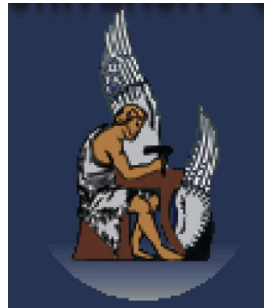


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 6η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Η μέθοδος Newton-Raphson (NR)

- Είναι η πιο γνωστή επαναληπτική μέθοδος.
- Μπορεί να παραχθεί γεωμετρικά και αναλυτικά
- Έχει τετραγωνική τάξη σύγκλισης (**τουλάχιστον κοντά σε μία περιοχή της ρίζας**)
- Χρειάζεται μια "καλή" αρχική τιμή για γρήγορη σύγκλιση

Έστω η $f(x) \in C^2[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.

Έστω x_n μια προσέγγιση της x^* με $|x_n - x^*|$ "μικρό". Έστω το ανάπτυγμα Taylor (δευτέρου βαθμού) για την $f(x)$ γύρω από το x_n και για $x = x^*$

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi),$$

ξ μεταξύ x_n και x^* .

Έστω η $f(x) \in C^2[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.

Έστω x_n μια προσέγγιση της x^* με $|x_n - x^*|$ "μικρό". Έστω το ανάπτυγμα Taylor (δευτέρου βαθμού) για την $f(x)$ γύρω από το x_n και για $x = x^*$

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi),$$

ξ μεταξύ x_n και x^* .

Διατηρώντας τους δύο πρώτους όρους

$$0 \approx f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n)$$

Έστω η $f(x) \in C^2[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.

Έστω x_n μια προσέγγιση της x^* με $|x_n - x^*|$ "μικρό". Έστω το ανάπτυγμα Taylor (δευτέρου βαθμού) για την $f(x)$ γύρω από το x_n και για $x = x^*$

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi),$$

ξ μεταξύ x_n και x^* .

Διατηρώντας τους δύο πρώτους όρους

$$0 \approx f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) \Rightarrow x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Έστω η $f(x) \in C^2[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.

Έστω x_n μια προσέγγιση της x^* με $|x_n - x^*|$ "μικρό". Έστω το ανάπτυγμα Taylor (δευτέρου βαθμού) για την $f(x)$ γύρω από το x_n και για $x = x^*$

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi),$$

ξ μεταξύ x_n και x^* .

Διατηρώντας τους δύο πρώτους όρους

$$0 \approx f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) \Rightarrow x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Άρα η επαναληπτική μέθοδος NR είναι

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

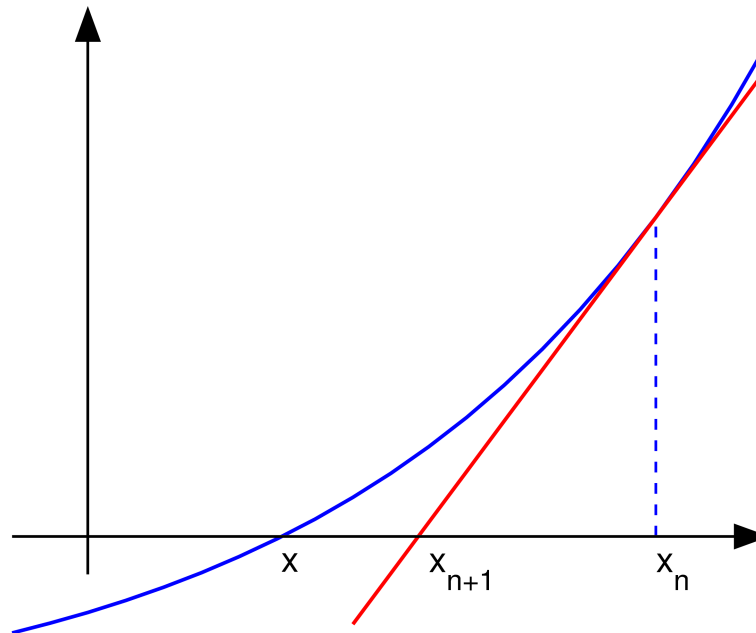
Γεωμετρική κατασκευή

Η **εφαπτόμενη** του **γραφήματος** της f στο σημείο $(x_n, f(x_n))$ είναι

$$y = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n)$$

για $y = 0$ (σημείο τομής της εφαπτόμενης με τον x -άξονα) $\Rightarrow$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



- Με την υπόθεση ότι η $f(x) \in C^2[a, b]$ με $f'(x^*) \neq 0$ τότε για την NR

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \phi'(x^*) = 0 < 1 \Rightarrow$$

τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη του ένα.

- Με την υπόθεση ότι η $f(x) \in C^2[a, b]$ με $f'(x^*) \neq 0$ τότε για την NR

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \phi'(x^*) = 0 < 1 \Rightarrow$$

τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη του ένα.

- Το κριτήριο τερματισμού είναι αυτό των γενικών επαναληπτικών μεθόδων δηλ, υπολόγισε x_n μέχρι $n = N$ τ.ω.

$$|x_{N+1} - x_N| < \delta$$

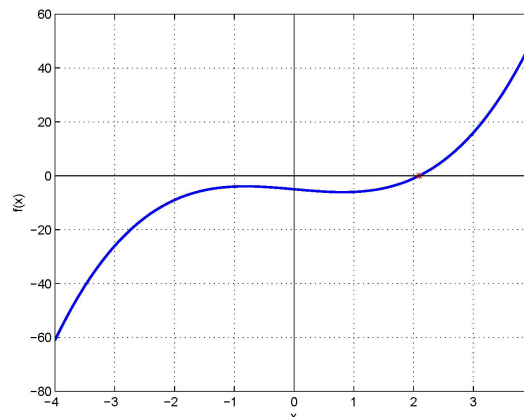
το οποίο συνεπάγεται ότι το αντίστοιχο σφάλμα $|x^* - x_{n+1}|$ θα είναι της τάξης του δ .

Παράδειγμα: Η $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ έχει μοναδική ρίζα

$x^* = 2.09455148 \dots$. Αν η ανοχή του σφάλματος θέλω να είναι $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$ (δηλ. θέλω να υπολογίσω **έξι σωστά σημαντικά** δεκαδικά ψηφία), τότε

- για $x_0 = 0$ παίρνουμε $N = 18$, δηλ. $|x_{19} - x_{18}| < \delta$, με

Γεωμετρική αναπαράσταση του παραδείγματος για $x_0 = 0$

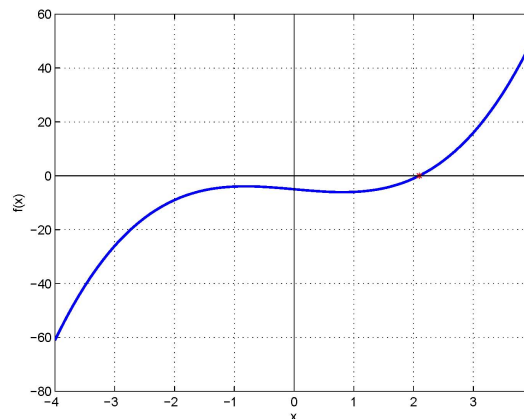


Παράδειγμα: Η $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ έχει μοναδική ρίζα

$x^* = 2.09455148 \dots$. Αν η ανοχή του σφάλματος θέλω να είναι $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$ (δηλ. θέλω να υπολογίσω **έξι σωστά σημαντικά** δεκαδικά ψηφία), τότε

- για $x_0 = 0$ παίρνουμε $N = 18$, δηλ. $|x_{19} - x_{18}| < \delta$, με

Γεωμετρική αναπαράσταση του παραδείγματος για $x_0 = 0$

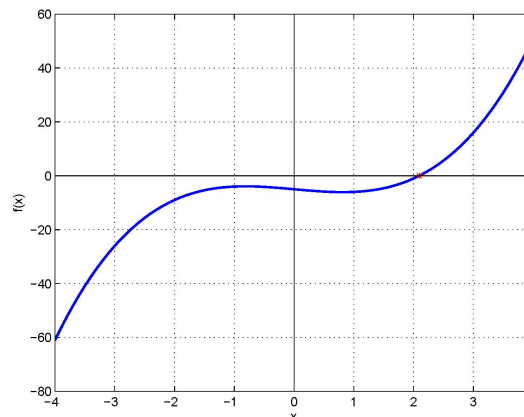


- για $x_0 = -2$ παίρνουμε $N = 7$,

Παράδειγμα: Η $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x^* = 2.09455148 \dots$. Αν η ανοχή του σφάλματος θέλω να είναι $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$ (δηλ. θέλω να υπολογίσω **έξι σωστά σημαντικά** δεκαδικά ψηφία), τότε

- για $x_0 = 0$ παίρνουμε $N = 18$, δηλ. $|x_{19} - x_{18}| < \delta$, με

Γεωμετρική αναπαράσταση του παραδείγματος για $x_0 = 0$



- για $x_0 = -2$ παίρνουμε $N = 7$,

Για γρήγορη σύγκλιση (αριθμό βημάτων) έχει σημασία η επιλογή της αρχικής τιμής x_0

Σύγκλιση της μεθόδου NR

Θεώρημα: Έστω x^* απλή ρίζα μίας συνάρτησης $f(x)$ και $f(x) \in C[x^* - d, x^* + d]$, $d > 0$. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I με μέσον το x^* , τ.ω. $\forall x_0 \in I$ η ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}$ που παράγει η μέθοδος NR να συγκλίνει στο x^* . Ισχύει μάλιστα ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} = M \quad (1)$$

δηλ. η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική. (Αν $f''(x^*) \neq 0$ η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς δύο.)

Σύγκλιση της μεθόδου NR

Θεώρημα: Έστω x^* απλή ρίζα μίας συνάρτησης $f(x)$ και $f(x) \in C[x^* - d, x^* + d]$, $d > 0$. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I με μέσον το x^* , τ.ω. $\forall x_0 \in I$ η ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}$ που παράγει η μέθοδος NR να συγκλίνει στο x^* . Ισχύει μάλιστα ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} = M \quad (1)$$

δηλ. η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική. (Αν $f''(x^*) \neq 0$ η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς δύο.)

Επιλογή του x_0

Από (1)

$$\Rightarrow |\epsilon_{n+1}| \leq M \epsilon_n^2 \Rightarrow |M \epsilon_{n+1}| \leq |M \epsilon_n|^{2^1} \leq |M \epsilon_{n-1}|^{2^2} \cdots \leq |M \epsilon_0|^{2^n}$$

για $\lim |\epsilon_{n+1}| \rightarrow 0$ θα πρέπει $|M \epsilon_0| < 1 \Rightarrow I \subset |x^* - x_0| < \frac{1}{M}$

Σύγκλιση της μεθόδου NR

Θεώρημα: Έστω x^* απλή ρίζα μίας συνάρτησης $f(x)$ και $f(x) \in C[x^* - d, x^* + d]$, $d > 0$. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I με μέσον το x^* , τ.ω. $\forall x_0 \in I$ η ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}$ που παράγει η μέθοδος NR να συγκλίνει στο x^* . Ισχύει μάλιστα ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} = M \quad (1)$$

δηλ. η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική. (Αν $f''(x^*) \neq 0$ η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς δύο.)

Επιλογή του x_0

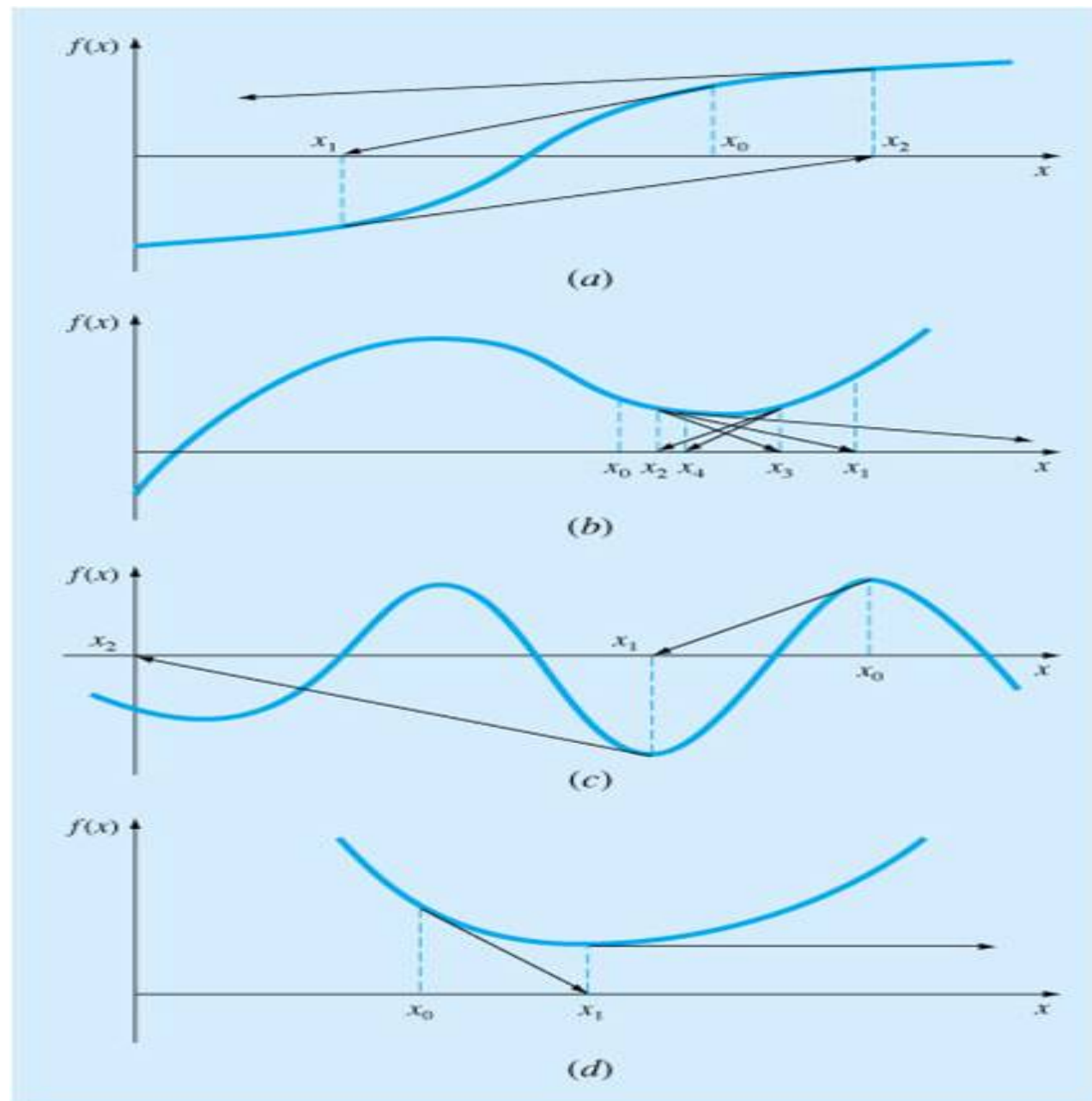
Από (1)

$$\Rightarrow |\epsilon_{n+1}| \leq M \epsilon_n^2 \Rightarrow |M \epsilon_{n+1}| \leq |M \epsilon_n|^{2^1} \leq |M \epsilon_{n-1}|^{2^2} \cdots \leq |M \epsilon_0|^{2^n}$$

για $\lim |\epsilon_{n+1}| \rightarrow 0$ θα πρέπει $|M \epsilon_0| < 1 \Rightarrow I \subset |x^* - x_0| < \frac{1}{M}$

Η επιλογή του x_0 εξαρτάται από το M , αν M μεγάλο τότε το x_0 πρέπει να επιλεγεί κοντά στο x^* ώστε η NR να συγκλίνει τετραγωνικά.

Περιπτώσεις αποτυχίας της μεθόδου NR



- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι γεωμετρικές ιδιότητες της f (μονοτονία, κυρτότητα) εγγυώνται τη σύγκλιση της NR.

Πρόταση: Έστω $f \in C^2[a, \infty]$ και ότι $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ για $x \geq a$ με $f(a) < 0$. Τότε $\exists_1$ πραγματική ρίζα $\rho \in [a, \infty]$. **Τότε για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$ η μέθοδος NR συγκλίνει στην ρ .**

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι γεωμετρικές ιδιότητες της f (μονοτονία, κυρτότητα) εγγυώνται τη σύγκλιση της NR.

Πρόταση: Έστω $f \in C^2[a, \infty]$ και ότι $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ για $x \geq a$ με $f(a) < 0$. Τότε $\exists_1$ πραγματική ρίζα $\rho \in [a, \infty]$. **Τότε για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$ η μέθοδος NR συγκλίνει στην ρ .**

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η τάξη σύγκλισης γίνεται **γραμμική**.

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι γεωμετρικές ιδιότητες της f (μονοτονία, κυρτότητα) εγγυώνται τη σύγκλιση της NR.

Πρόταση: Έστω $f \in C^2[a, \infty]$ και ότι $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ για $x \geq a$ με $f(a) < 0$. Τότε $\exists_1$ πραγματική ρίζα $\rho \in [a, \infty]$. **Τότε για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$ η μέθοδος NR συγκλίνει στην ρ .**

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η τάξη σύγκλισης γίνεται **γραμμική**.

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = x^2$ με $x^* = 0$, η μέθοδος δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{1}{2} \quad (\text{τάξη ακριβώς ένα})$$

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι γεωμετρικές ιδιότητες της f (μονοτονία, κυρτότητα) εγγυώνται τη σύγκλιση της NR.

Πρόταση: Έστω $f \in C^2[a, \infty]$ και ότι $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ για $x \geq a$ με $f(a) < 0$. Τότε $\exists_1$ πραγματική ρίζα $\rho \in [a, \infty]$. **Τότε για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$ η μέθοδος NR συγκλίνει στην ρ .**

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η τάξη σύγκλισης γίνεται **γραμμική**.

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = x^2$ με $x^* = 0$, η μέθοδος δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{1}{2} \quad (\text{τάξη ακριβώς ένα})$$

Γιατί συμβαίνει αυτό;

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι γεωμετρικές ιδιότητες της f (μονοτονία, κυρτότητα) εγγυώνται τη σύγκλιση της NR.

Πρόταση: Έστω $f \in C^2[a, \infty]$ και ότι $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ για $x \geq a$ με $f(a) < 0$. Τότε $\exists_1$ πραγματική ρίζα $\rho \in [a, \infty]$. **Τότε για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$ η μέθοδος NR συγκλίνει στην ρ .**

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η τάξη σύγκλισης γίνεται **γραμμική**.

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = x^2$ με $x^* = 0$, η μέθοδος δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{1}{2} \quad (\text{τάξη ακριβώς ένα})$$

Γιατί συμβαίνει αυτό;

Η απάντηση είναι λόγω της πολλαπλότητας της ρίζας x^* .

Προσδιορισμός ρίζας πολλαπλότητας m

Ορισμός: Η ρίζα x^* είναι πολλαπλότητας m αν η $f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(x) = (x - x^*)^m h(x)$ για $x \neq x^*$, όπου $\lim_{x \rightarrow x^*} h(x) \neq 0$.

Προσδιορισμός ρίζας πολλαπλότητας m

Ορισμός: Η ρίζα x^* είναι πολλαπλότητας m αν η $f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(x) = (x - x^*)^m h(x)$ για $x \neq x^*$, όπου $\lim_{x \rightarrow x^*} h(x) \neq 0$.

Θεώρημα: Η ρίζα x^* της $f(x) \in C^m[a, b]$ είναι πολλαπλότητας m αν και μόνο αν

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

Προσδιορισμός ρίζας πολλαπλότητας m

Ορισμός: Η ρίζα x^* είναι πολλαπλότητας m αν η $f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(x) = (x - x^*)^m h(x)$ για $x \neq x^*$, όπου $\lim_{x \rightarrow x^*} h(x) \neq 0$.

Θεώρημα: Η ρίζα x^* της $f(x) \in C^m[a, b]$ είναι πολλαπλότητας m αν και μόνο αν

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

Θεώρημα: Αν $f(x) \in C^2[a, b]$ και η ρίζα $x^* \in [a, b]$ είναι πολλαπλότητας m τότε η μέθοδος NR συγκλίνει γραμμικά στη ρίζα x^* .

Αποδεικνύεται ότι τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{m}$$

δηλ. για $m \neq 1$ η σύγκλιση είναι γραμμική.

Παραλλαγή της μεθόδου NR για ρίζα γνωστής πολλαπλότητας m

Σε αυτή την περίπτωση η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

για x_0 κοντά στη ρίζα συγκλίνει σ' αυτή με τάξη σύγκλισης $p = 2$. (Άσκηση)

Παραλλαγή της μεθόδου NR για ρίζα γνωστής πολλαπλότητας m

Σε αυτή την περίπτωση η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

για x_0 κοντά στη ρίζα συγκλίνει σ' αυτή με τάξη σύγκλισης $p = 2$. (Άσκηση)

Παραλλαγή της μεθόδου NR για ρίζα άγνωστης πολλαπλότητας $m \geq 1$

Σε αυτή την περίπτωση η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

για x_0 κοντά στη ρίζα συγκλίνει σ' αυτή με τάξη σύγκλισης $p = 2$ ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα της ρίζας, με επιπλέον υπολογιστικό κόστος τον υπολογισμό της $f''(x_n)$. (Άσκηση)

Θεώρημα γενικής σύγκλισης της μεθόδου NR

Θεώρημα: Αν ισχύουν τα εξής:

(1) $f(x) \in C^2[a, b]$

(2) $f(a) \cdot f(b) < 0$

(3) $f'(x) \neq 0$

(4) Η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a, b]$

(5) Αν c το άκρο του $[a, b]$ για το οποίο η $|f'(x)|$ είναι μικρότερη και
$$\left| \frac{f(c)}{f'(c)} \right| \leq b - a,$$

τότε για κάθε $x_0 \in [a, b]$ η μέθοδος NR συγκλίνει τετραγωνικά στη μοναδική ρίζα x^* της $f(x)$ στο $[a, b]$.

- ▷ Οι (1) και (2) εξασφαλίζουν **ύπαρξη** μίας τουλάχιστον ρίζας της $f(x)$ στο $[a, b]$.
- ▷ Η (3) εξασφαλίζει ότι η f είναι γνήσια αύξουσα (αν $f'(x) > 0$) ή φθίνουσα (αν $f'(x) < 0$) στο $[a, b]$ και συνεπώς η ρίζα είναι **μοναδική**.
- ▷ Η (4) εξασφαλίζει ότι η f έχει τα κοίλα άνω (αν $f''(x) > 0$) ή κάτω.
- ▷ Η (5) εξασφαλίζει ότι αν διαλέξουμε $x_0 \in [a, b]$ τότε το $x_1 \in [a, b]$, το οποίο διασφαλίζεται εάν απαιτήσουμε το x_0 να είναι είτε το a ή το b .

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1$ με $x \in [1, 2]$. Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος NR συγκλίνει (σίγουρα) και μάλιστα τετραγωνικά.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1$ με $x \in [1, 2]$. Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος NR συγκλίνει (σίγουρα) και μάλιστα τετραγωνικά.

Λύση Εφαρμόζοντας το Θ. Γενικής Σύγκλισης διαπιστώνεται ότι:

$$f \in C^2[1, 2] \text{ με } f'(x) = 3x^2 - 2 \text{ και } f''(x) = 6x.$$

$$f(1) \cdot f(2) = (-2) \cdot 3 < 0.$$

$$\text{Επίσης } f'(x) \neq 0 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για } x \in [1, 2].$$

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1$ με $x \in [1, 2]$. Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος NR συγκλίνει (σίγουρα) και μάλιστα τετραγωνικά.

Λύση Εφαρμόζοντας το Θ. Γενικής Σύγκλισης διαπιστώνεται ότι:

$$f \in C^2[1, 2] \text{ με } f'(x) = 3x^2 - 2 \text{ και } f''(x) = 6x.$$

$$f(1) \cdot f(2) = (-2) \cdot 3 < 0.$$

$$\text{Επίσης } f'(x) \neq 0 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για } x \in [1, 2].$$

Εξετάζοντας την υπόθεση (5) έχουμε $b - a = 2 - 1 = 1$ με $f'(1) < f'(2)$ και $|f(1)/f'(1)| = 2 > 1$, άρα η NR δεν συγκλίνει (σίγουρα) στο $[1, 2]$.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1$ με $x \in [1, 2]$. Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος NR συγκλίνει (σίγουρα) και μάλιστα τετραγωνικά.

Λύση Εφαρμόζοντας το Θ. Γενικής Σύγκλισης διαπιστώνεται ότι:

$$f \in C^2[1, 2] \text{ με } f'(x) = 3x^2 - 2 \text{ και } f''(x) = 6x.$$

$$f(1) \cdot f(2) = (-2) \cdot 3 < 0.$$

$$\text{Επίσης } f'(x) \neq 0 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για } x \in [1, 2].$$

Εξετάζοντας την υπόθεση (5) έχουμε $b - a = 2 - 1 = 1$ με $f'(1) < f'(2)$ και $|f(1)/f'(1)| = 2 > 1$, άρα η NR δεν συγκλίνει (σίγουρα) στο $[1, 2]$.

Λαμβάνοντας το μέσο του διαστήματος και εξετάζοντας το δεξί τμήμα $[\frac{3}{2}, 2]$ τότε $f(\frac{3}{2})f(2) < 0$ και $|f(\frac{3}{2})/f'(\frac{3}{2})| = \frac{5}{30} < 1$.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1$ με $x \in [1, 2]$. Να βρεθεί διάστημα για το οποίο η μέθοδος NR συγκλίνει (σίγουρα) και μάλιστα τετραγωνικά.

Λύση Εφαρμόζοντας το Θ. Γενικής Σύγκλισης διαπιστώνεται ότι:

$$f \in C^2[1, 2] \text{ με } f'(x) = 3x^2 - 2 \text{ και } f''(x) = 6x.$$

$$f(1) \cdot f(2) = (-2) \cdot 3 < 0.$$

$$\text{Επίσης } f'(x) \neq 0 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για } x \in [1, 2].$$

Εξετάζοντας την υπόθεση (5) έχουμε $b - a = 2 - 1 = 1$ με $f'(1) < f'(2)$ και $|f(1)/f'(1)| = 2 > 1$, άρα η NR δεν συγκλίνει (σίγουρα) στο $[1, 2]$.

Λαμβάνοντας το μέσο του διαστήματος και εξετάζοντας το δεξί τμήμα $[\frac{3}{2}, 2]$ τότε $f(\frac{3}{2})f(2) < 0$ και $|f(\frac{3}{2})/f'(\frac{3}{2})| = \frac{5}{30} < 1$.

Συνεπώς η μέθοδος NR συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [\frac{3}{2}, 2]$.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - c$, $x > 0$ όπου $c > 0$ δεδομένος αριθμός. Ναδειχθεί ότι η μέθοδος NR συγκλίνει στη $\sqrt{c} \forall x_0 > 0$.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - c$, $x > 0$ όπου $c > 0$ δεδομένος αριθμός. Να δειχθεί ότι η μέθοδος NR συγκλίνει στη $\sqrt{c} \forall x_0 > 0$.

Λύση Εφαρμόζοντας το Θ. Γενικής Σύγκλισης διαπιστώνεται ότι:

Οι υποθέσεις (1) και (2) ικανοποιούνται για κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < \sqrt{c} < b$

Οι υποθέσεις (3) και (4) ικανοποιούνται γιατί
 $f'(x) = 2x \neq 0$, $f''(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - c$, $x > 0$ όπου $c > 0$ δεδομένος αριθμός. Να δειχθεί ότι η μέθοδος NR συγκλίνει στη $\sqrt{c} \forall x_0 > 0$.

Λύση Εφαρμόζοντας το Θ. Γενικής Σύγκλισης διαπιστώνεται ότι:

Οι υποθέσεις (1) και (2) ικανοποιούνται για κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < \sqrt{c} < b$

Οι υποθέσεις (3) και (4) ικανοποιούνται γιατί
 $f'(x) = 2x \neq 0$, $f''(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Τέλος, για την (5) θα πρέπει (εφ' όσον $|f'(a)| < |f'(b)|$)

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = \frac{c - a^2}{2a} \leq b - a$$

η οποία ανισότητα ισχύει για $b > \frac{1}{2}(a + \frac{c}{a})$.

Συνεπώς η μέθοδος NR συγκλίνει στη $\sqrt{c} \forall x_0 > 0$.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^k - c$, $x > 0$ όπου $c > 0$ δεδομένος αριθμός. Να δείχθεί ότι η μέθοδος NR συγκλίνει στη $\sqrt[k]{c} \quad \forall \quad x_0 > 0$ και να εφαρμοστεί η μέθοδος για x_0 της επιλογής σας για τον υπολογισμό του $\sqrt[3]{8}$.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^k - c$, $x > 0$ όπου $c > 0$ δεδομένος αριθμός. Να δειχθεί ότι η μέθοδος NR συγκλίνει στη $\sqrt[k]{c} \quad \forall \quad x_0 > 0$ και να εφαρμοστεί η μέθοδος για x_0 της επιλογής σας για τον υπολογισμό του $\sqrt[3]{8}$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\sqrt{17}$ και πάρουμε $x_0 = 4$ τότε οι επαναλήψεις είναι οι

$$x_1 = 4.12$$

$$x_2 = 4.123106$$

$$x_3 = 4.1231056256177$$

$$x_4 = 4.123105625617660549821409856$$

Η τιμή x_4 είναι ακριβής σε **28 σημαντικά** ψηφία. Παρατηρήστε τον αναμενόμενο διπλασιασμό των σημαντικών ψηφίων στους υπολογισμούς.

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^k - c$, $x > 0$ όπου $c > 0$ δεδομένος αριθμός. Να δείχθεί ότι η μέθοδος NR συγκλίνει στη $\sqrt[k]{c} \quad \forall \quad x_0 > 0$ και να εφαρμοστεί η μέθοδος για x_0 της επιλογής σας για τον υπολογισμό του $\sqrt[3]{8}$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\sqrt{17}$ και πάρουμε $x_0 = 4$ τότε οι επαναλήψεις είναι οι

$$x_1 = 4.12$$

$$x_2 = 4.123106$$

$$x_3 = 4.1231056256177$$

$$x_4 = 4.123105625617660549821409856$$

Η τιμή x_4 είναι ακριβής σε **28 σημαντικά** ψηφία. Παρατηρήστε τον αναμενόμενο διπλασιασμό των σημαντικών ψηφίων στους υπολογισμούς.

Η μέθοδος έχει ανακαλυφθεί από τον Έλληνα μηχανικό Ήρωνα (100 π.χ).