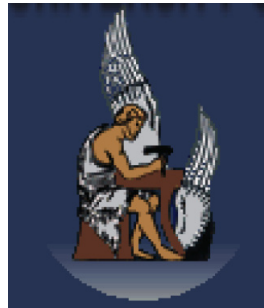


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 5η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Τάξη Σύγκλισης

Σχετίζεται με την ταχύτητα (συνολικά βήματα) που απαιτεί μία (συγκλίνουσα) μέθοδος για να φτάσει στη λύση (με ζητούμενη ακρίβεια).

Ορισμός 1: Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία η οποία συγκλίνει στο x^* . Αν υπάρχουν **θετικές** σταθερές c και p τέτοιες ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = c \neq 0$$

τότε η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ έχει **τάξη σύγκλισης** p (ακριβώς), με **ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης** (ή ρυθμό σύγκλισης) c .

Αν $p = 1 \implies$ γραμμική τάξη σύγκλισης και $c < 1$.

Για $n \gg$ θα ισχύει για το σφάλμα $\epsilon_n = x_n - x^*$

$$|\epsilon_{n+1}| \sim c |\epsilon_n|^p$$

(όπου $\sim$ σημαίνει: είναι ανάλογο ή συμπεριφέρεται ανάλογα)

...Τάξη σύγκλισης ...

Ορισμός 2: Λέμε ότι μία ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά, αν $\exists \ C < 1$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|, \quad \text{για } n \gg$$

Ενώ λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης $p > 1$, αν $\exists \ C > 0$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Για $p = 2, 3$ μιλάμε για τετραγωνική και κυβική αντίστοιχα σύγκλιση.

...Τάξη σύγκλισης ...

Ορισμός 2: Λέμε ότι μία ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά, αν $\exists \ C < 1$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|, \quad \text{για } n \gg$$

Ενώ λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης $p > 1$, αν $\exists \ C > 0$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Για $p = 2, 3$ μιλάμε για τετραγωνική και κυβική αντίστοιχα σύγκλιση.

Παράδειγμα: Για τη μέθοδο διχοτόμησης έχουμε γραμμική τάξη σύγκλισης

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \frac{1}{2}$$

Επαναληπτικές (Ανοικτές) Μέθοδοι-Πρόβλημα Σταθερού Σημείου

Κάθε εξίσωση $f(x) = 0$ μπορεί να γραφεί **ισοδύναμα** στη μορφή $x = \phi(x)$ με πολλούς τρόπους.

Επαναληπτικές (Ανοικτές) Μέθοδοι-Πρόβλημα Σταθερού Σημείου

Κάθε εξίσωση $f(x) = 0$ μπορεί να γραφεί **ισοδύναμα** στη μορφή $x = \phi(x)$ με πολλούς τρόπους.

Παράδειγμα: $f(x) = 3x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 3x^2 \equiv \phi(x)$

Επαναληπτικές (Ανοικτές) Μέθοδοι-Πρόβλημα Σταθερού Σημείου

Κάθε εξίσωση $f(x) = 0$ μπορεί να γραφεί **ισοδύναμα** στη μορφή $x = \phi(x)$ με πολλούς τρόπους.

Παράδειγμα: $f(x) = 3x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 3x^2 \equiv \phi(x)$

Ορισμός: Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού της $\phi(x)$ λέγεται **σταθερό σημείο** (fixed point) αν $x^* = \phi(x^*)$.

Συνεπώς αν $x^* = \phi(x^*) \Rightarrow f(x^*) = 0$ και άρα x^* ρίζα της $f(x)$.

Επαναληπτικές (Ανοικτές) Μέθοδοι-Πρόβλημα Σταθερού Σημείου

Κάθε εξίσωση $f(x) = 0$ μπορεί να γραφεί **ισοδύναμα** στη μορφή $x = \phi(x)$ με πολλούς τρόπους.

Παράδειγμα: $f(x) = 3x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 3x^2 \equiv \phi(x)$

Ορισμός: Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού της $\phi(x)$ λέγεται **σταθερό σημείο** (fixed point) αν $x^* = \phi(x^*)$.

Συνεπώς αν $x^* = \phi(x^*) \Rightarrow f(x^*) = 0$ και άρα x^* ρίζα της $f(x)$.

Ξεκινώντας από μία τιμή x_0 κατασκευάζονται ακολουθίες $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ τ.ω.

$$x_n = \phi(x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ έχουμε σύγκλιση σε ρίζα της $f(x)$.

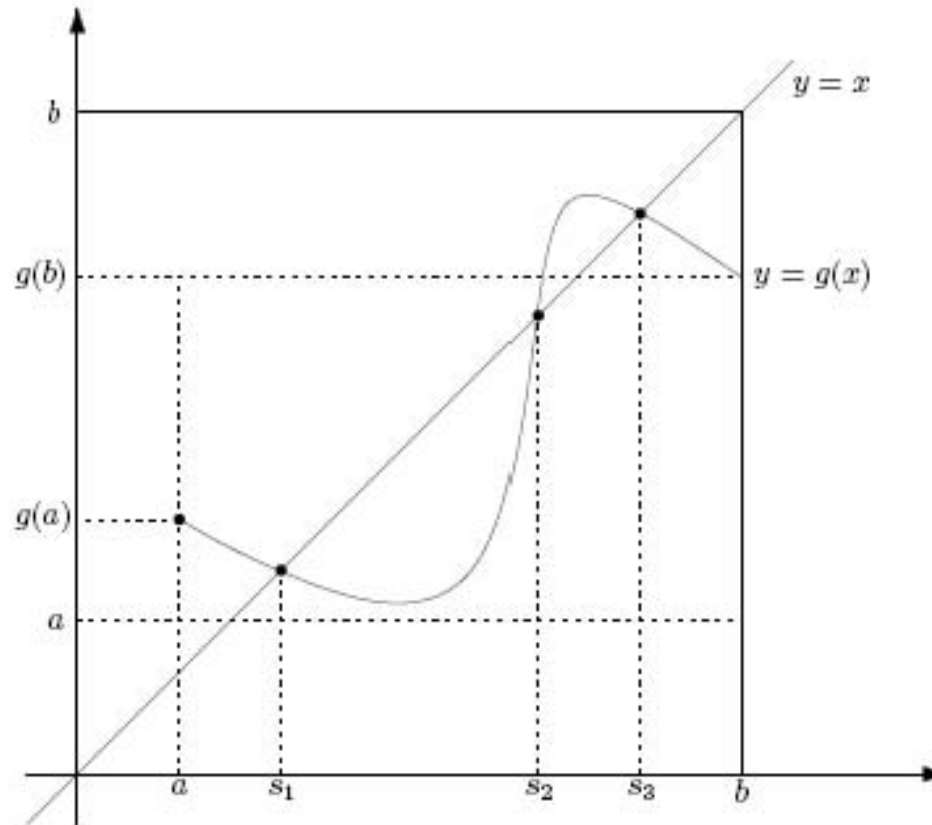
Αν $\phi(x)$ συνεχής: $x^* = \lim x_n = \lim \phi(x_{n-1}) = \phi(\lim x_{n-1}) = \phi(x^*)$

Το πρόβλημα σταθερού σημείου

Πρόταση: (ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΥΠΑΡΞΗΣ) Κάθε **συνεχής** συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ (δηλ. με το πεδίο τιμών της υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, $g([a, b]) \subset [a, b]$) έχει στο $[a, b]$ ένα (τουλάχιστον) σταθερό σημείο.

Το πρόβλημα σταθερού σημείου

Πρόταση: (ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΥΠΑΡΞΗΣ) Κάθε **συνεχής** συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ (δηλ. με το πεδίο τιμών της υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, $g([a, b]) \subset [a, b]$) έχει στο $[a, b]$ ένα (τουλάχιστον) σταθερό σημείο.



Σχήμα: s_1 , s_2 και s_3 σταθερά σημεία της $g(x)$.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

Άσκηση: Η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο στο $[0, 1]$;

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

Άσκηση: Η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο στο $[0, 1]$;

Λύση: Ελέγχουμε αν ισχύει η ικανή συνθήκη. Η ϕ είναι **συνεχής** στο $[0, 1]$.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

Άσκηση: Η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο στο $[0, 1]$;

Λύση: Ελέγχουμε αν ισχύει η ικανή συνθήκη. Η ϕ είναι **συνεχής** στο $[0, 1]$.

Ισχύει $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$;

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

Άσκηση: Η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο στο $[0, 1]$;

Λύση: Ελέγχουμε αν ισχύει η ικανή συνθήκη. Η ϕ είναι **συνεχής** στο $[0, 1]$.

Ισχύει $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$;

Το $\phi(0) = 1$ και $\phi(1) = 1/2$ και ελέγχουμε την μονοτονία της ϕ στο $[0, 1]$.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

Άσκηση: Η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο στο $[0, 1]$;

Λύση: Ελέγχουμε αν ισχύει η ικανή συνθήκη. Η ϕ είναι **συνεχής** στο $[0, 1]$.

Ισχύει $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$;

Το $\phi(0) = 1$ και $\phi(1) = 1/2$ και ελέγχουμε την μονοτονία της ϕ στο $[0, 1]$.

$\phi'(x) = -\ln 2 \cdot 2^{-x} < 0, \Rightarrow \phi$ (γνήσια) φθίνουσα.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

Άσκηση: Η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο στο $[0, 1]$;

Λύση: Ελέγχουμε αν ισχύει η ικανή συνθήκη. Η ϕ είναι **συνεχής** στο $[0, 1]$.

Ισχύει $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$;

Το $\phi(0) = 1$ και $\phi(1) = 1/2$ και ελέγχουμε την μονοτονία της ϕ στο $[0, 1]$.

$\phi'(x) = -\ln 2 \cdot 2^{-x} < 0, \Rightarrow \phi$ (γνήσια) φθίνουσα.

Άρα $\phi([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1] \subset [0, 1]$ και εφόσον η $\phi \searrow$ έχουμε μοναδικό σταθερό σημείο στο $[0, 1]$.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Παράδειγμα: Έστω $g(x) = 2x^2$ (συνεχής) με $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$.

Εδώ **δεν** ισχύει $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ **όμως** $g(0) = 0$ και $g(1/2) = 1/2$. Άρα τα 0 και $1/2$ σταθερά σημεία της $g(x)$.

Άσκηση: Η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο στο $[0, 1]$;

Λύση: Ελέγχουμε αν ισχύει η ικανή συνθήκη. Η ϕ είναι **συνεχής** στο $[0, 1]$.

Ισχύει $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$;

Το $\phi(0) = 1$ και $\phi(1) = 1/2$ και ελέγχουμε την μονοτονία της ϕ στο $[0, 1]$.

$\phi'(x) = -\ln 2 \cdot 2^{-x} < 0, \Rightarrow \phi$ (γνήσια) φθίνουσα.

Άρα $\phi([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1] \subset [0, 1]$ και εφόσον η $\phi \searrow$ έχουμε μοναδικό σταθερό σημείο στο $[0, 1]$.

Θέλουμε να βρούμε **ΙΚΑΝΗ** και **ΑΝΑΓΚΑΙΑ** συνθήκη ύπαρξης και μοναδικότητας σταθερού σημείου.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Ορισμός: Λέμε ότι μία συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ικανοποιεί τη **συνθήκη του Lipschitz**, αν $\exists$ σταθερά $L \geq 0$ τ.ω.

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Ορισμός: Λέμε ότι μία συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ικανοποιεί τη **συνθήκη του Lipschitz**, αν $\exists$ σταθερά $L \geq 0$ τ.ω.

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Αν η σταθερά $L < 1$, τότε η ϕ λέγεται **συστολή** στο $[a, b]$.

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Ορισμός: Λέμε ότι μία συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ικανοποιεί τη **συνθήκη του Lipschitz**, αν $\exists$ σταθερά $L \geq 0$ τ.ω.

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Αν η σταθερά $L < 1$, τότε η ϕ λέγεται **συστολή** στο $[a, b]$.

Αν $\phi \in C^1[a, b]$ ικανοποιεί **πάντα** τη συνθήκη του Lipschitz και η **μικρότερη** σταθερά για την οποία ισχύει (από το Θ. μέσης τιμής) είναι η

$$L = \max_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)|$$

. . . Το πρόβλημα σταθερού σημείου . . .

Ορισμός: Λέμε ότι μία συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ικανοποιεί τη **συνθήκη του Lipschitz**, αν $\exists$ σταθερά $L \geq 0$ τ.ω.

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Αν η σταθερά $L < 1$, τότε η ϕ λέγεται **συστολή** στο $[a, b]$.

Αν $\phi \in C^1[a, b]$ ικανοποιεί **πάντα** τη συνθήκη του Lipschitz και η **μικρότερη** σταθερά για την οποία ισχύει (από το Θ. μέσης τιμής) είναι η

$$L = \max_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)|$$

ΙΚΑΝΗ και ΑΝΑΓΚΑΙΑ συνθήκη ύπαρξης και μοναδικότητας σταθερού σημείου

.

Θεώρημα Συστολής ή Σταθερού Σημείου του Banach

Θεώρημα: Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ μια συστολή με σταθερά $L (< 1)$. Τότε η ϕ έχει στο $[a, b]$ ένα **μοναδικό** σταθερό σημείο, δηλ.

$$\exists_1 x^* \in [a, b] \quad \text{τ.ω.} \quad x^* = \phi(x^*).$$

Θεώρημα Συστολής ή Σταθερού Σημείου του Banach

Θεώρημα: Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ μια συστολή με σταθερά $L (< 1)$. Τότε η ϕ έχει στο $[a, b]$ ένα **μοναδικό** σταθερό σημείο, δηλ.

$$\exists_1 x^* \in [a, b] \quad \text{τ.ω.} \quad x^* = \phi(x^*).$$

Επιπλέον, για **τυχαία αρχική τιμή** $x_0 \in [a, b]$ η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ με $x_n = \phi(x_{n-1})$, είναι καλώς ορισμένη (δηλ. $\forall n, x_n \in [a, b]$) και συγκλίνει στο x^* .

Θεώρημα Συστολής ή Σταθερού Σημείου του Banach

Θεώρημα: Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ μια συστολή με σταθερά $L (< 1)$. Τότε η ϕ έχει στο $[a, b]$ ένα **μοναδικό** σταθερό σημείο, δηλ.

$$\exists_1 x^* \in [a, b] \quad \text{τ.ω.} \quad x^* = \phi(x^*).$$

Επιπλέον, για **τυχαία αρχική τιμή** $x_0 \in [a, b]$ η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ με $x_n = \phi(x_{n-1})$, είναι καλώς ορισμένη (δηλ. $\forall n, x_n \in [a, b]$) και συγκλίνει στο x^* .

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω εκτιμήσεις για το σφάλμα

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max(x_0 - a, x_0 - b), \quad (1)$$

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \quad (\text{εκ των προτέρων εκτίμηση}) \quad (2)$$

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}| \quad (\text{εκ των υστέρων εκτίμηση}). \quad (3)$$

Η εκτίμηση (3) είναι καλύτερη από την (2) γιατί $|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1} |x_1 - x_0|$.

Μέθοδος σταθερού σημείου

Για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής του x^*

- επιλέγεται μια αυθαίρετη αρχική τιμή $x_0 \in [a, b]$ και
- δημιουργείται η ακολουθία $x_n = \phi(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$

Μέθοδος σταθερού σημείου

Για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής του x^*

- επιλέγεται μια αυθαίρετη αρχική τιμή $x_0 \in [a, b]$ και
- δημιουργείται η ακολουθία $x_n = \phi(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$

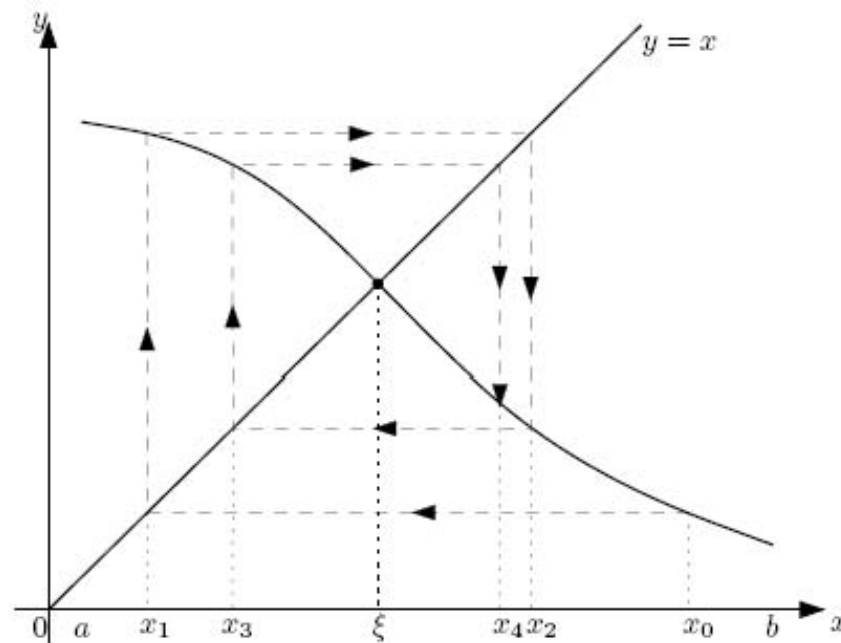
Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος συστολής τότε $x_n \rightarrow x^*$

Μέθοδος σταθερού σημείου

Για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής του x^*

- επιλέγεται μια αυθαίρετη αρχική τιμή $x_0 \in [a, b]$ και
- δημιουργείται η ακολουθία $x_n = \phi(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$

Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος συστολής τότε $x_n \rightarrow x^*$



Σχήμα: Η μέθοδος του σταθερού σημείου.

Παράδειγμα: Συγκλίνει η μέθοδος $x_n = \phi(x_{n-1})$ με $\phi(x) = 2^{-x}$ σε μοναδικό σταθερό σημείο x^* στο $[0, 1]$;

Παράδειγμα: Συγκλίνει η μέθοδος $x_n = \phi(x_{n-1})$ με $\phi(x) = 2^{-x}$ σε μοναδικό σταθερό σημείο x^* στο $[0, 1]$;

Έχουμε δεί ότι η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει σταθερό σημείο στο $[0, 1]$ και ότι ισχύει $\phi([0, 1] \subset [0, 1]$, τό ότι είναι μοναδικό φαίνεται και από το γεγονός ότι είναι συστολή

$$L = \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |2^{-x} \ln 2| = \ln 2 \approx 0.693 < 1$$

Συνεπώς η ακολουθία $x_{n+1} = 2^{-x_n}$ συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [a, b]$ στο σταθερό σημείο x^* της ϕ , δηλ. στη μοναδική ρίζα της $f(x) = x - 2^{-x} = 0$.

Παράδειγμα: Συγκλίνει η μέθοδος $x_n = \phi(x_{n-1})$ με $\phi(x) = 2^{-x}$ σε μοναδικό σταθερό σημείο x^* στο $[0, 1]$;

Έχουμε δεί ότι η $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει σταθερό σημείο στο $[0, 1]$ και ότι ισχύει $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$, τό ότι είναι μοναδικό φαίνεται και από το γεγονός ότι είναι συστολή

$$L = \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |2^{-x} \ln 2| = \ln 2 \approx 0.693 < 1$$

Συνεπώς η ακολουθία $x_{n+1} = 2^{-x_n}$ συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [a, b]$ στο σταθερό σημείο x^* της ϕ , δηλ. στη μοναδική ρίζα της $f(x) = x - 2^{-x} = 0$.

Ερωτήματα:

- Πόσο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος (δηλ. ποιά η τάξη σύγκλισης);
- Ποιό είναι ένα κατάλληλο κριτήριο τερματισμού της μεθόδου;

Άσκηση I Η εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει μία ρίζα x^* στο $[2, 3]$. Η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2$ για $x_0 \in [2, 3]$ συγκλίνει στη x^* ;

Άσκηση I Η εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει μία ρίζα x^* στο $[2, 3]$. Η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2$ για $x_0 \in [2, 3]$ συγκλίνει στη x^* ;

Λύση Έχουμε $\phi(x) = 2 + 1/x^2$ συνεχής στο $[2, 3]$.

Άσκηση I Η εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει μία ρίζα x^* στο $[2, 3]$. Η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2$ για $x_0 \in [2, 3]$ συγκλίνει στη x^* ;

Λύση Έχουμε $\phi(x) = 2 + 1/x^2$ συνεχής στο $[2, 3]$.

Η $\phi'(x) = -2/x^3 < 0 \Rightarrow$ η ϕ φθίνουσα στο $[2, 3]$, με ακρότατα $\phi(3) = 2 + 1/9$ και $\phi(2) = 2 + 1/4$

Άσκηση I Η εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει μία ρίζα x^* στο $[2, 3]$. Η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2$ για $x_0 \in [2, 3]$ συγκλίνει στη x^* ;

Λύση Έχουμε $\phi(x) = 2 + 1/x^2$ συνεχής στο $[2, 3]$.

Η $\phi'(x) = -2/x^3 < 0 \Rightarrow$ η ϕ φθίνουσα στο $[2, 3]$, με ακρότατα $\phi(3) = 2 + 1/9$ και $\phi(2) = 2 + 1/4$

Συνεπώς $\phi(x) \in [2 + 1/9, 2 + 1/4] \subset [2, 3], \quad \forall x \in [2, 3]$

Άσκηση I Η εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει μία ρίζα x^* στο $[2, 3]$. Η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = 2 + 1/x_n^2$ για $x_0 \in [2, 3]$ συγκλίνει στη x^* ;

Λύση Έχουμε $\phi(x) = 2 + 1/x^2$ συνεχής στο $[2, 3]$.

Η $\phi'(x) = -2/x^3 < 0 \Rightarrow$ η ϕ φθίνουσα στο $[2, 3]$, με ακρότατα $\phi(3) = 2 + 1/9$ και $\phi(2) = 2 + 1/4$

Συνεπώς $\phi(x) \in [2 + 1/9, 2 + 1/4] \subset [2, 3], \quad \forall x \in [2, 3]$

Επίσης (ελέγχοντας ίσως την $\phi''(x)$)

$$|\phi'(x)| = |-2/x^3| \leq \frac{1}{4} \quad \text{για } x \in [2, 3] \quad (\text{συστολή})$$

Άρα η $\phi(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. συστολής και συνεπώς η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει για $x_0 \in [2, 3]$ στη $x^* \in [2, 3]$

Άσκηση II Η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τις 2 και -1 . Να υπολογιστεί (προσεγγιστεί) η $x^* = 2$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου.

Άσκηση II Η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τις 2 και -1 . Να υπολογιστεί (προσεγγιστεί) η $x^* = 2$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου.

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

Άσκηση II Η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τις 2 και -1 . Να υπολογιστεί (προσεγγιστεί) η $x^* = 2$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου.

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

Υπάρχουν αρκετές επιλογές

(α) $\phi(x) = x^2 - 2$

(β) $\phi(x) = \sqrt{2 + x}$

(γ) $\phi(x) = 1 + 2/x$

(δ) $\phi(x) = x - \frac{x^2 - x - 2}{m}, m \neq 0$

Άσκηση II Η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τις 2 και -1 . Να υπολογιστεί (προσεγγιστεί) η $x^* = 2$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου.

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

Υπάρχουν αρκετές επιλογές

(α) $\phi(x) = x^2 - 2$

(β) $\phi(x) = \sqrt{2 + x}$

(γ) $\phi(x) = 1 + 2/x$

(δ) $\phi(x) = x - \frac{x^2 - x - 2}{m}, m \neq 0$

Επιλογή (α) Η $\phi'(x) = 2x \Rightarrow |\phi'(x)| < 1$ (συστολή) για $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, όμως το $2 \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Άσκηση II Η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τις 2 και -1 . Να υπολογιστεί (προσεγγιστεί) η $x^* = 2$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου.

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

Υπάρχουν αρκετές επιλογές

(α) $\phi(x) = x^2 - 2$

(β) $\phi(x) = \sqrt{2 + x}$

(γ) $\phi(x) = 1 + 2/x$

(δ) $\phi(x) = x - \frac{x^2 - x - 2}{m}, m \neq 0$

Επιλογή (α) Η $\phi'(x) = 2x \Rightarrow |\phi'(x)| < 1$ (συστολή) για $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, όμως το $2 \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Επιλογή (β) Είναι $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0 \Rightarrow \phi \nearrow$

Για $x > 0$ έχουμε $\phi(x) > 0$ και $0 \leq \phi'(x) \leq 1/\sqrt{8} < 1 \Rightarrow$ (συστολή)

Άσκηση II Η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τις 2 και -1 . Να υπολογιστεί (προσεγγιστεί) η $x^* = 2$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου.

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

Υπάρχουν αρκετές επιλογές

(α) $\phi(x) = x^2 - 2$

(β) $\phi(x) = \sqrt{2+x}$

(γ) $\phi(x) = 1 + 2/x$

(δ) $\phi(x) = x - \frac{x^2-x-2}{m}, m \neq 0$

Επιλογή (α) Η $\phi'(x) = 2x \Rightarrow |\phi'(x)| < 1$ (συστολή) για $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, όμως το $2 \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Επιλογή (β) Είναι $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0 \Rightarrow \phi \nearrow$

Για $x > 0$ έχουμε $\phi(x) > 0$ και $0 \leq \phi'(x) \leq 1/\sqrt{8} < 1 \Rightarrow$ (συστολή)

Για $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2+x} \leq 2 \Rightarrow \phi([0, 2]) = [\phi(0), \phi(2)] \subset [0, 2]$

Άσκηση II Η εξίσωση $f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τις 2 και -1 . Να υπολογιστεί (προσεγγιστεί) η $x^* = 2$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου.

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

Υπάρχουν αρκετές επιλογές

(α) $\phi(x) = x^2 - 2$

(β) $\phi(x) = \sqrt{2+x}$

(γ) $\phi(x) = 1 + 2/x$

(δ) $\phi(x) = x - \frac{x^2-x-2}{m}, m \neq 0$

Επιλογή (α) Η $\phi'(x) = 2x \Rightarrow |\phi'(x)| < 1$ (συστολή) για $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, όμως το $2 \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Επιλογή (β) Είναι $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0 \Rightarrow \phi \nearrow$

Για $x > 0$ έχουμε $\phi(x) > 0$ και $0 \leq \phi'(x) \leq 1/\sqrt{8} < 1 \Rightarrow$ (συστολή)

Για $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2+x} \leq 2 \Rightarrow \phi([0, 2]) = [\phi(0), \phi(2)] \subset [0, 2]$

Συνεπώς για $x \in [0, k], k \geq 2$ η $\phi(x) \in C[0, k]$ και είναι συστολή, άρα

ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις το Θ. συστολής και συνεπώς η

επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \rightarrow x^* = 2$.

Εφαρμογή

Αν επιλέξουμε αρχική τιμή $x_0 = 0 \in [0, k]$, $k \geq 2$, τότε η εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

παράγει την ακολουθία:

$$x_1 = \sqrt{2} = 1.41421$$

$$x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{3.41421} \approx 1.84776$$

$$x_3 = \sqrt{2 + x_2} = \sqrt{3.84776} \approx 1.96157$$

$$x_4 = \sqrt{2 + x_3} = \sqrt{3.96157} \approx 1.99037$$

$$x_5 = \sqrt{2 + x_4} = \sqrt{3.99037} \approx 1.99759$$

$$x_6 = \sqrt{2 + x_5} = \sqrt{3.99759} \approx 1.99939$$

$\vdots$

που συγκλίνει προς τη ρίζα $x^* = 2$.

Ερωτήματα:

- Πόσο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος (δηλ. ποιά η τάξη σύγκλισης);
- Ποιό είναι ένα κατάλληλο κριτήριο τερματισμού της μεθόδου;

Ερωτήματα:

- Πόσο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος (δηλ. ποιά η τάξη σύγκλισης);
- Ποιό είναι ένα κατάλληλο κριτήριο τερματισμού της μεθόδου;

Από το Θ. συστολής

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max(x_0 - a, x_0 - b), \quad (4)$$

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \quad (\text{εκ των προτέρων εκτίμηση}) \quad (5)$$

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}| \quad (\text{εκ των υστέρων εκτίμηση}). \quad (6)$$

Ερωτήματα:

- Πόσο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος (δηλ. ποιά η τάξη σύγκλισης);
- Ποιό είναι ένα κατάλληλο κριτήριο τερματισμού της μεθόδου;

Από το Θ. συστολής

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max(x_0 - a, x_0 - b), \quad (4)$$

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \quad (\text{εκ των προτέρων εκτίμηση}) \quad (5)$$

$$|\epsilon_n| = |x_n - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}| \quad (\text{εκ των υστέρων εκτίμηση}). \quad (6)$$

Απόδειξη (4): Λόγω του ότι $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ και ισχύει η συνθήκη του Lipschitz

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |\phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)| \\ &\leq L |x_{n-1} - x^*| \leq \dots \leq L^n |x_0 - x^*| \end{aligned}$$

Τάξη Σύγκλισης

Από την απόδειξη της (4) ισχύει

$$|x_{n+1} - x^*| \leq L|x_n - x^*|, \quad L < 1$$

άρα η ακολουθεία $\{x_n\}$ συγκλίνει τουλάχιστον γραμμικά

Τάξη Σύγκλισης

Από την απόδειξη της (4) ισχύει

$$|x_{n+1} - x^*| \leq L|x_n - x^*|, \quad L < 1$$

άρα η ακολουθεία $\{x_n\}$ **συγκλίνει τουλάχιστον γραμμικά**

Έστω ότι η ϕ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. συστολής και επιπλέον είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

Τότε από το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** $\exists \xi_n \in [x_n, x^*]$, τ.ω.

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) = \phi'(\xi_n)(x_n - x^*)$$

Τάξη Σύγκλισης

Από την απόδειξη της (4) ισχύει

$$|x_{n+1} - x^*| \leq L|x_n - x^*|, \quad L < 1$$

άρα η ακολουθεία $\{x_n\}$ **συγκλίνει τουλάχιστον γραμμικά**

Έστω ότι η ϕ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. συστολής και επιπλέον είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

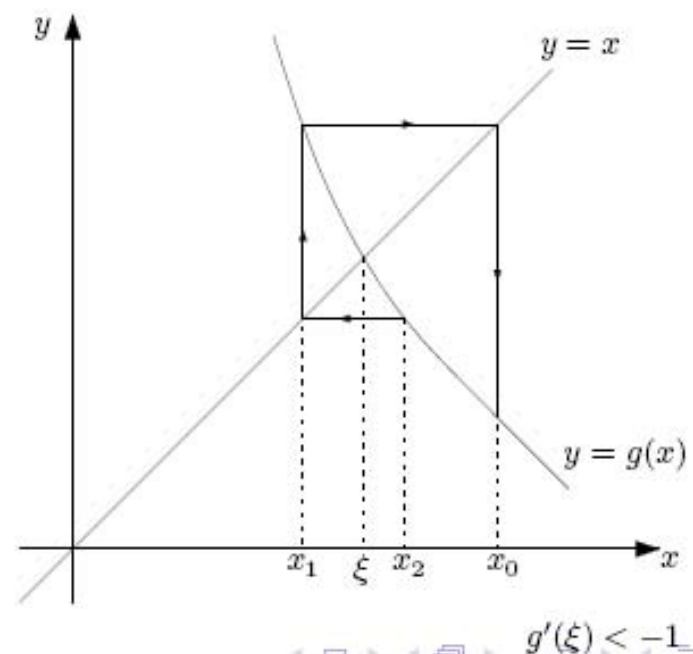
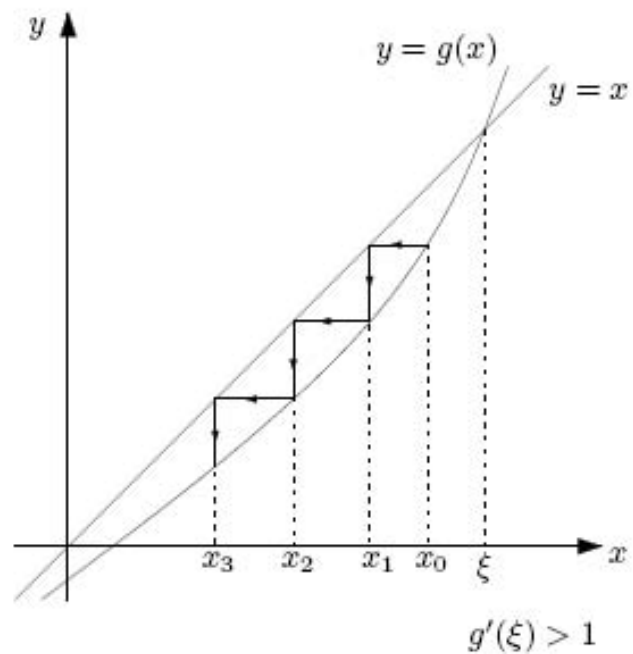
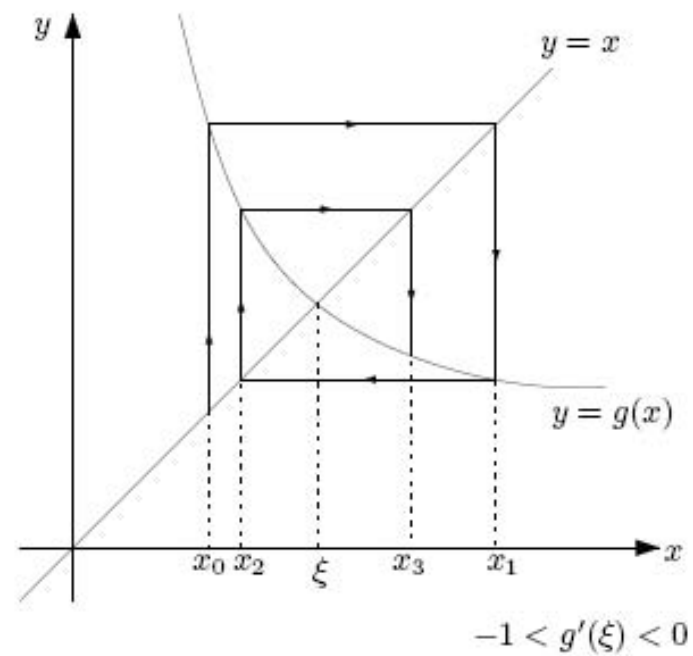
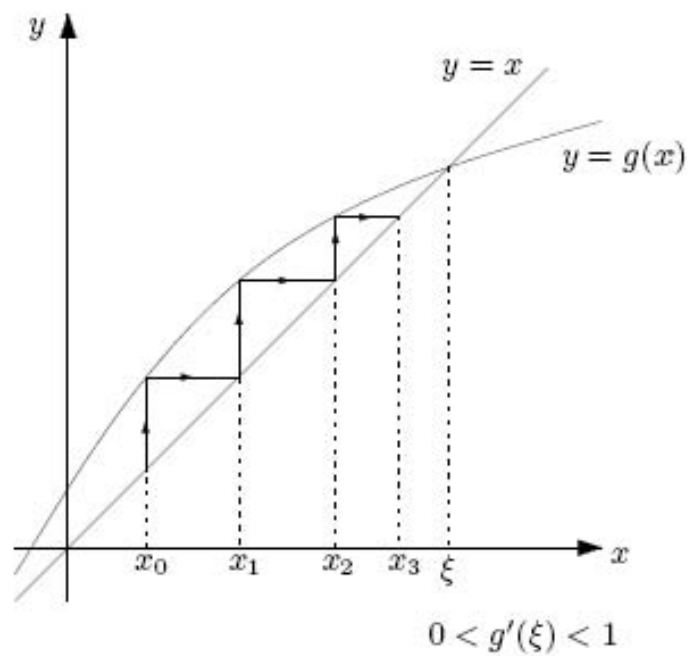
Τότε από το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** $\exists \xi_n \in [x_n, x^*]$, τ.ω.

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) = \phi'(\xi_n)(x_n - x^*)$$

Τότε, επειδή $x_n \rightarrow x^* \Rightarrow \xi_n \rightarrow x^*$ και της συνέχειας της ϕ'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \phi'(x^*)$$

Άρα αν $\phi'(x^*) \neq 0$, εφόσον από το Θ. συστολής $|\phi'(x^*)| \leq L < 1$, η **τάξη σύγκλισης** της $\{x_n\}$ με $x_{n+1} = \phi(x_n)$ θα είναι **ακριβώς ένα**.



Άσκηση III Δίνεται η $f(x) \in C^1[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.
Αν $\phi(x) = x + g(x)f(x)$, να προσδιοριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε η μέθοδος σταθερού σημείου να έχει τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη από ένα.

Άσκηση III Δίνεται η $f(x) \in C^1[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.
Αν $\phi(x) = x + g(x)f(x)$, να προσδιοριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε η μέθοδος σταθερού σημείου να έχει τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη από ένα.

Λύση Για τετραγωνική σύγκλιση πρέπει $\phi'(x^*) = 0$, άρα

$$\phi'(x) = 1 + g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$$

Άσκηση III Δίνεται η $f(x) \in C^1[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.
Αν $\phi(x) = x + g(x)f(x)$, να προσδιοριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε η μέθοδος σταθερού σημείου να έχει τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη από ένα.

Λύση Για τετραγωνική σύγκλιση πρέπει $\phi'(x^*) = 0$, άρα

$$\phi'(x) = 1 + g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$$

για $x = x^*$ ότι

$$\phi'(x^*) = 0 = 1 + f'(x^*)g(x^*), \quad (\text{εφ'όσον } f(x^*) = 0)$$

Άρα η τελευταία σχέση γράφεται $g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$ από την οποία προκύπτει (χωρίς να είναι η μόνη επιλογή) ότι η

$$g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Άσκηση III Δίνεται η $f(x) \in C^1[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ και x^* ρίζα της $f(x) = 0$.
Αν $\phi(x) = x + g(x)f(x)$, να προσδιοριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε η μέθοδος σταθερού σημείου να έχει τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη από ένα.

Λύση Για τετραγωνική σύγκλιση πρέπει $\phi'(x^*) = 0$, άρα

$$\phi'(x) = 1 + g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$$

για $x = x^*$ ότι

$$\phi'(x^*) = 0 = 1 + f'(x^*)g(x^*), \quad (\text{εφ'όσον } f(x^*) = 0)$$

Άρα η τελευταία σχέση γράφεται $g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$ από την οποία προκύπτει (χωρίς να είναι η μόνη επιλογή) ότι η

$$g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Έτσι η μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1} = \phi(x_n)$ να γράφεται

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Κριτήριο Τερματισμού

Ισχύει όπως είδαμε η εκτίμηση

$$|x_n - x^*| \leq L|x_{n-1} - x^*|$$

Έστω η $\delta = \frac{1}{2}10^{-k}$ είναι η **ανεκτικότητα** (ή **επιθυμητή ακρίβεια**)

Από την (8) $\Rightarrow$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{L}{1-L}\delta, \quad \text{από κάποιο βήμα } N \text{ και πάνω}$$

άρα ένα ασφαλές κριτήριο τερματισμού είναι: ΥΠΟΛΟΓΙΣΕ ΤΑ x_n ΜΕΧΡΙ $n = N$ τ.ω.

$$\epsilon = |x_{N+1} - x_N| < \delta$$

ή

$$\epsilon_a = \frac{|x_{N+1} - x_N|}{|x_{N+1}|} \cdot 100 < \delta\%$$

Αλγόριθμος σταθερού

Δίνονται x_0 και $\phi(x)$

1 Για $n = 1, N_{\max}$

$$x_n \leftarrow \phi(x_{n-1})$$

αν $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$, τύπωσε $x_n, N = n, \rightarrow$ έξοδος $x^* = x_n$

διαφορετικά

$$n \leftarrow n + 1$$

πήγαινε στο 1

Άσκηση

Με τη μέθοδο σταθερού σημείου να βρεθεί η ρίζα της $f(x) = e^{-x} - x$ με ανοχή σφάλματος 10^{-2} (ή 1%)

Άσκηση

Με τη μέθοδο σταθερού σημείου να βρεθεί η ρίζα της $f(x) = e^{-x} - x$ με ανοχή σφάλματος 10^{-2} (ή 1%)

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

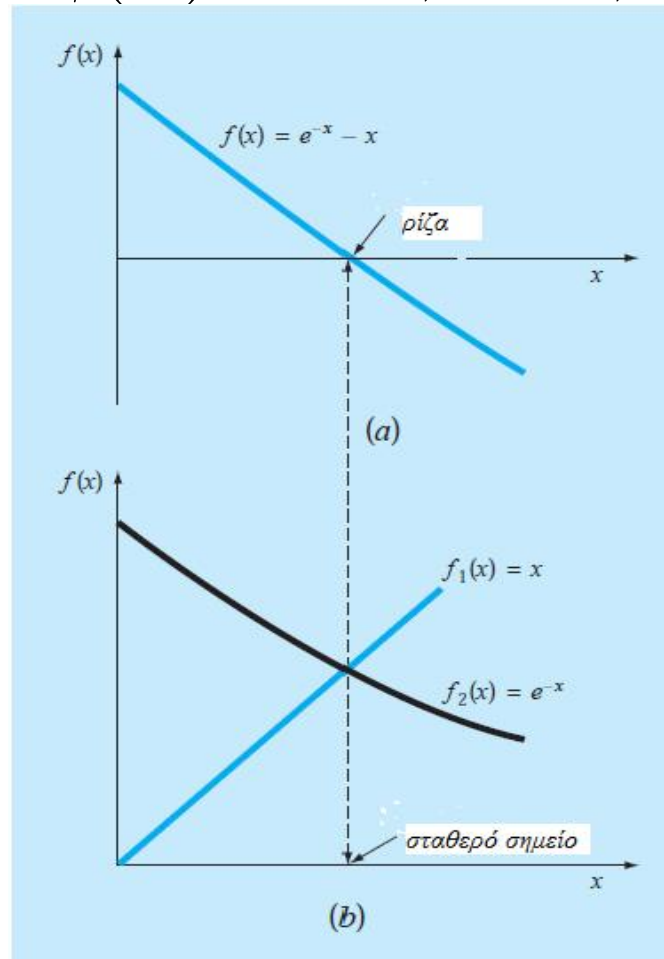
$$x_{i+1} = \phi(x_i) = e^{-x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Άσκηση

Με τη μέθοδο σταθερού σημείου να βρεθεί η ρίζα της $f(x) = e^{-x} - x$ με ανοχή σφάλματος 10^{-2} (ή 1%)

Λύση Πρέπει κατ' αρχάς να μετασχηματιστεί η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$

$$x_{i+1} = \phi(x_i) = e^{-x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$



Άσκηση (συνέχεια)

Για το Θ . συστολής $|\phi(x)'| = e^{-x} < 1 \ \forall \ x > 0$ και $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$

Άσκηση (συνέχεια)

Για το Θ. συστολής $|\phi(x)'| = e^{-x} < 1 \ \forall \ x > 0$ και $\phi([0, 1]) \subset [0, 1]$

i	x_i	ε_a (%)
0	0	
1	1.000000	100.0
2	0.367879	171.8
3	0.692201	46.9
4	0.500473	38.3
5	0.606244	17.4
6	0.545396	11.2
7	0.579612	5.90
8	0.560115	3.48
9	0.571143	1.93
10	0.564879	1.11

Αργή σύγκλιση! Η πραγματική ρίζα είναι $x^* = 0.56714329$.

Άσκηση (συνέχεια)

Πόσα, κατ' εκτίμηση, βήματα της μεθόδου θα χρειαζόμασταν για ανοχή σφάλματος $\delta = 10^{-6}$ για $x \in [0.3, 1]$ και δίνοντας αρχική τιμή $x_0 = 1$;

Άσκηση (συνέχεια)

Πόσα, κατ' εκτίμηση, βήματα της μεθόδου θα χρειαζόμασταν για ανοχή σφάλματος $\delta = 10^{-6}$ για $x \in [0.3, 1]$ και δίνοντας αρχική τιμή $x_0 = 1$; Θέλουμε να ικανοποιείται η σχέση

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0| < \delta \quad \text{Ποιά η τιμή του } L?$$

Άσκηση (συνέχεια)

Πόσα, κατ' εκτίμηση, βήματα της μεθόδου θα χρειαζόμασταν για ανοχή σφάλματος $\delta = 10^{-6}$ για $x \in [0.3, 1]$ και δίνοντας αρχική τιμή $x_0 = 1$; Θέλουμε να ικανοποιείται η σχέση

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0| < \delta \quad \text{Ποιά η τιμή του } L?$$

Γνωρίζουμε ότι $L = \max_{0.3 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = |-e^{-0.3}| \approx 0.7408$, άρα

Άσκηση (συνέχεια)

Πόσα, κατ' εκτίμηση, βήματα της μεθόδου θα χρειαζόμασταν για ανοχή σφάλματος $\delta = 10^{-6}$ για $x \in [0.3, 1]$ και δίνοντας αρχική τιμή $x_0 = 1$; Θέλουμε να ικανοποιείται η σχέση

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0| < \delta \quad \text{Ποιά η τιμή του } L?$$

Γνωρίζουμε ότι $L = \max_{0.3 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = |-e^{-0.3}| \approx 0.7408$, άρα

$$\frac{0.7408^n}{1 - 0.7408} |0.367879 - 1| < 10^{-6}$$

$$2.43873 \cdot 0.7408^n < 10^{-6}$$

$$n > 49.02$$