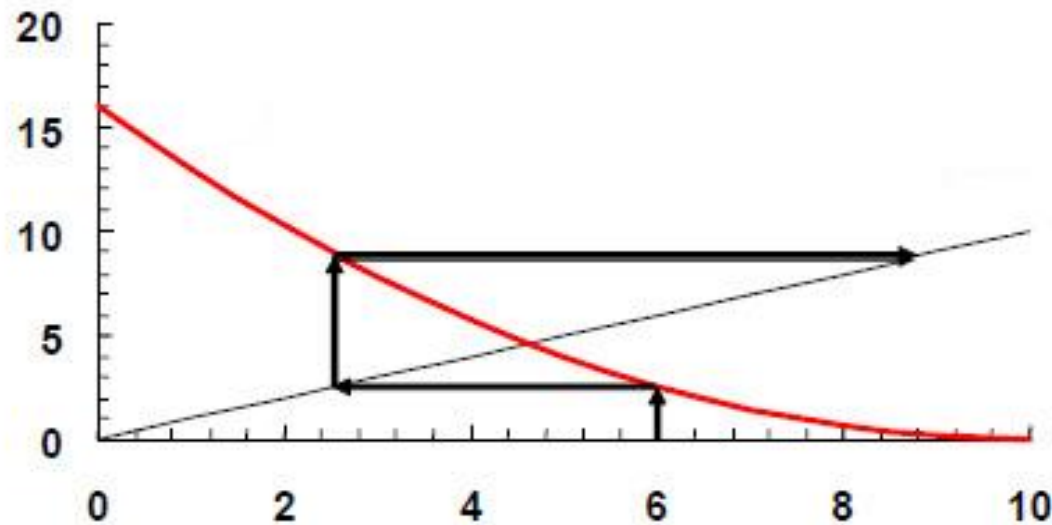
$|\phi'(c)| < 1 \Rightarrow c \in [6.875, 13.125] \Rightarrow$ δεν είναι συστολή στο $[2, 6]$



Για τη δεύτερη επιλογή $\phi'(c) = -\frac{kV}{2Q\sqrt{c}} = -\frac{1.25}{\sqrt{c}}$ και στο $[2, 6]$ η $\phi'(c) \nearrow$
 άρα, $\max |\phi'(c)| = |\phi'(2)| \approx 0.88 < 1$

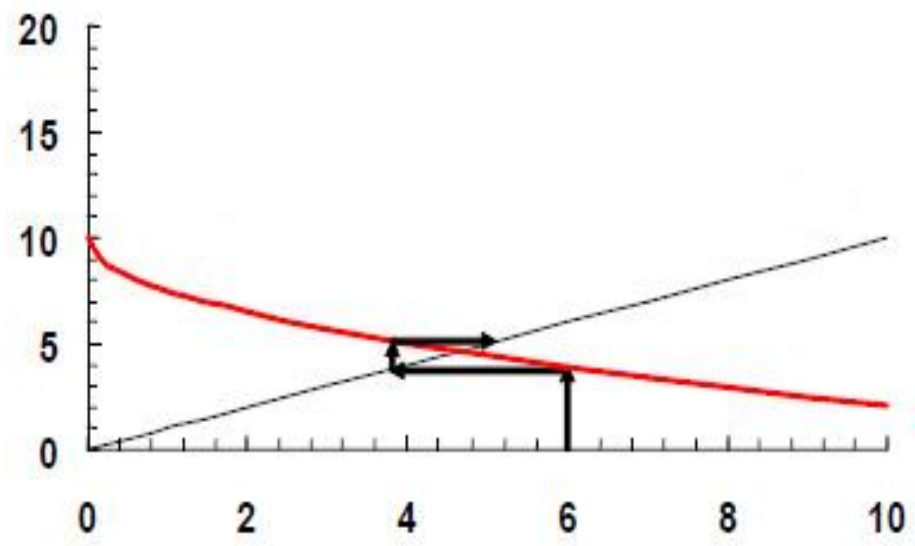
Για την πρώτη $\phi'(c) = -\frac{2Q(W - Qc)}{(kV)^2} = -3.2 + 0.32c$

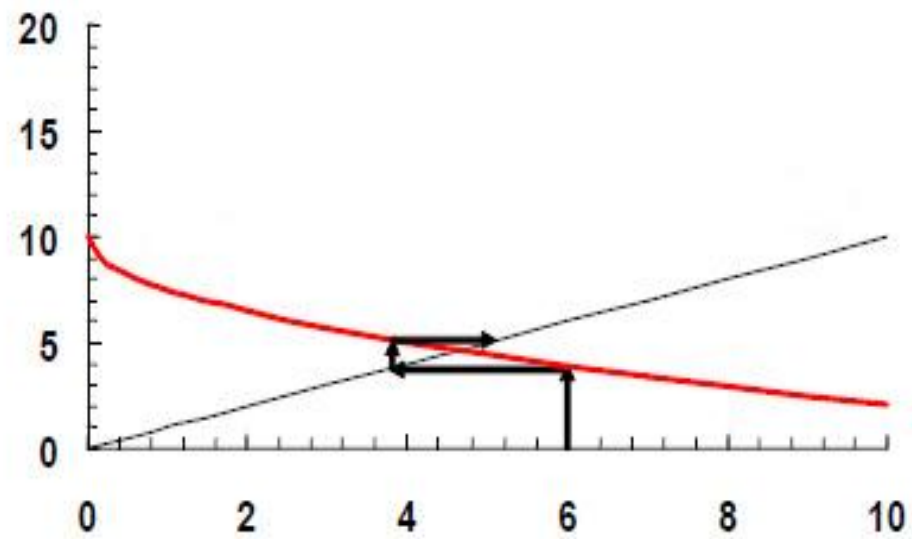
$$|\phi'(c)| < 1 \Rightarrow c \in [6.875, 13.125] \Rightarrow \text{δεν είναι συστολή στο } [2, 6]$$



Για τη δεύτερη επιλογή $\phi'(c) = -\frac{kV}{2Q\sqrt{c}} = -\frac{1.25}{\sqrt{c}}$ και στο $[2, 6]$ η $\phi'(c) \nearrow$
 άρα, $\max |\phi'(c)| = |\phi'(2)| \approx 0.88 < 1$

Επίσης η $\phi(c) \searrow$ και $\phi([2, 6]) \subset [2, 6]$, άρα ισχύει το Θ. Συστολής και η μέθοδος συγκλίνει (στο σταθερό σημείο-ρίζα) $\forall x_0 \in [2, 6]$





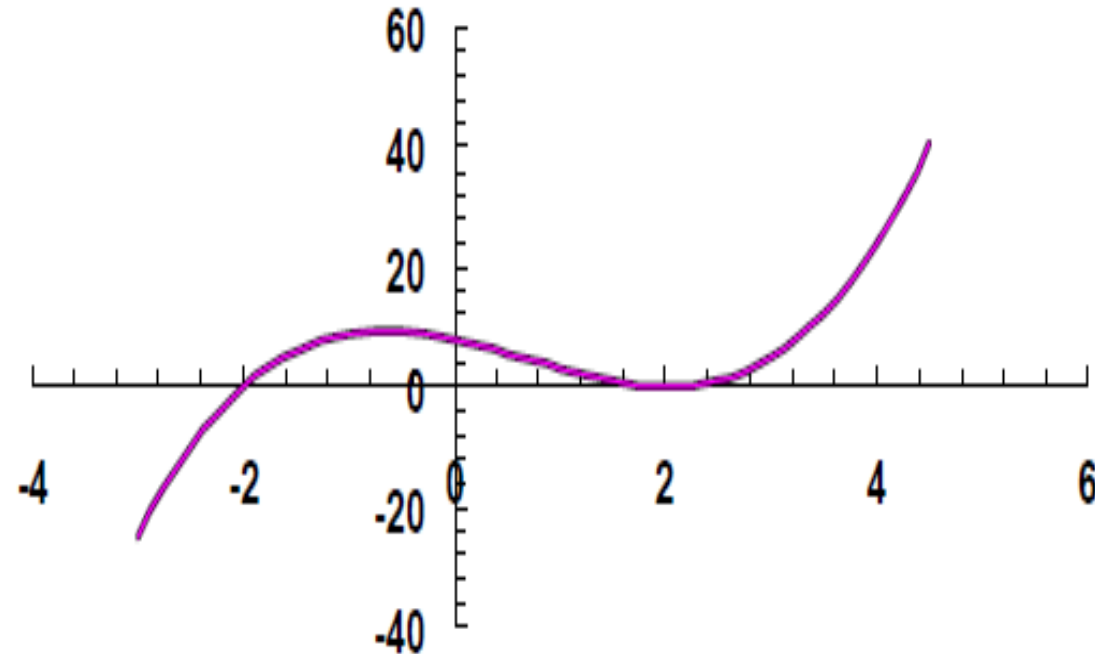
i	x_i	ε_a
0	4	
1	5	20.0%
2	4.40983	13.4%
3	4.750101	7.2%
4	4.551318	4.4%
5	4.666545	2.5%
6	4.599453	1.5%
7	4.638416	0.8%
8	4.615754	0.5%
9	4.628923	0.3%
10	4.621267	0.2%

Άσκηση Η $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ έχει μια διπλή ρίζα, τη $x = 2$.

Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson και τις παραλλαγές της με αρχική τιμή x_0 και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

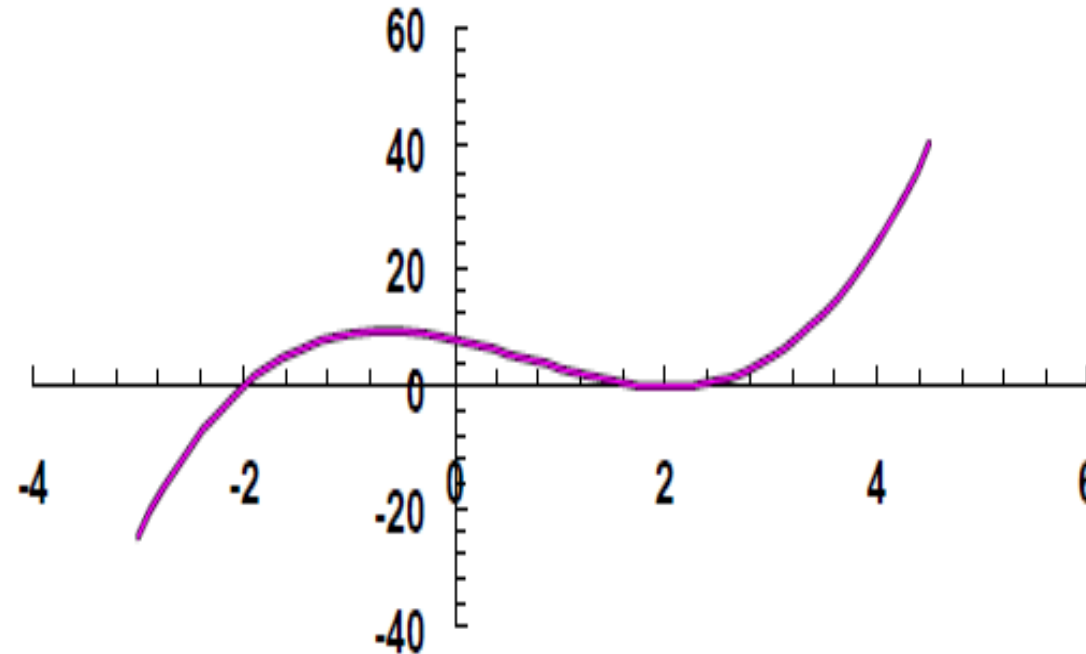
Άσκηση Η $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ έχει μια διπλή ρίζα, τη $x = 2$.

Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson και τις παραλλαγές της με αρχική τιμή x_0 και σχολιάστε τα αποτελέσματα.



Άσκηση Η $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ έχει μια διπλή ρίζα, τη $x = 2$.

Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson και τις παραλλαγές της με αρχική τιμή x_0 και σχολιάστε τα αποτελέσματα.



(α)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^3 - 2x_i^2 - 4x_i + 8}{3x_i^2 - 4x_i - 4}$$

i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	ε_a
0	1.2	2.048	-4.48	
1	1.657143	0.429901	-2.3902	27.586%
2	1.837002	0.101942	-1.22428	9.791%
3	1.92027	0.024921	-0.61877	4.336%
4	1.960544	0.006166	-0.31097	2.054%
5	1.980371	0.001534	-0.15588	1.001%
6	1.99021	0.000382	-0.07803	0.494%
7	1.995111	9.55E-05	-0.03904	0.246%
8	1.997557	2.39E-05	-0.01953	0.122%
9	1.998779	5.96E-06	-0.00976	0.061%
10	1.99939	1.49E-06	-0.00488	0.031%
11	1.999695	3.73E-07	-0.00244	0.015%
12	1.999847	9.31E-08	-0.00122	0.008%

i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	ε_a
0	1.2	2.048	-4.48	
1	1.657143	0.429901	-2.3902	27.586%
2	1.837002	0.101942	-1.22428	9.791%
3	1.92027	0.024921	-0.61877	4.336%
4	1.960544	0.006166	-0.31097	2.054%
5	1.980371	0.001534	-0.15588	1.001%
6	1.99021	0.000382	-0.07803	0.494%
7	1.995111	9.55E-05	-0.03904	0.246%
8	1.997557	2.39E-05	-0.01953	0.122%
9	1.998779	5.96E-06	-0.00976	0.061%
10	1.99939	1.49E-06	-0.00488	0.031%
11	1.999695	3.73E-07	-0.00244	0.015%
12	1.999847	9.31E-08	-0.00122	0.008%

Η μέθοδος συγκλίνει αργά (γραμμικά)

(β)

$$x_{i+1} = x_i - 2 \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - 2 \frac{x_i^3 - 2x_i^2 - 4x_i + 8}{3x_i^2 - 4x_i - 4}$$

i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	ε_a
0	1.2	2.048	-4.48	
1	2.114286	0.053738	0.953469	43.243%
2	2.001566	9.81E-06	0.012532	5.632%
3	2	3.75E-13	2.45E-06	0.078%

(β)

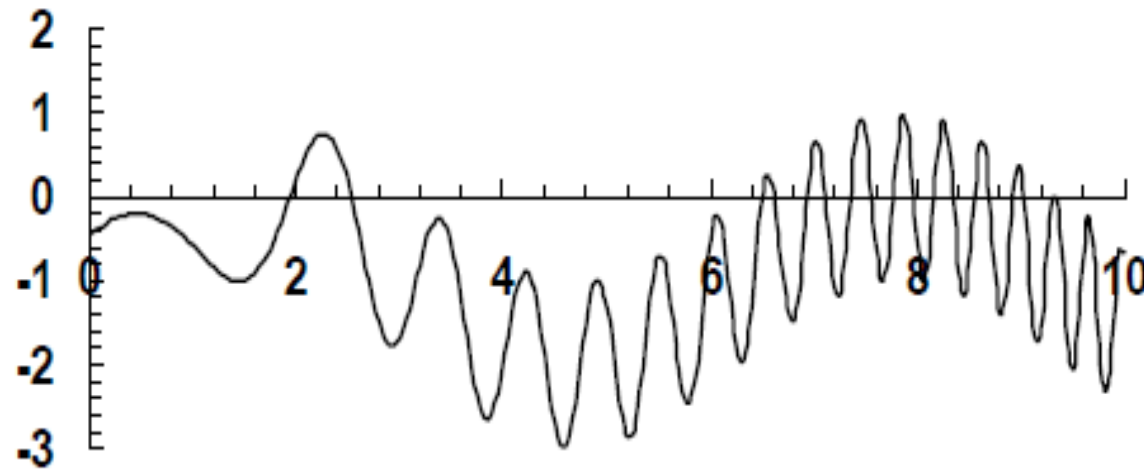
$$x_{i+1} = x_i - 2 \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - 2 \frac{x_i^3 - 2x_i^2 - 4x_i + 8}{3x_i^2 - 4x_i - 4}$$

i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	ε_a
0	1.2	2.048	-4.48	
1	2.114286	0.053738	0.953469	43.243%
2	2.001566	9.81E-06	0.012532	5.632%
3	2	3.75E-13	2.45E-06	0.078%

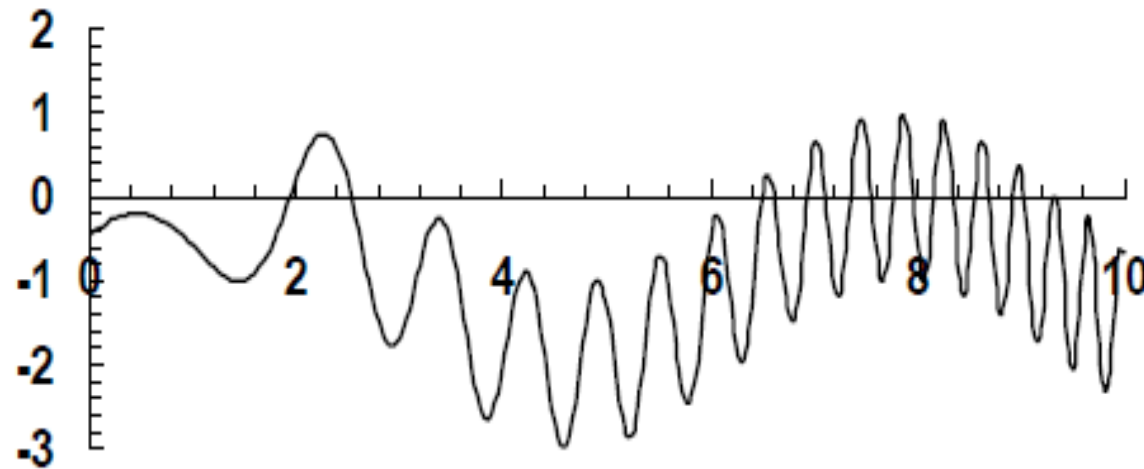
Η μέθοδος συγκλίνει γρήγορα (τετραγωνικά)

Άσκηση Για την $f(x) = \sin(x) + \cos(1 + x^2) - 1$ υπολογίστε την **πρώτη θετική ρίζα** της κάνοντας 4 επαναλήψεις με τη μέθοδο της τέμνουσας με αρχικές τιμές (α) $x_0 = 1$ και $x_1 = 3$, (β) $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 2.5$ και (γ) $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 2.25$ και εξηγήστε τα αποτελέσματα σας σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση Για την $f(x) = \sin(x) + \cos(1 + x^2) - 1$ υπολογίστε την **πρώτη θετική ρίζα** της κάνοντας 4 επαναλήψεις με τη μέθοδο της τέμνουσας με αρχικές τιμές (α) $x_0 = 1$ και $x_1 = 3$, (β) $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 2.5$ και (γ) $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 2.25$ και εξηγήστε τα αποτελέσματά σας σε κάθε περίπτωση.



Άσκηση Για την $f(x) = \sin(x) + \cos(1 + x^2) - 1$ υπολογίστε την **πρώτη θετική ρίζα** της κάνοντας 4 επαναλήψεις με τη μέθοδο της τέμνουσας με αρχικές τιμές (α) $x_0 = 1$ και $x_1 = 3$, (β) $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 2.5$ και (γ) $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 2.25$ και εξηγήστε τα αποτελέσματά σας σε κάθε περίπτωση.

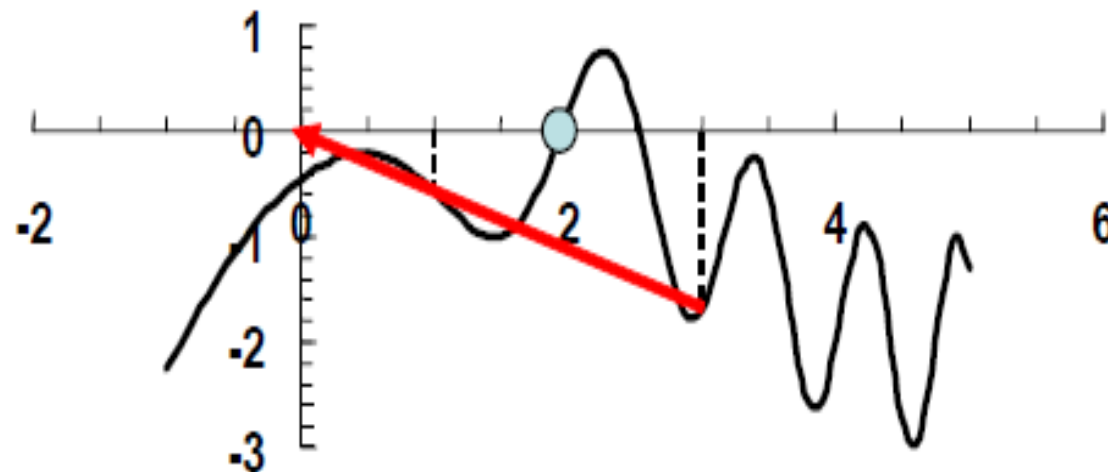


(α) Για αρχικές τιμές $x_0 = 1$ και $x_1 = 3$

i	x_{j-1}	$f(x_{j-1})$	x_j	$f(x_j)$	ε_a
0	1	-0.57468	3	-1.697951521	
1	3	-1.69795	-0.02321	-0.483363437	13023.081%
2	-0.02321	-0.48336	-1.22635	-2.744750012	98.107%
3	-1.22635	-2.74475	0.233951	-0.274717273	624.189%
4	0.233951	-0.27472	0.396366	-0.211940326	40.976%

(α) Για αρχικές τιμές $x_0 = 1$ και $x_1 = 3$

i	x_{j-1}	$f(x_{j-1})$	x_j	$f(x_j)$	ε_a
0	1	-0.57468	3	-1.697951521	
1	3	-1.69795	-0.02321	-0.483363437	13023.081%
2	-0.02321	-0.48336	-1.22635	-2.744750012	98.107%
3	-1.22635	-2.74475	0.233951	-0.274717273	624.189%
4	0.233951	-0.27472	0.396366	-0.211940326	40.976%

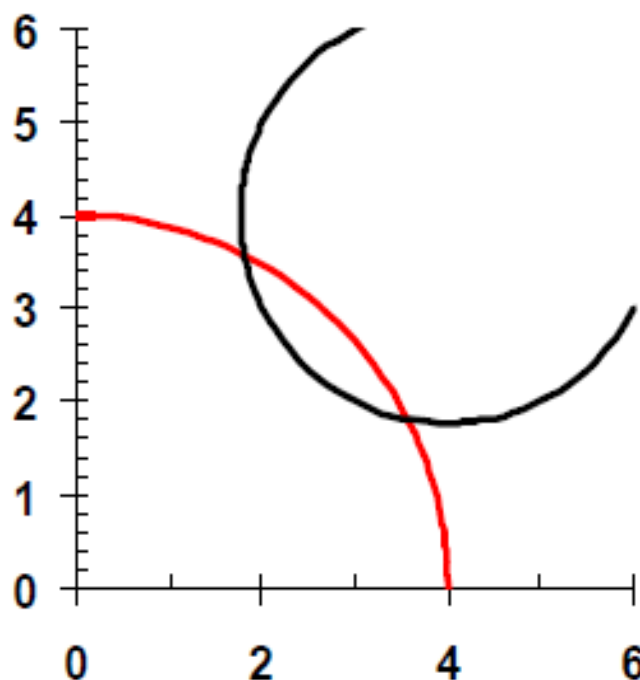


Άσκηση Βρείτε τις ρίζες των μη-γραμμικών εξισώσεων (σύστημα) με τη μέθοδο Newton-Raphson και γραφικό εντοπισμό των αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 + (y - 4)^2 &= 5 \\ x^2 + y^2 &= 16\end{aligned}$$

Άσκηση Βρείτε τις ρίζες των μη-γραμμικών εξισώσεων (σύστημα) με τη μέθοδο Newton-Raphson και γραφικό εντοπισμό των αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 + (y - 4)^2 &= 5 \\ x^2 + y^2 &= 16\end{aligned}$$



Έχουμε δύο λύσεις $\mathbf{X} = [x^*, y^*]$, προσεγγιστικά, $[1.8, 3.6]$ και $[3.6, 1.8]$

Για προσέγγιση της **πρώτης ρίζας**, με $\mathbf{X}^{(0)} = [1.8, 3.6]$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{J}_n^{-1}(\mathbf{X}^{(n)}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας $\mathbf{J}(x, y)$ είναι

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-4) & -2(y-4) \\ -2x & -2y \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{J}) = 16(x-y)$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} -2y & 2(y-4) \\ 2x & -2(x-4) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_0^{-1} = \frac{1}{-28.8} \begin{bmatrix} -2 \cdot 1.8 & 2(3.6-4) \\ 2 \cdot 1.8 & 2(1.8-4) \end{bmatrix} = \frac{1}{-28.8} \begin{bmatrix} -3.6 & -0.8 \\ 3.6 & -4.4 \end{bmatrix}$$

Για προσέγγιση της **πρώτης ρίζας**, με $\mathbf{X}^{(0)} = [1.8, 3.6]$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{J}_n^{-1}(\mathbf{X}^{(n)}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ο **Ιακωβιανός πίνακας** $\mathbf{J}(x, y)$ είναι

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-4) & -2(y-4) \\ -2x & -2y \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{J}) = 16(x-y)$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} -2y & 2(y-4) \\ 2x & -2(x-4) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_0^{-1} = \frac{1}{-28.8} \begin{bmatrix} -2 \cdot 1.8 & 2(3.6-4) \\ 2 \cdot 1.8 & 2(1.8-4) \end{bmatrix} = \frac{1}{-28.8} \begin{bmatrix} -3.6 & -0.8 \\ 3.6 & -4.4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Λύνοντας } \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{J}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}), \quad \text{με } \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.805556 \\ 3.569444 \end{bmatrix}$$

Οι επόμενες επαναλήψεις

i	x_i	y_i	ε_a
0	1.8	3.6	
1	1.805556	3.569444	0.856%
2	1.805829	3.569171	0.0151%
3	1.805829	3.569171	$2.35 \times 10^{-6}\%$

Οι επόμενες επαναλήψεις

i	x_i	y_i	ε_a
0	1.8	3.6	
1	1.805556	3.569444	0.856%
2	1.805829	3.569171	0.0151%
3	1.805829	3.569171	$2.35 \times 10^{-6}\%$

Άσκηση Να προσεγγιστεί η θετική ρίζα του συστήματος με τη μέθοδο Newton-Raphson

$$x^2 + 1 - y = 0$$

$$2 \cos(x) - y = 0$$