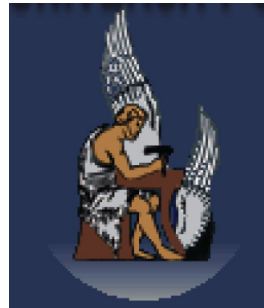


Αριθμητική Ανάλυση

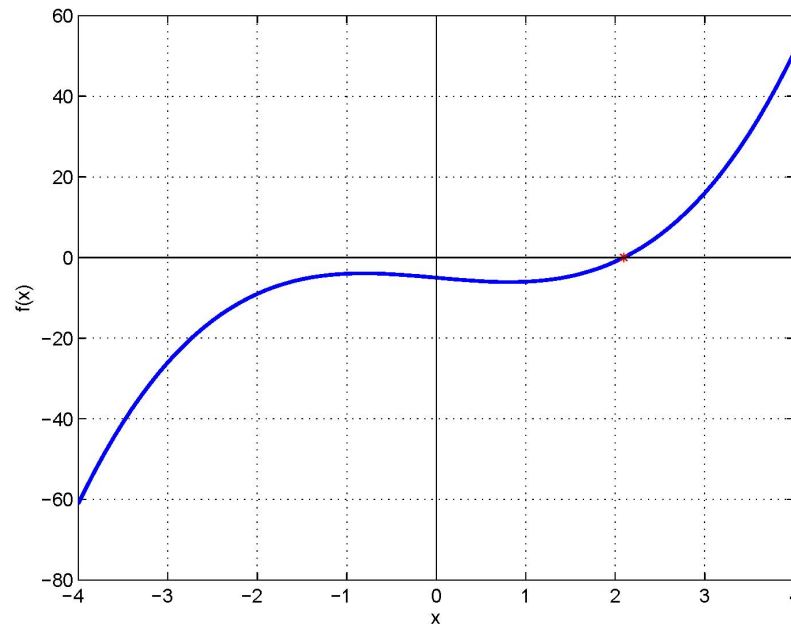
Αργύρης Δελής

Διάλεξη 4η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Κεφ. 2: Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

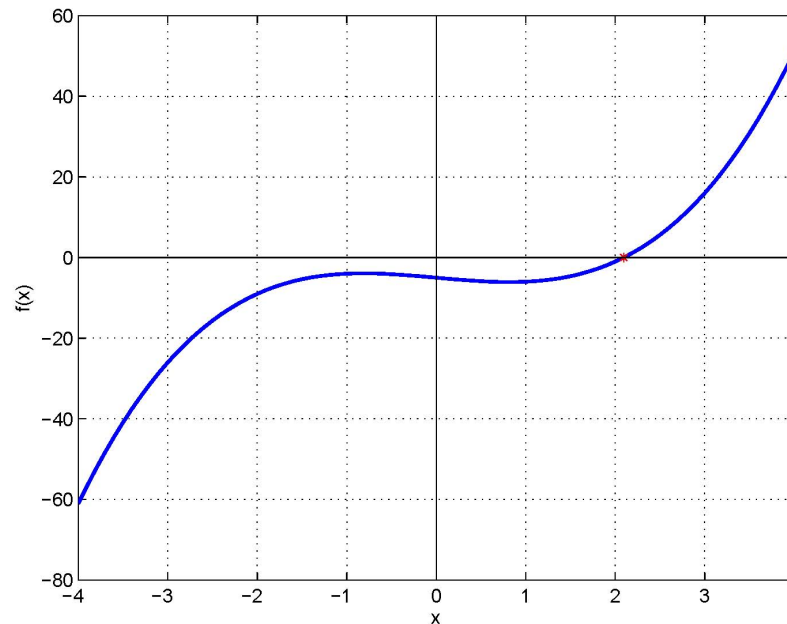


Ένα από τα βασικά προβλήματα στις εφαρμογές είναι η εύρεση ριζών μιας εξίσωσης της μορφής

$$f(x) = 0$$

όπου η $f(x)$ είναι μία συνάρτηση **πραγματικής** ή **μιγαδικής** μεταβλητής x .

Κεφ. 2: Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων



Ένα από τα βασικά προβλήματα στις εφαρμογές είναι η εύρεση ριζών μιας εξίσωσης της μορφής

$$f(x) = 0$$

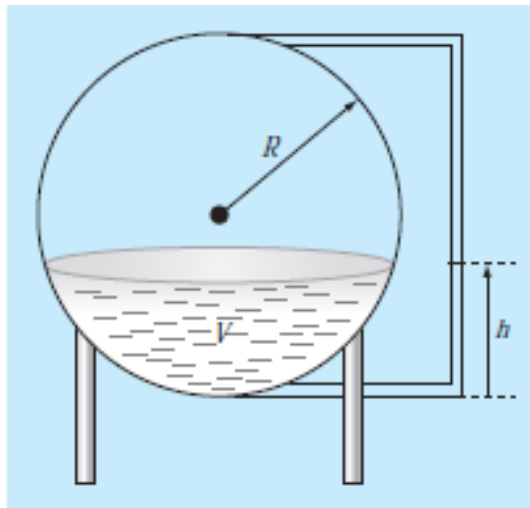
όπου η $f(x)$ είναι μία συνάρτηση **πραγματικής** ή **μιγαδικής** μεταβλητής x .

- Μόνο μία μικρή κατηγορία εξισώσεων μπορούν να λυθούν με τη χρήση κλασικών Μαθηματικών (π.χ. πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ≤ 4 .)

Παράδειγμα I

Θέλετε να σχεδιάσετε μία σφαιρική δεξαμενή για αποθήκευση νερού σε ένα μικρό χωριό. Ο όγκος του νερού που θα χωράει η δεξαμενή υπολογίζεται (με βάση το σχήμα) ως

$$V = \pi h^2 \frac{(3R - h)}{3}$$

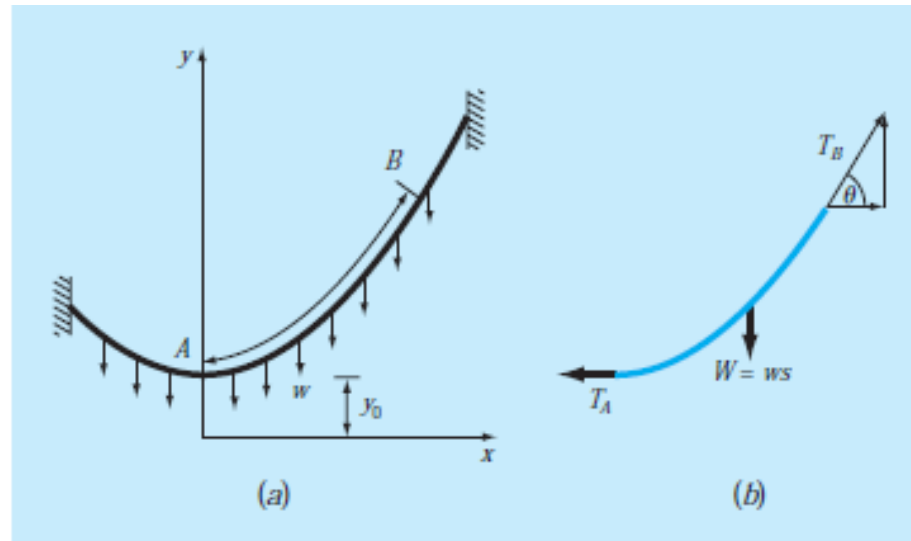


‘Αν $R = 3m$, τί βάθος πρέπει να έχει το νερό για να περιέχει $V = 30m^3$;

Παράδειγμα II

Η κατάσταση ισοροποίας ενός καλωδίου μεταξύ δύο (άνισων) σημείων δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$y'' = \frac{w}{T_A} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad y(0) = y_0$$

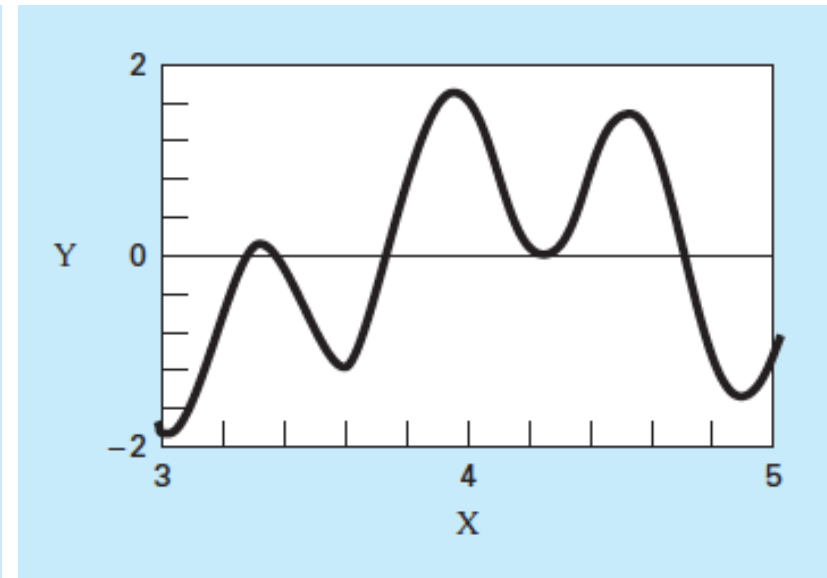
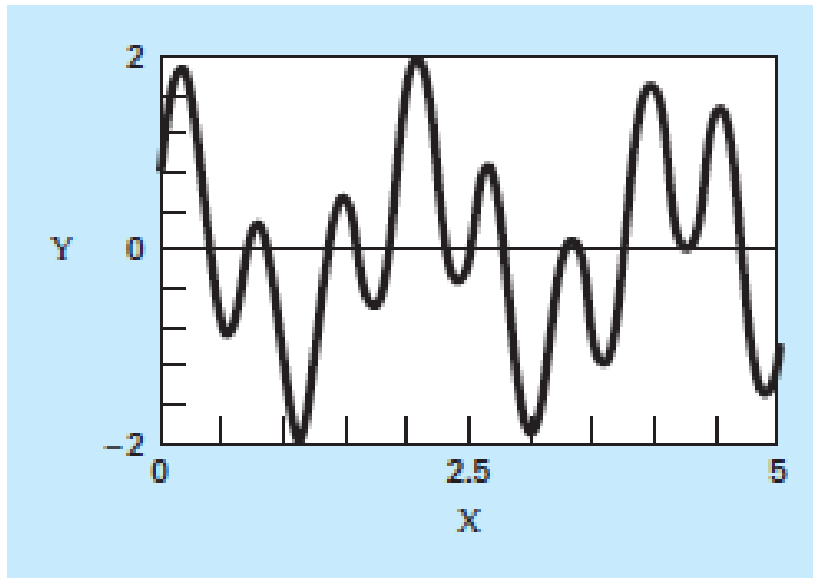


Η λύση της Δ.Ε. είναι $y(x) = \frac{T_A}{w} \cosh \left(\frac{w}{T_A} x \right) + y_0 - \frac{T_A}{w}$

Ποιά η δύναμη T_A αν $w = 12$, $y_0 = 6$ για να είναι το ύψος του καλωδίου $y = 15$ στο $x = 50$;

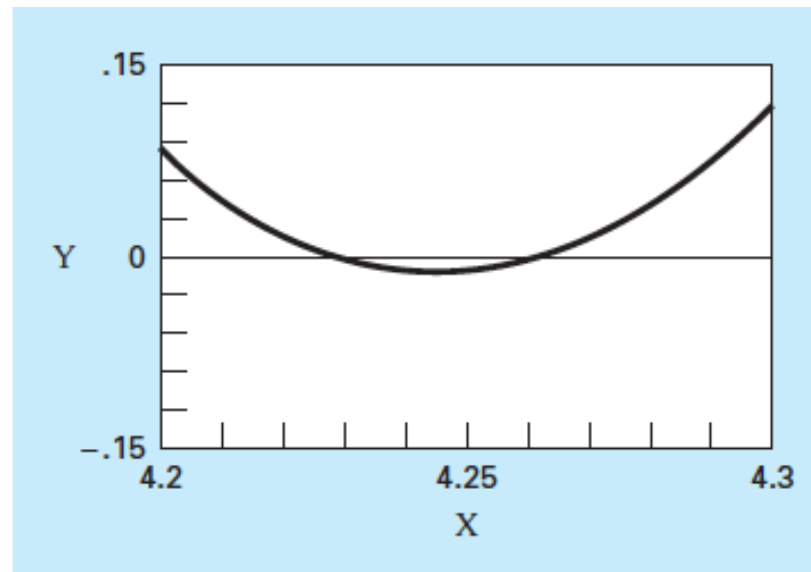
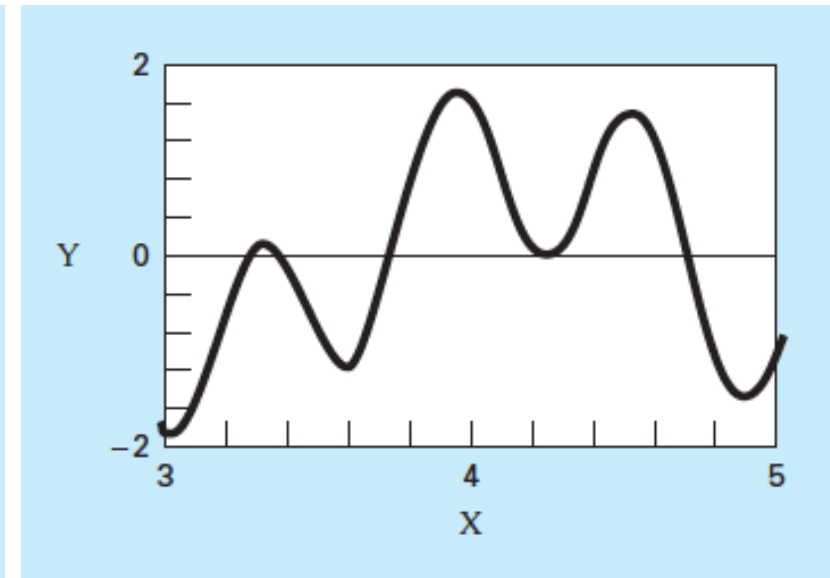
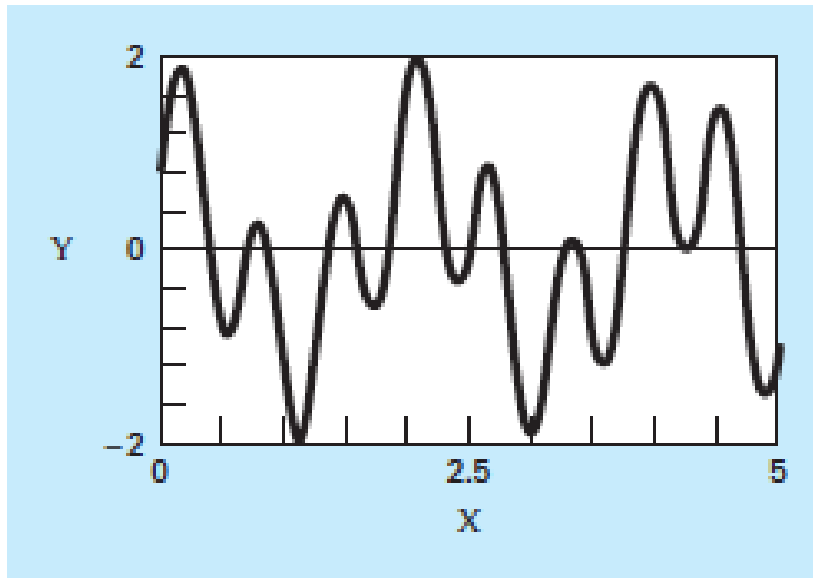
Παράδειγμα III

Για την $f(x) = \sin(10x) + \cos(3x)$ ποιά(ες) ρίζες έχει κοντά στο 4;



Παράδειγμα III

Για την $f(x) = \sin(10x) + \cos(3x)$ ποιά(ες) ρίζες έχει κοντά στο 4;



Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

- Με τη χρήση **αριθμητικών μεθόδων** επιτυγχάνεται ο **προσεγγιστικός** εντοπισμός των **ριζών** μίας μη γραμμικής εξίσωσης.

Ρίζα καλείται οποιοσδήποτε αριθμός x^* τέτοιος ώστε $f(x^*) = 0$.

- Για τις **βασικές αριθμητικές μεθόδους** που θα μελετήσουμε υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ένα διάστημα $[a, b]$ εντός του οποίου βρίσκεται η (μοναδική) ρίζα x^* .
- ▷ Αν αυτό δεν είναι γνωστό, τότε θα πρέπει να εξασφαλιστεί με κάποιες (μαθηματικές) συνθήκες.

Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

- Με τη χρήση **αριθμητικών μεθόδων** επιτυγχάνεται ο **προσεγγιστικός** εντοπισμός των **ριζών** μίας μη γραμμικής εξίσωσης.

Ρίζα καλείται οποιοσδήποτε αριθμός x^* τέτοιος ώστε $f(x^*) = 0$.

- Για τις **βασικές αριθμητικές μεθόδους** που θα μελετήσουμε υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ένα διάστημα $[a, b]$ εντός του οποίου βρίσκεται η (μοναδική) ρίζα x^* .

▷ Αν αυτό δεν είναι γνωστό, τότε θα πρέπει να εξασφαλιστεί με κάποιες (μαθηματικές) συνθήκες.

Θα συμβολίζουμε σε ένα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ με $C(I)$ το σύνολο των **συνεχών συναρτήσεων** στο I δηλ.,

$$C(I) = \{f | f : I \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ συνεχής}\} \text{ και}$$

$$C^n(I) = \{f | f \in C(I) : f \text{ } n \text{ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο } I\}$$

Η μέθοδος διχοτόμησης ή Bolzano

Από το λογισμό είναι γνωστό το ακόλουθο για τον εντοπισμό ριζών

Θεώρημα: 'Αν $f(x) \in C[a, b]$ και αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ τότε για κάποιο $x^* \in (a, b)$ έχουμε $f(x^*) = 0$.

Η μέθοδος διχοτόμησης ή Bolzano

Από το λογισμό είναι γνωστό το ακόλουθο για τον εντοπισμό ριζών

Θεώρημα: 'Αν $f(x) \in C[a, b]$ και αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ τότε για κάποιο $x^* \in (a, b)$ έχουμε $f(x^*) = 0$.

- Από τη στιγμή που θα εξασφαλιστεί το διάστημα $[a, b]$ εντός του οποίου βρίσκεται η άγνωστη ρίζα x^* , προχωρούμε **επαναληπτικά**.
- ▷ Επαναλαμβάνουμε, δηλαδή, μία διαδικασία με δεδομένα διαφορετικά (βελτιωμένα) σε κάθε επανάληψη μέχρις ότου πετύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα δημιουργώντας μία ακολουθία τιμών $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$.
- Πρέπει πρώτα να εξασφαλιστεί η **επιβολή συνθηκών** έτσι ώστε η ακολουθία $\{x_n\}, n = 0, 1, 2 \dots$ να **συγκλίνει** στη ρίζα x^* .
- ▷ Το δεύτερο είναι η σύγκλιση προς την x^* να είναι όσο το **δυνατόν πιο αποτελεσματική** (γρήγορη και ακριβής).

Μέθοδος Διχοτόμησης

Καταρχήν υποθέτουμε ότι ισχύσει το Θεώρημα (δηλ. $f(x) \in C[a, b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$) και άρα ότι εντός του $(a, b) \exists$ (τουλάχιστον) μία ρίζα.

- Η μέθοδος διαιρεί διαδοχικά το $[a, b]$ λαμβάνοντας κάθε φορά εκείνο το διάστημα που περιέχει τη ρίζα
- Υπολογίζει το μέσο του διαστήματος $c_0 = (a_0 + b_0)/2 = (a + b)/2$
- Αν $f(c_0) = 0$ τότε $x^* = c_0$ διαφορετικά, ελέγχεται η συνθήκη

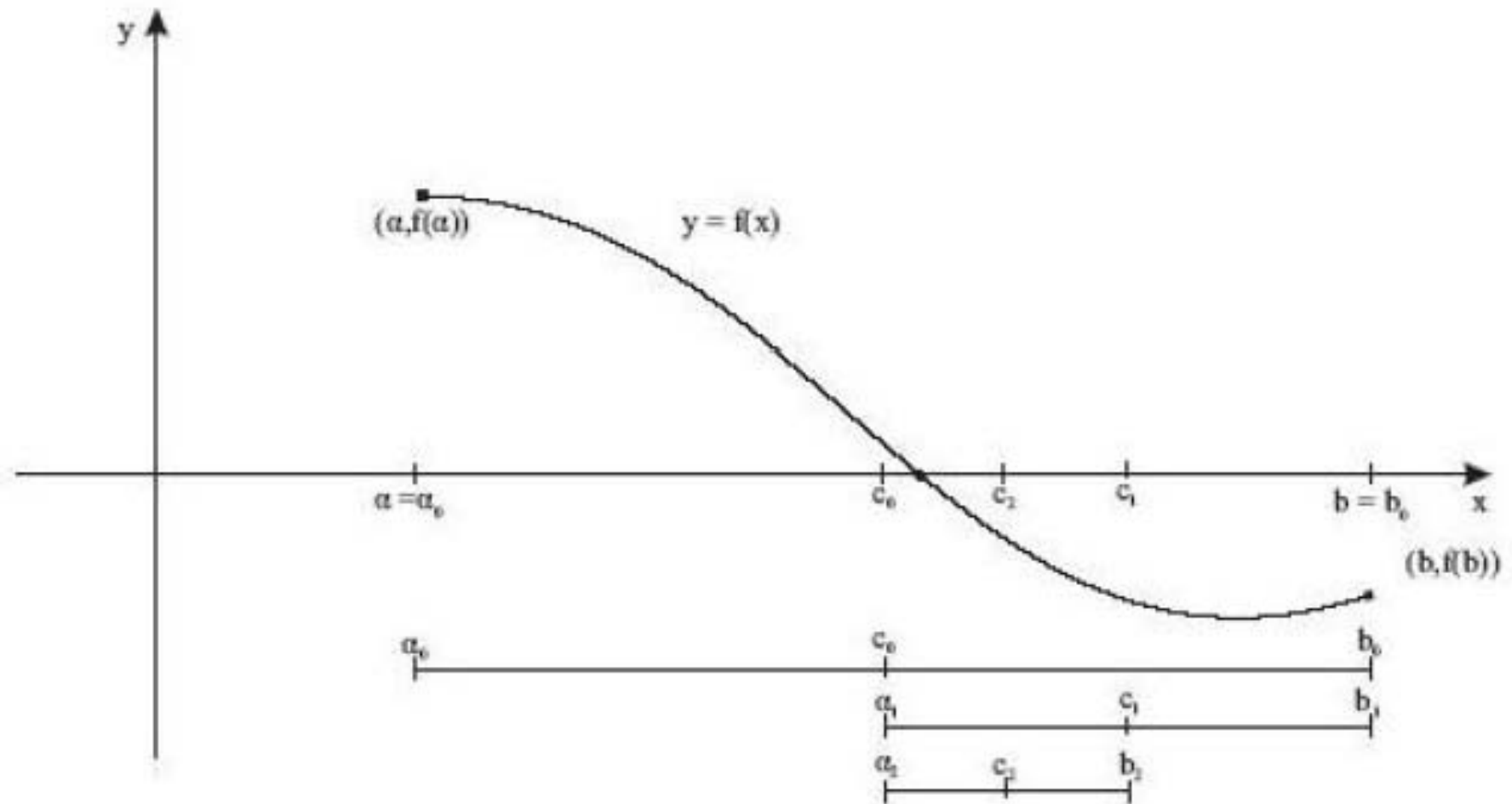
$$f(a_0) \cdot f(c_0) < 0,$$

▷ αν ισχύει, τότε η ρίζα $x^* \in (a_0, c_0)$ και επαναλαμβάνεται η διαδικασία με $a_1 = a_0$ και $b_1 = c_0$, όπου το νέο διάστημα $[a_1, b_1]$ είναι το μισό του αρχικού,

▷ αλλιώς, αν δηλ. $f(a_0) \cdot f(c_0) > 0$, τότε η ρίζα $\in (c_0, b_0)$ και επαναλαμβάνεται η διαδικασία με $a_1 = c_0$ και $b_1 = b_0$

Μέθοδος Διχοτόμησης

Γεωμετρική ερμηνεία



Μέθοδος Διχοτόμησης

Δημιουργείται μία ακολουθία διαστημάτων $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_0$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq a_0$$

με

$$f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$$

Η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι **αύξουσα** και **άνω φραγμένη**, άρα **συγκλίνει**. Η ακολουθία $\{b_n\}$ είναι **φθίνουσα** και **κάτω φραγμένη**, άρα **συγκλίνει**.

Βρίσκουμε ότι

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}$$

. . . Μέθοδος Διχοτόμησης. . .

Επομένως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}(b_0 - a_0) = 0.$$

Αν θέσουμε

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

τότε λαμβάνοντας όρια στο $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$ και λόγω συνέχειας της $f(x)$

$$[f(x^*)]^2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad f(x^*) = 0$$

δηλ., τα όρια των διαστημάτων συγκλίνουν στη ρίζα x^* της f .

. . . Μέθοδος Διχοτόμησης. . .

Επομένως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}(b_0 - a_0) = 0.$$

Αν θέσουμε

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

τότε λαμβάνοντας όρια στο $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$ και λόγω συνέχειας της $f(x)$

$$[f(x^*)]^2 \leq 0 \rightarrow f(x^*) = 0$$

δηλ., τα όρια των διαστημάτων συγκλίνουν στη ρίζα x^* της f .

Αν υποθεθεί ότι σε κάποια φάση η διαδικασία σταματήσει στο $[a_n, b_n]$, τότε η καλύτερη προσέγγιση x_n της ρίζας x^* είναι τό μέσο του $[a_n, b_n]$ δηλ.,

$$x_n = c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Πρόταση: Έστω $f \in C[a, b]$ με $f(a)f(b) < 0$, και $\{x_n\}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων που παράγει η διχοτόμηση. Τότε, είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N , είτε $x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty$, όπου $x^* \in (a, b)$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$. Ισχύει

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n}. \quad (\text{Φράγμα του σφάλματος}) \quad (1)$$

Πρόταση: Έστω $f \in C[a, b]$ με $f(a)f(b) < 0$, και $\{x_n\}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων που παράγει η διχοτόμηση. Τότε, είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N , είτε $x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty$, όπου $x^* \in (a, b)$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$. Ισχύει

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n}. \quad (\text{φράγμα του σφάλματος}) \quad (1)$$

Για ζητούμενη (από το χρήστη) **ανοχή σφάλματος**¹, ϵ , η απαίτηση

$$|x^* - x_n| \leq \epsilon$$

σημαίνει ότι λόγω της (1) πρέπει να γίνουν n (βήματα) τέτοιο ώστε

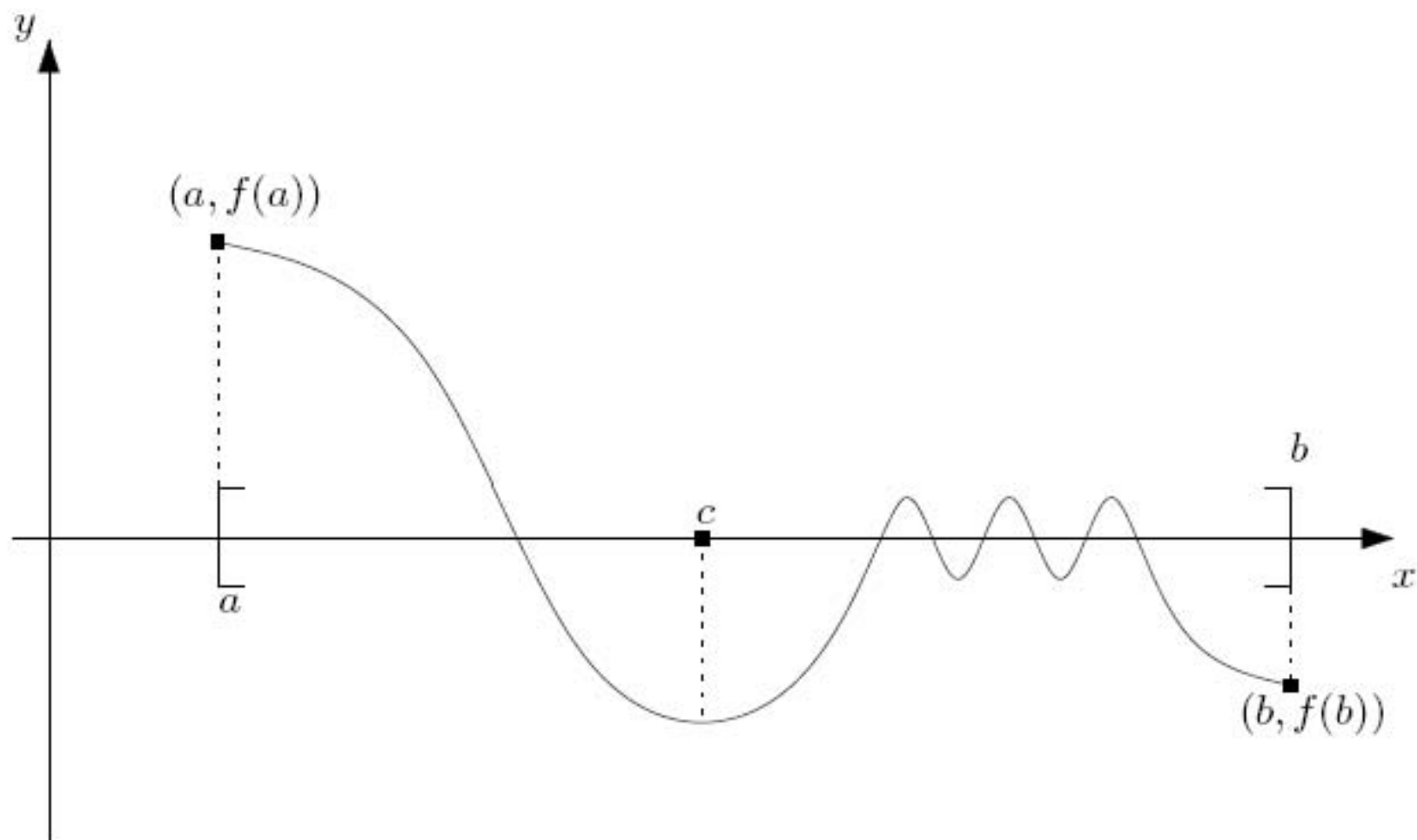
$$|x^* - x_n| = \frac{b - a}{2^n} \leq \epsilon$$

δηλ.

$$n \geq \left\lceil \frac{\log(b - a) - \log \epsilon}{\log 2} \right\rceil$$

¹Για k σωστά δεκαδικά ψηφία $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$

- Μετά από n επαναλήψεις η μέθοδος παράγει ένα διάστημα $[a_n, b_n]$ το οποίο περιέχει μία τουλάχιστον ρίζα x^* της $f(x) = 0$. Η μέθοδος καλείται **παρενθετική** (ή μέθοδος αγκυλών/εγκιβωτισμού).
- Η μέθοδος συγκλίνει πάντα σε μία ρίζα της $f(x)$ όταν μπορεί να εφαρμοστεί.
- Το βασικό **μειονέκτημα** είναι ότι το σφάλμα σε κάθε επανάληψη $(b - a)/2^n$ είναι αρκετά μεγάλο σε σύγκριση με άλλες μεθόδους $\Rightarrow$ **αργή σύγκλιση**.
- η Μέθοδος απαιτεί η $f(x)$ να αλλάζει πρόσημο γύρω από τη ρίζα (δεν υπολογίζει ρίζες άρτιας πολλαπλότητας)
- Η μέθοδος εντοπίζει **μία μόνο** ρίζα αλλά όχι όλες τις ρίζες που μπορεί να βρίσκονται στο $[a, b]$



Σχήμα: Η μέθοδος της Διχοτόμησης εντοπίζει **μία** ρίζα

Αλγόριθμος της διχοτόμησης

Δίνεται $f(x), [a, b]$ τ.ω. $f(a)f(b) < 0$ και ακρίβεια $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}, \delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$

$$d = b - a$$

1 $d \leftarrow d/2$

αν $|d| \leq \epsilon$, τύπωσε $a, b \longrightarrow$ έξοδος $x^* \in [a, b]$

διαφορετικά

υπολόγισε τα $c = (a + b)/2$ και $f(c)$

τύπωσε: $a, b, c, d, f(c)$

αν $f(c) = 0$ (ή/και $|f(c)| < \delta$) $\longrightarrow$ έξοδος $c \approx x^*$

διαφορετικά

αν $f(c)f(a) > 0$ τότε $a \leftarrow c$ και $f(a) \leftarrow f(c)$

αλλιώς $b \leftarrow c$ και $f(b) \leftarrow f(c)$

πήγαινε στο 1

Αλγόριθμος της διχοτόμησης

Δίνεται $f(x), [a, b]$ τ.ω. $f(a)f(b) < 0$ και ακρίβεια $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}, \delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$

$$d = b - a$$

1 $d \leftarrow d/2$

αν $|d| \leq \epsilon$, τύπωσε $a, b \longrightarrow$ έξοδος $x^* \in [a, b]$

διαφορετικά

υπολόγισε τα $c = (a + b)/2$ και $f(c)$

τύπωσε: $a, b, c, d, f(c)$

αν $f(c) = 0$ (ή/και $|f(c)| < \delta$) $\longrightarrow$ έξοδος $c \approx x^*$

διαφορετικά

αν $f(c)f(a) > 0$ τότε $a \leftarrow c$ και $f(a) \leftarrow f(c)$

αλλιώς $b \leftarrow c$ και $f(b) \leftarrow f(c)$

πήγαινε στο 1

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται **έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση.**

έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση

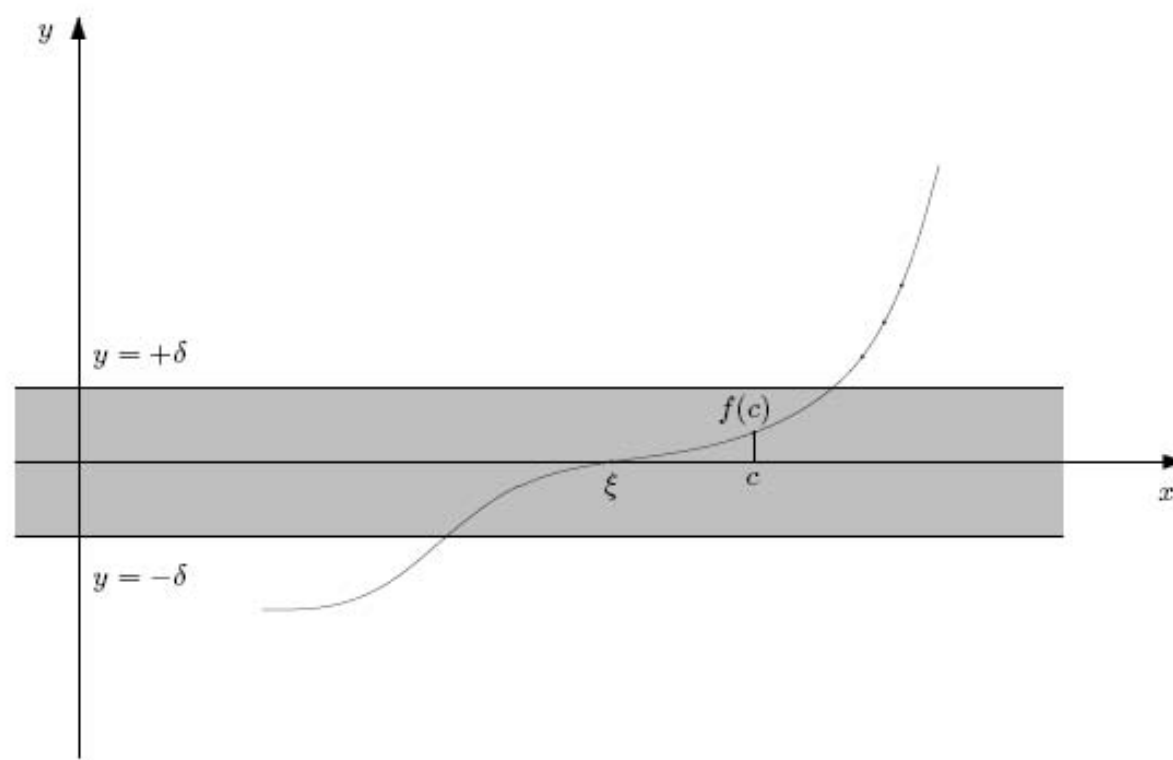
σημαίνει να ικανοποιείται ένα από τα ακόλουθα κριτήρια:

1. $|f(c)| < \delta$ (η τιμή της συνάρτησης ≈ 0)
2. $|d| \leq \epsilon$ (το διάστημα στο οποίο βρίσκεται η ρίζα πολύ μικρό)
3. $|f(c)| < \delta$ και $|d| \leq \epsilon$ (τα 1 & 2 ταυτόχρονα)

Κριτήριο διακοπής (τερματισμού) 1

$$|f(c)| < \delta$$

όπου $\delta = \frac{1}{2}10^{-d}$ είναι η **ανεκτικότητα** (ή **επιθυμητή ακρίβεια**). Η αποδοχή του κριτηρίου σημαίνει ότι αποδεχόμαστε το c να είναι καλή προσέγγιση της ρίζας αν $-\delta < f(c) < \delta$, αντιστοιχεί στον έλεγχο εάν $f(c) = 0$.

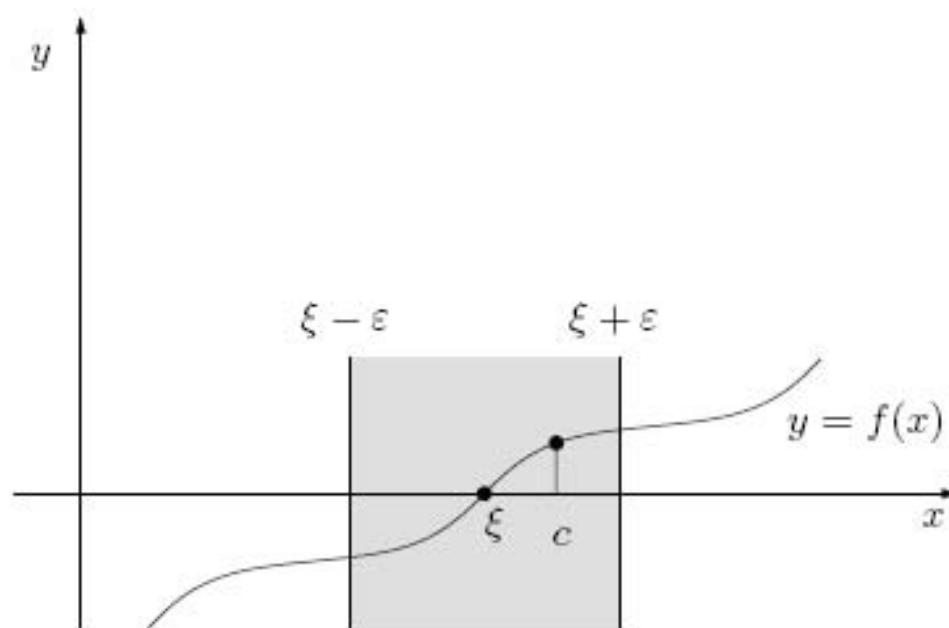


Στο σχήμα $\xi = x^*$.

Κριτήριο διακοπής (τερματισμού) 2

$$|d| \leq \epsilon$$

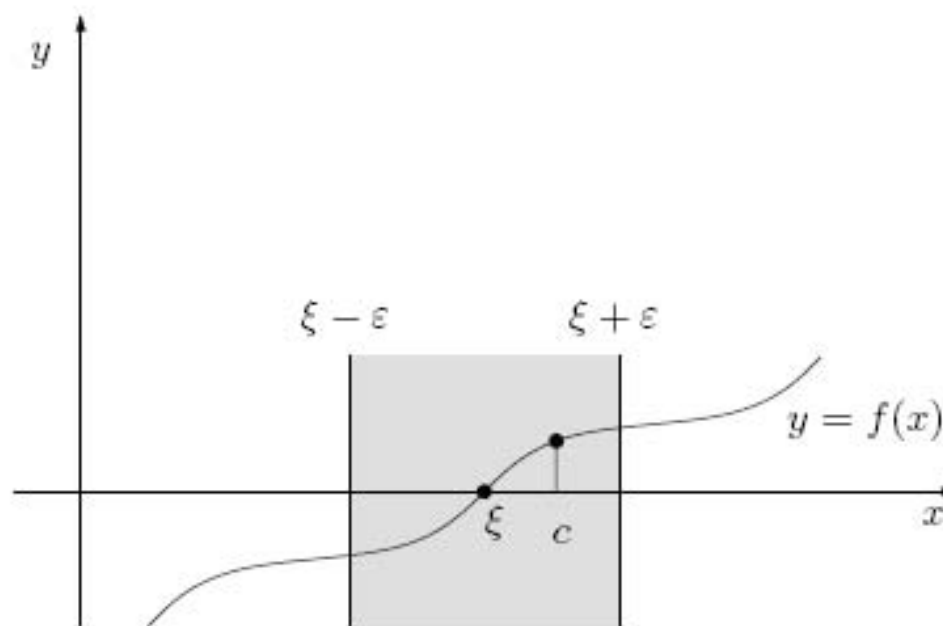
όπου ϵ είναι η κάποια **ανεκτικότητα**, τότε αποδεχόμαστε το c σαν ρίζα αν $-\epsilon < d < \epsilon$, αντιστοιχεί στον έλεγχο $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$.



Κριτήριο διακοπής (τερματισμού) 2

$$|d| \leq \epsilon$$

όπου ϵ είναι η κάποια **ανεκτικότητα**, τότε αποδεχόμαστε το c σαν ρίζα αν $-\epsilon < d < \epsilon$, αντιστοιχεί στον έλεγχο $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$.

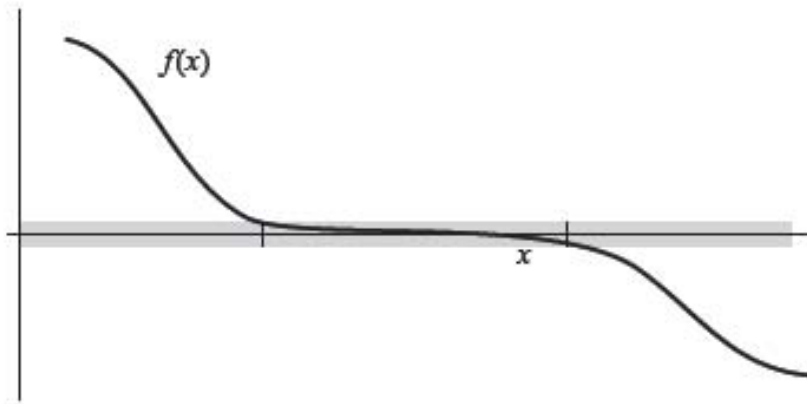


Το παραπάνω κριτήριο μπορεί να αντικατασταθεί και από το

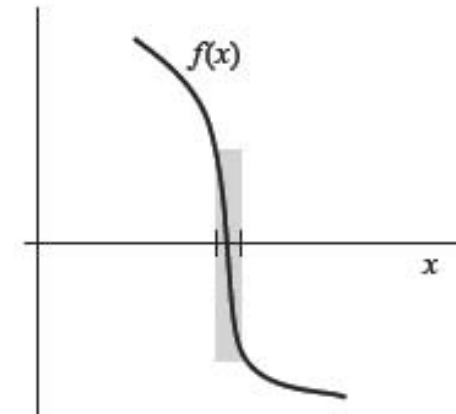
$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq \epsilon, \quad x_{n+1} \neq 0$$

- Αν απαιτηθεί να ισχύσουν **και τα δύο κριτήρια** 3, τότε η περιοχή στην οποία θα βρίσκονται τα c και $f(c)$ θα είναι η **τομή** των δύο ζωνών.
- Οι τιμές των δ και ϵ δεν θα πρέπει να είναι κοντά στο **u** το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης. Δηλ, αν t το πλήθος των επιτρεπόμενων ψηφίων τότε $\delta, \epsilon \geq \frac{1}{2} \cdot 10^{-t+2}$.
- Υπάρχουν ακολουθίες x_n για τις οποίες οι διαφορές $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$, ενώ η ίδια ακολουθία αποκλίνει από τη ρίζα.

- Αν απαιτηθεί να ισχύσουν **και τα δύο κριτήρια** 3, τότε η περιοχή στην οποία θα βρίσκονται τα c και $f(c)$ θα είναι η **τομή** των δύο ζωνών.
- Οι τιμές των δ και ϵ δεν θα πρέπει να είναι κοντά στο **u** το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης. Δηλ, αν t το πλήθος των επιτρεπόμενων ψηφίων τότε $\delta, \epsilon \geq \frac{1}{2} \cdot 10^{-t+2}$.
- Υπάρχουν ακολουθίες x_n για τις οποίες οι διαφορές $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$, ενώ η ίδια ακολουθία αποκλίνει από τη ρίζα.



$$|f(c)| < \delta \text{ αποτυγχάνει}$$



$$|d| \leq \epsilon \text{ αποτυγχάνει}$$

Τροποποιημένος Αλγόριθμος της διχοτόμησης

(για αποφυγή σφαλμάτων στρογγύλευσης και overflow ή underflow)

Για $i = 1, N_{\max}$

$$d = b - a$$

$$d \leftarrow d/2$$

αν $|d| \leq \epsilon$, τύπωσε $a, b \rightarrow$ έξοδος $x^* \in [a, b]$

διαφορετικά

$$\text{υπολόγισε } c = a + (b - a)/2, \quad f(c)$$

τύπωσε: $a, b, c, d, f(c)$

αν $f(c) = 0$ (ή/και $|f(c)| < \delta$) $\rightarrow$ έξοδος $c \approx x^*$

διαφορετικά

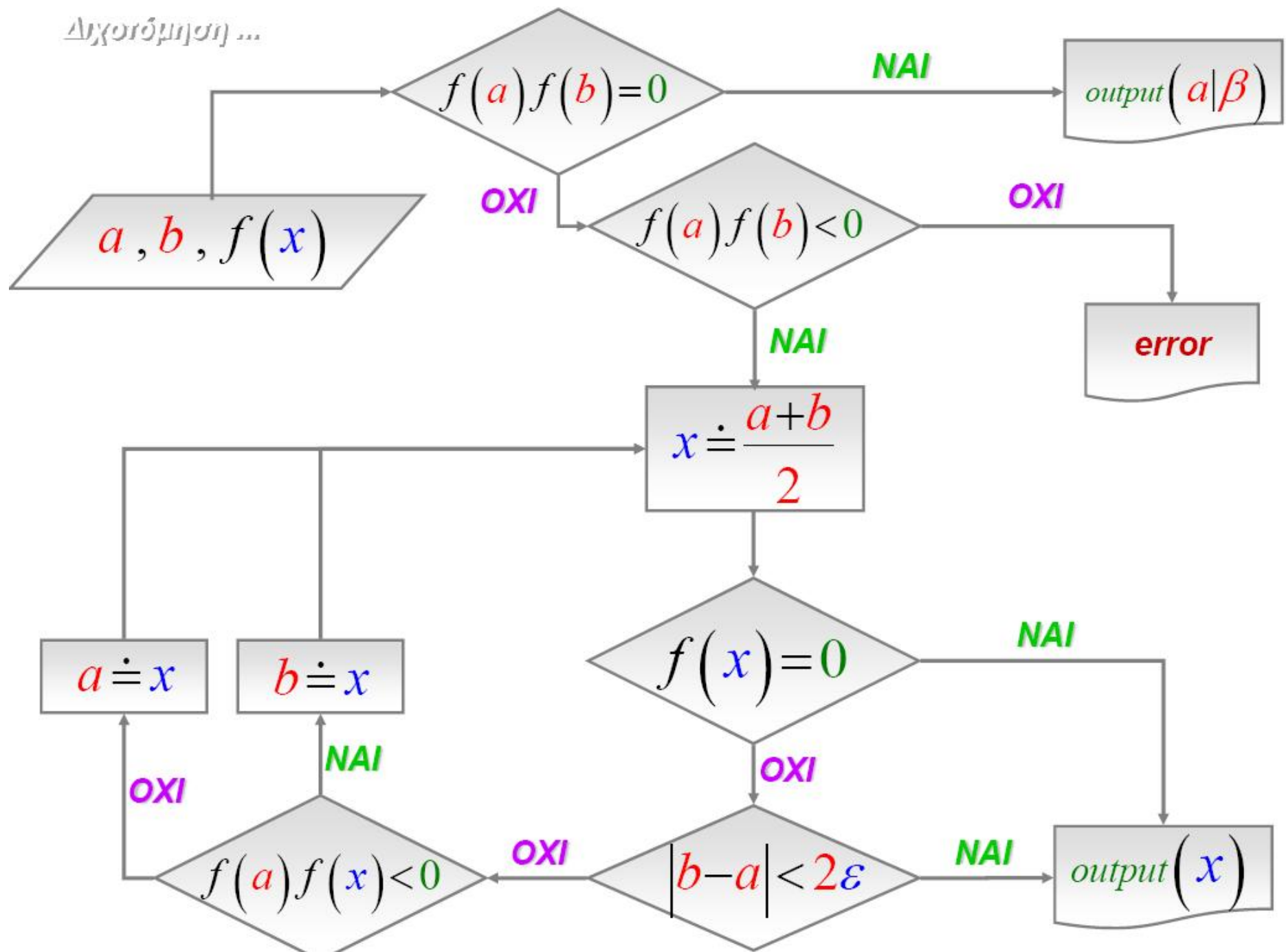
$$\text{αν } \text{sgn}(f(a)) = \text{sgn}(f(c)) \text{ τότε } a \leftarrow c, \quad f(a) \leftarrow f(c)$$

$$\text{διαφορετικά} \quad b \leftarrow c, \quad f(b) \leftarrow f(c)$$

$$i \leftarrow i + 1$$

πήγαινε στο 1

Διχοτόμηση ...



Παράδειγμα διχοτόμησης

Δίνεται η $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, στο $[2, 3] \exists_1$ (γιατί;) ρίζα

$$x^* = 2.0945524815423.$$

Με δεδομένα $a = 2, b = 3, \epsilon = 10^{-6}$ τα αποτελέσματα του αλγορίθμου (με το 1 κριτήριο τερματισμού) είναι:

n	a	b	$c(= x_n)$	d	$f(c)$
1	2.0000000	3.0000000	2.5000000	0.5000000	5.6250000
2	2.0000000	2.5000000	2.2500000	0.2500000	1.8906250
3	2.0000000	2.2500000	2.1250000	0.1250000	0.3457031
4	2.0000000	2.1250000	2.0625000	0.0625000	-0.3513184
5	2.0625000	2.1250000	1.0937500	0.0312500	-0.0089417
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	2.0945511	2.0945587	2.0945549	0.0000038	0.0000381
19	2.0945511	2.0945549	2.0945530	0.0000019	0.0000167
	2.0945511	2.0945530	2.0945520		

Στο βήμα 19 $d \leftarrow \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}19 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$.

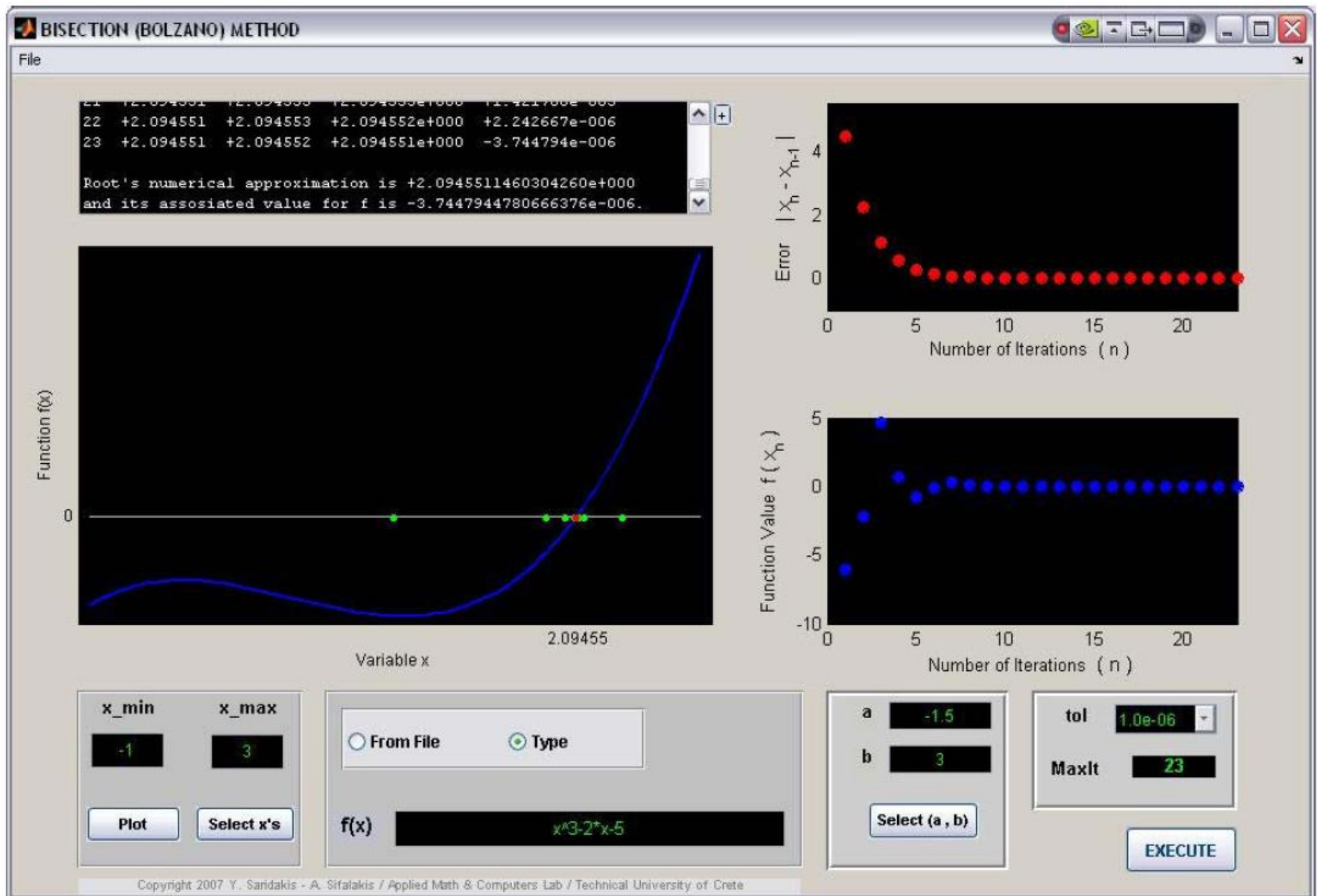
Εφαρμόζοντας την εκτίμηση σφάλματος

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε εκ τών προτέρων το πλήθος των βημάτων n που απαιτούνται για να γίνει το σφάλμα π.χ. $< 10^{-5}$. Αρκεί

$$\frac{b - a}{2^n} \leq 10^{-5} \Rightarrow n > \frac{5}{\log_{10} 2} \approx 16.6$$

δηλ., σε $n = 17$ βήματα



Άσκηση I

Υπολογίστε την τιμή του $\sqrt{3}$ με ακρίβεια $\epsilon = 10^{-6}$ στο διάστημα $[1, 2]$ με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Πόσα βήματα της μεθόδου θα χρειαστούμε για να πετύχουμε τη ζητούμενη ακρίβεια;

Άσκηση I

Υπολογίστε την τιμή του $\sqrt{3}$ με ακρίβεια $\epsilon = 10^{-6}$ στο διάστημα $[1, 2]$ με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Πόσα βήματα της μεθόδου θα χρειαστούμε για να πετύχουμε τη ζητούμενη ακρίβεια;

Λύση

$$\text{Θέλουμε } x = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 = f(x)$$

$$f(1) = -2 \text{ και } f(2) = 1 \text{ άρα υπάρχει ρίζα } x^* = \sqrt{3} \text{ στο } [1, 2].$$

$$|\sqrt{3} - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow 2^n > 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 6 \left(\frac{\ln 10}{\ln 2} \right) \approx 20 \text{ βήματα.}$$

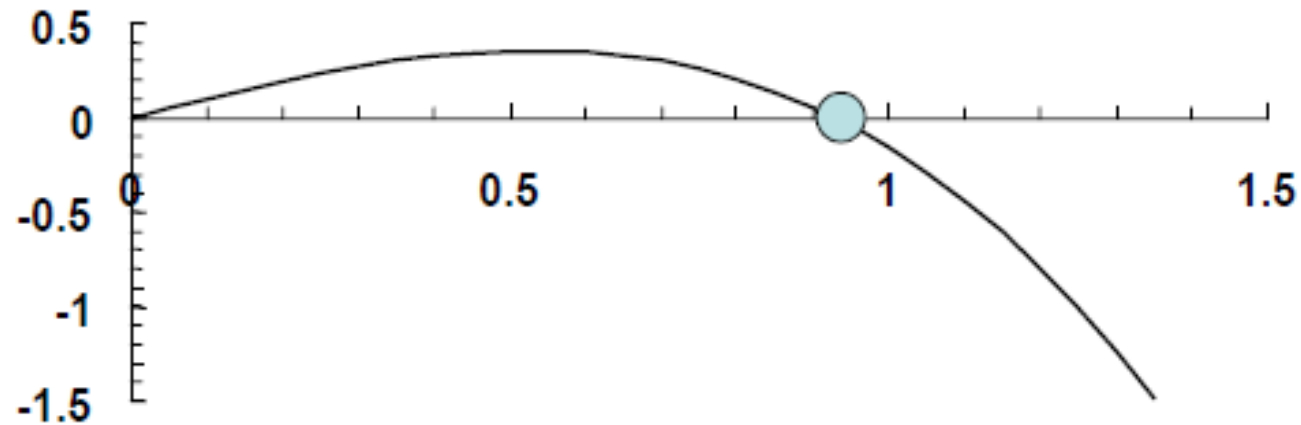
Άσκηση II

Υπολογίστε την πρώτη ρίζα της $f(x) = \sin(x) - x^3$ (διαφορετική από το 0)

(α) γραφικά (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης με ανοχή $\epsilon = 0.02$ (2%)

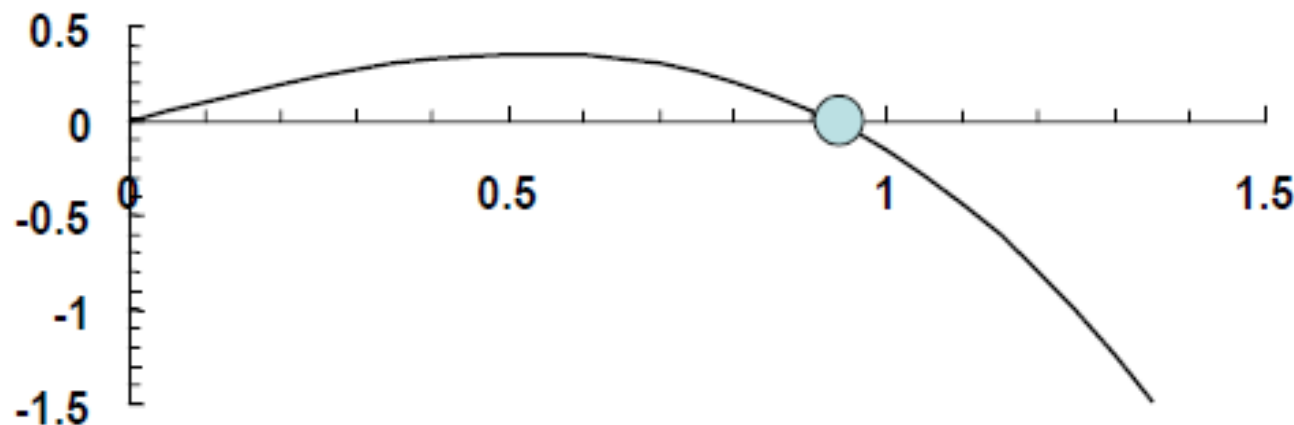
Άσκηση II

Υπολογίστε την πρώτη ρίζα της $f(x) = \sin(x) - x^3$ (διαφορετική από το 0)
(α) γραφικά (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης με ανοχή $\epsilon = 0.02$ (2%)



Άσκηση II

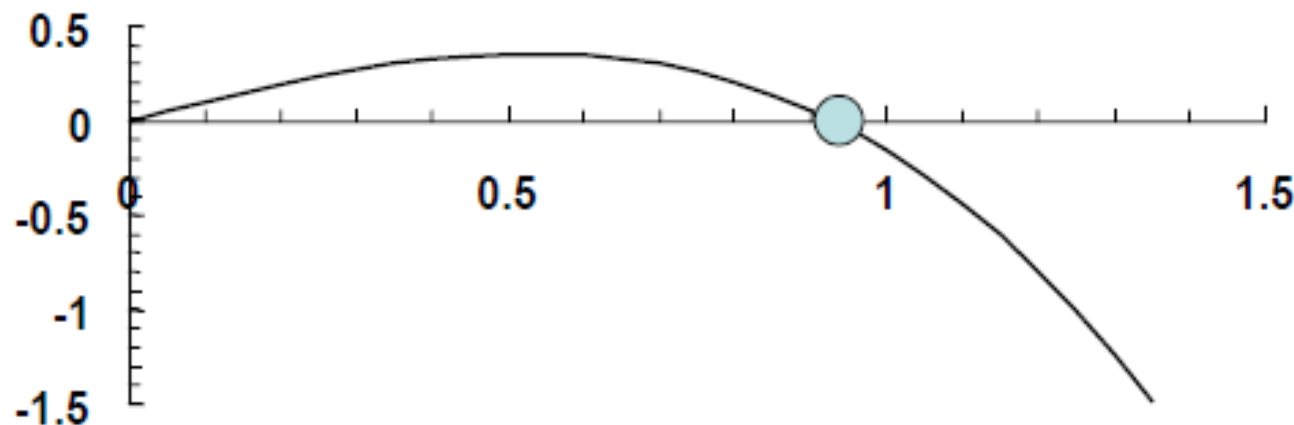
Υπολογίστε την πρώτη ρίζα της $f(x) = \sin(x) - x^3$ (διαφορετική από το 0)
(α) γραφικά (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης με ανοχή $\epsilon = 0.02$ (2%)



(β) Επιλέγω αρχικό διάστημα $[a_0, b_0] = [0.5, 1]$ γιατί $f(a_0)f(b_0) < 0$, τότε $x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$ και $f(0.75) = 0.2597638 > 0 \Rightarrow [a_1, b_1] = [0.75, 1]$

Άσκηση II

Υπολογίστε την πρώτη ρίζα της $f(x) = \sin(x) - x^3$ (διαφορετική από το 0)
(α) γραφικά (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης με ανοχή $\epsilon = 0.02$ (2%)



(β) Επιλέγω αρχικό διάστημα $[a_0, b_0] = [0.5, 1]$ γιατί $f(a_0)f(b_0) < 0$, τότε
 $x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$ και $f(0.75) = 0.2597638 > 0 \Rightarrow [a_1, b_1] = [0.75, 1]$

$x_2 = \frac{0.75+1}{2} = 0.875$ και $f(0.875) = 0.0976216 > 0 \Rightarrow [a_2, b_2] = [0.875, 1]$

$$\epsilon_a = \frac{|0.875 - 0.75|}{|0.875|} \cdot 100 = 14.29\%$$

Άσκηση II (συνεχεια)

Βήματα μέχρι την ζητούμενη ανοχή σφάλματος

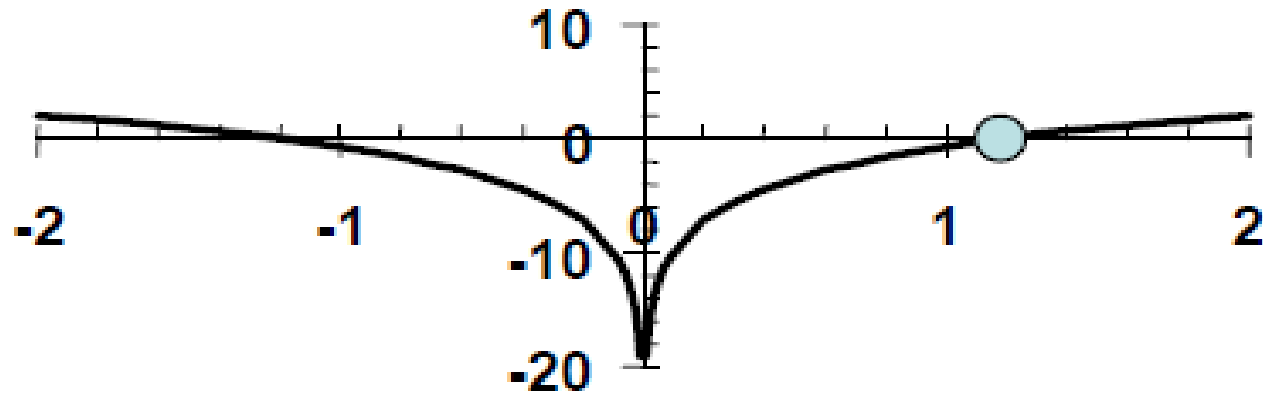
i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	x_i	$f(x_i)$	ε_a
1	0.5	0.354426	1	-0.158529	0.75	0.2597638	
2	0.75	0.259764	1	-0.158529	0.875	0.0976216	14.29%
3	0.875	0.097622	1	-0.158529	0.9375	-0.0178935	6.67%
4	0.875	0.097622	0.9375	-0.0178935	0.90625	0.0429034	3.45%
5	0.90625	0.042903	0.9375	-0.0178935	0.921875	0.0132774	1.69%

Άσκηση III

Υπολογίστε την θετική ρίζα της $f(x) = \ln(x^4) - 0.7$ (α) γραφικά (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης κάνοντας 3 επαναλήψεις με $[a_0, b_0] = [0.5, 2]$

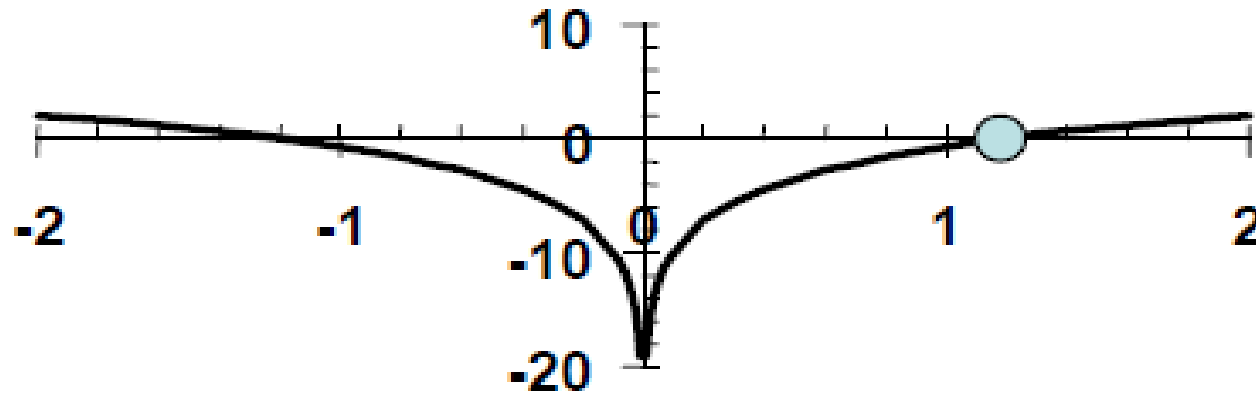
Άσκηση III

Υπολογίστε την θετική ρίζα της $f(x) = \ln(x^4) - 0.7$ (α) γραφικά (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης κάνοντας 3 επαναλήψεις με $[a_0, b_0] = [0.5, 2]$



Άσκηση III

Υπολογίστε την θετική ρίζα της $f(x) = \ln(x^4) - 0.7$ (α) γραφικά (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης κάνοντας 3 επαναλήψεις με $[a_0, b_0] = [0.5, 2]$



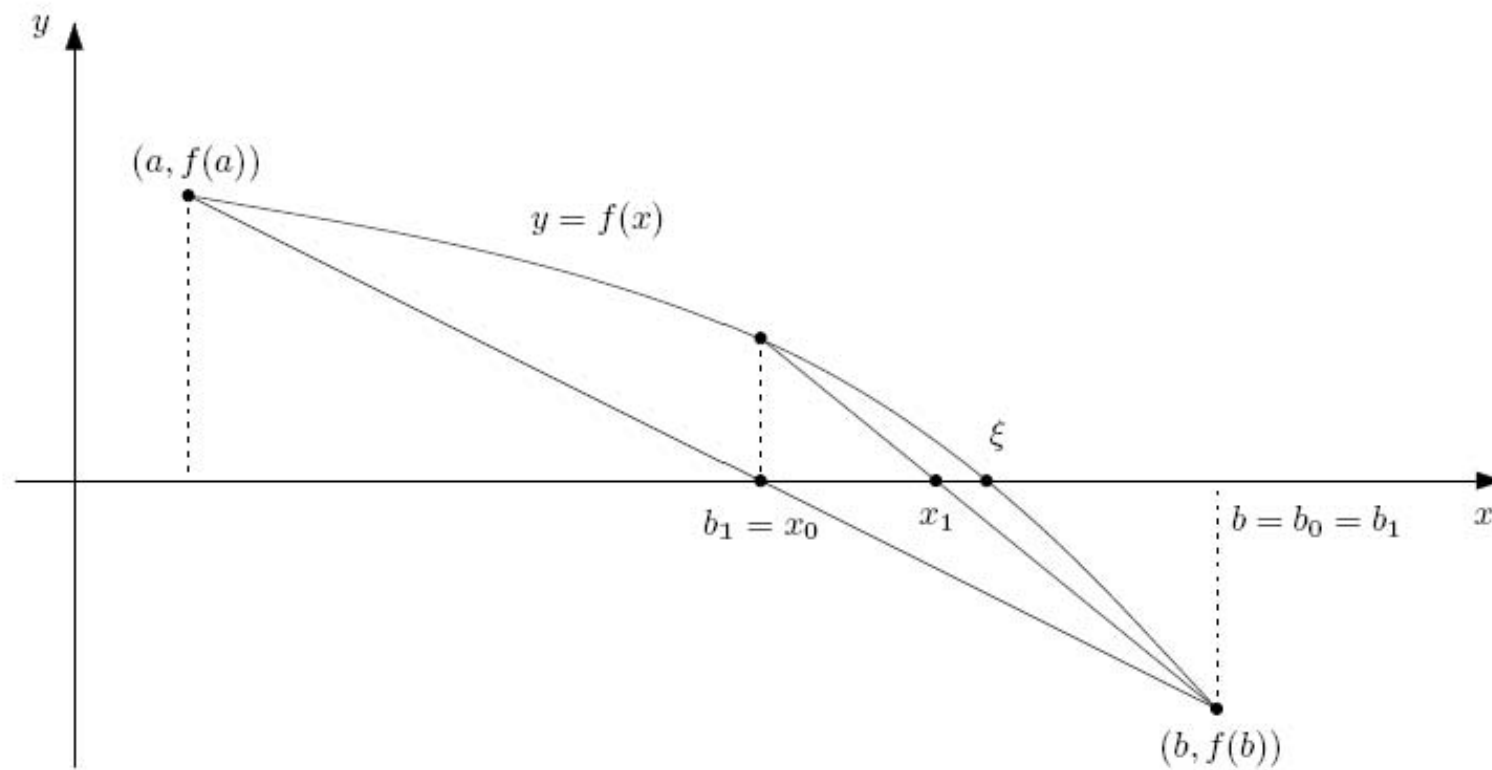
Άσκηση IV

Για τη συνάρτηση $f(x) = -3x^3 + 19x^2 - 20x - 13$ βρείτε τις ρίζες της (α) γραφικά και (β) με τη μέθοδο της διχοτόμησης με ανοχή $\epsilon = 0.01(1\%)$ με αρχικό διάστημα $[a_0, b_0] = [-1, 0]$

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regular Falsi)

- Η μέθοδος αυτή έχει την ίδια φιλοσοφία με τη διχοτόμηση, με τη μόνη διαφορά στον τρόπο υπολογισμού του c σε κάθε βήμα και αναπτύχθηκε γιατί η μέθοδος της διχοτόμησης συγκλίνει αργά.
- Ισχύουν οι ίδιες προϋποθέσεις όπως στη διχοτόμηση δηλ., $f(x) \in C[a, b]$ με $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Μια καλύτερη προσέγγιση της x^* , από το μέσο του διαστήματος, είναι το σημείο x_0 όπου η **ευθεία** που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τέμνει τον άξονα των x

Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου εσφαλμένης θέσης



Θέτοντας αρχικά $a_0 = a$, $b_0 = b$, η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα σημεία $(a_0, f(a_0))$ και $(b_0, f(b_0))$ είναι η

$$\frac{y - f(b_0)}{x - b_0} = \frac{f(a_0) - f(b_0)}{a_0 - b_0} \quad (2)$$

Η μέθοδος εσφαλμένης θέσης

Από την (2) για $y = 0$ και $x = x_0$ έχουμε

$$x_0 = b_0 - f(b_0) \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

Λόγω της $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ ο παρανομαστής είναι διάφορος του 0 και το x_0 πάντα ορισμένο. Άρα γενικεύοντας

$$x_{n+1} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η μέθοδος εσφαλμένης θέσης

Από την (2) για $y = 0$ και $x = x_0$ έχουμε

$$x_0 = b_0 - f(b_0) \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

Λόγω της $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ ο παρανομαστής είναι διάφορος του 0 και το x_0 πάντα ορισμένο. Άρα γενικεύοντας

$$x_{n+1} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Δημιουργείται πάλι ακολουθία διαστημάτων $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots [a_n, b_n]$ (που περιέχουν τη ρίζα) όπως και στη διχοτόμηση, αλλά τώρα $|b_n - a_n| \neq |b_{n-1} - a_{n-1}|/2$.

Αλγόριθμος της Εσφαλμένης Θέσης

Για $i = 1, N_{\max}$

1 $d = b - a$

αν $|d| \leq \epsilon$, τύπωσε $a, b \rightarrow$ έξοδος $x^* \in [a, b]$

διαφορετικά

υπολόγισε $c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$, και $f(c)$

τύπωσε $a, b, c, d, f(c)$

αν $f(c) = 0$ (ή/και $|f(c)| < \delta$) $\rightarrow$ έξοδος $c \approx x^*$

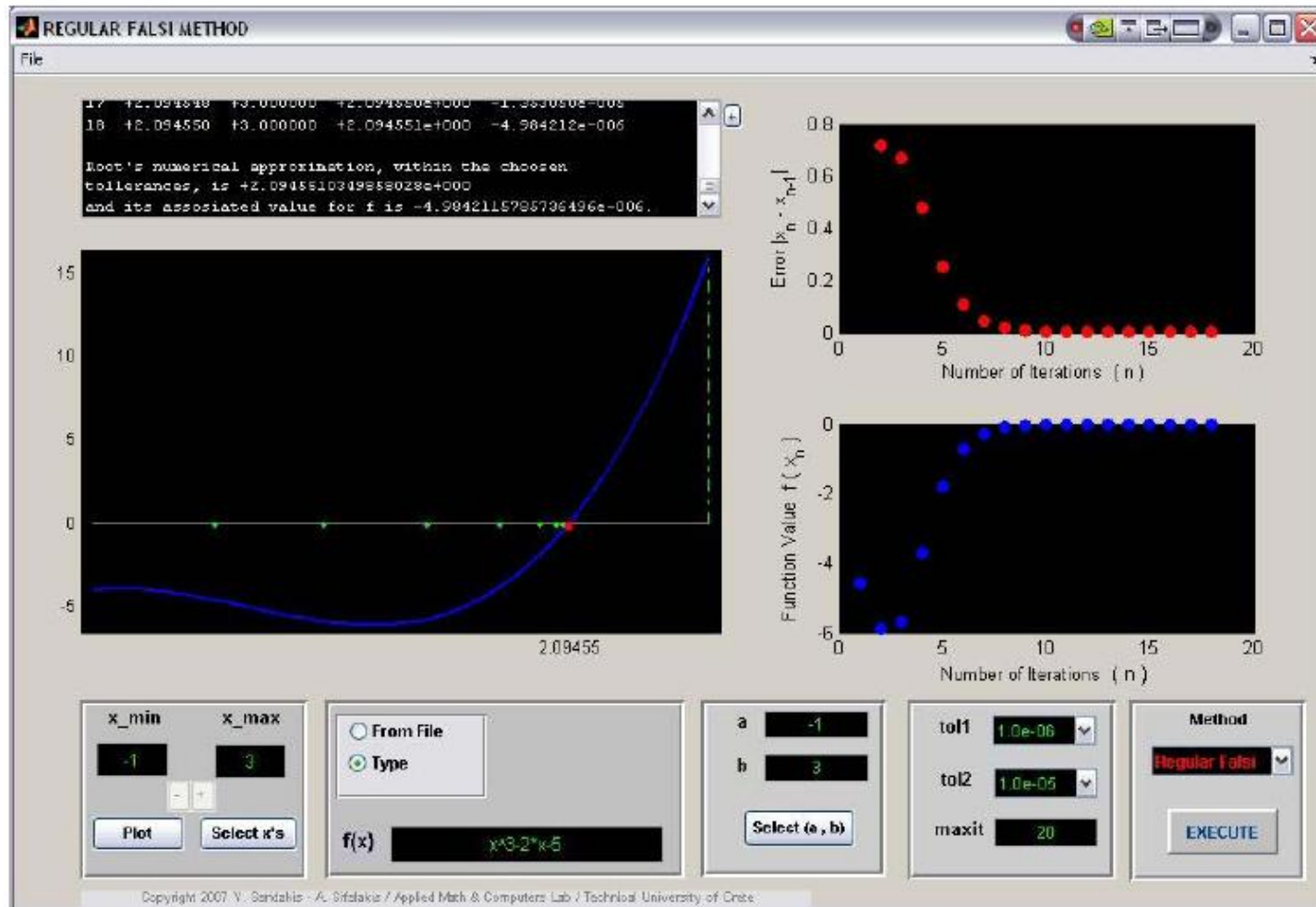
διαφορετικά

αν $\text{sgn}(f(a)) = \text{sgn}(f(c))$ τότε $a \leftarrow c, \quad f(a) \leftarrow f(c)$

διαφορετικά $b \leftarrow c, \quad f(b) \leftarrow f(c)$

$i \leftarrow i + 1$

πήγαινε στο 1



Υπολογιστικά παραδείγματα επίδειξης της συμπεριφοράς της μεθόδου για συναρτήσεις

«απτόμενες / κρημνώδεις» κοντά στην ρίζα, όπως η απεικονιζόμενη $f(x)=x^3-2x-5$,

σε σύγκριση με την μέθοδο της Διχοτόμησης.



Αν και η μέθοδος φαίνεται γενικά να είναι καλύτερη (ως προς την ταχύτητα σύγκλισης) από τη διχοτόμηση, υπάρχουν περιπτώσεις που δεν ισχύει αυτό.

Παράδειγμα (αργής σύγκλισης)

Έστω η $f(x) = x^{10} - 1$ και εφαρμόζουμε τις δύο μεθόδους στο $[0, 1.3]$

Παράδειγμα (αργής σύγκλισης)

Έστω η $f(x) = x^{10} - 1$ και εφαρμόζουμε τις δύο μεθόδους στο $[0, 1.3]$

Για τη **δικοτόμηση**

n	a_n	b_n	c_n	σφαλμα%
1	0	1.3	0.65	100.0
2	0.65	1.3	0.975	33.3
3	0.975	1.3	1.1375	14.3
4	0.975	1.1375	1.05625	7.7
5	0.975	1.05625	1.015625	4.0

Παράδειγμα (αργής σύγκλισης)

Έστω η $f(x) = x^{10} - 1$ και εφαρμόζουμε τις δύο μεθόδους στο $[0, 1.3]$

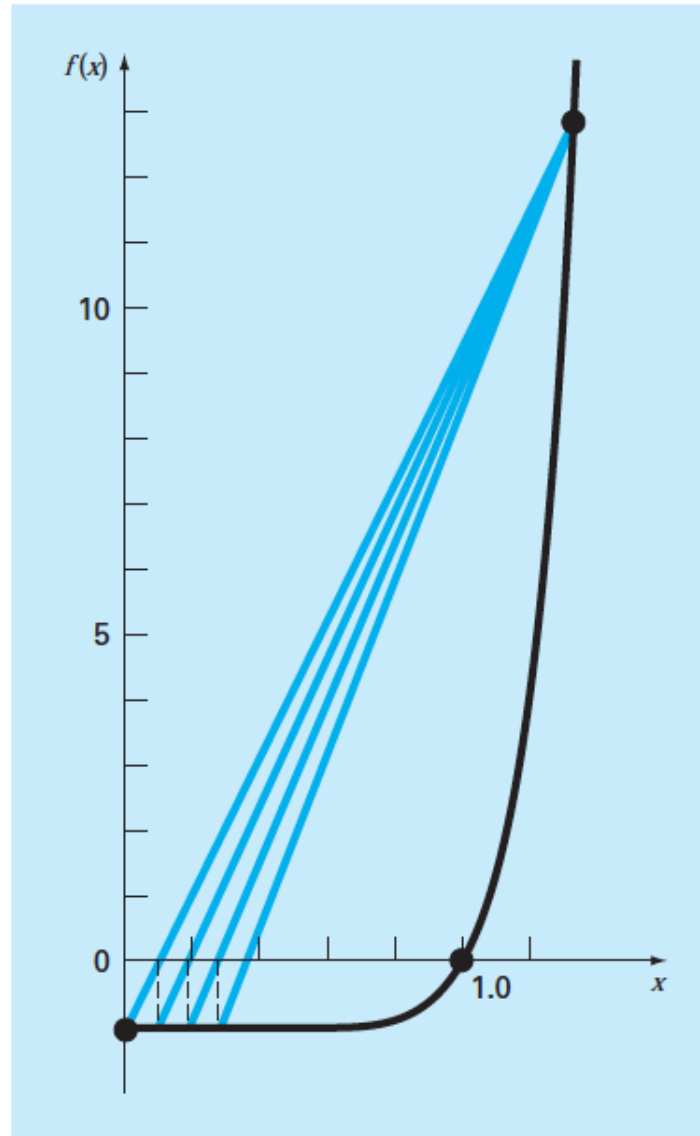
Για τη **δικοτόμηση**

n	a_n	b_n	c_n	σφαλμα%
1	0	1.3	0.65	100.0
2	0.65	1.3	0.975	33.3
3	0.975	1.3	1.1375	14.3
4	0.975	1.1375	1.05625	7.7
5	0.975	1.05625	1.015625	4.0

Για την **εσφαλμένη θέση**

n	a_n	b_n	c_n	σφαλμα%
1	0	1.3	0.09430	
2	0.09430	1.3	0.18176	48.1
3	0.18176	1.3	0.26287	30.9
4	0.26287	1.3	0.33811	22.3
5	0.33811	1.3	0.40788	17.1

Γραφική παράσταση της $f(x) = x^{10} - 1$ και η αργή σύγκλιση της μεθόδου εσφαλμένης θέσης.



Τάξη Σύγκλισης

Σχετίζεται με την ταχύτητα (συνολικά βήματα) που απαιτεί μία (συγκλίνουσα) μέθοδος για να φτάσει στη λύση.

Ορισμός 1: Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία η οποία συγκλίνει στο x^* . Αν υπάρχουν **θετικές** σταθερές c και p τέτοιες ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = c \neq 0$$

τότε η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ έχει **τάξη σύγκλισης** p (ακριβώς), με **ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης** (ή ρυθμό σύγκλισης) c .

Αν $p = 1 \implies$ γραμμική τάξη σύγκλισης και $c < 1$.

Για $n \gg$ θα ισχύει για το σφάλμα $\epsilon_n = x_n - x^*$

$$|\epsilon_{n+1}| \sim c |\epsilon_n|^p$$

(όπου $\sim$ σημαίνει: είναι ανάλογο ή συμπεριφέρεται ανάλογα)

...Τάξη σύγκλισης ...

Ορισμός 2: Λέμε ότι μία ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά, αν $\exists \ C < 1$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|, \quad \text{για } n \gg$$

Ενώ λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης $p > 1$, αν $\exists \ C > 0$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Για $p = 2, 3$ μιλάμε για τετραγωνική και κυβική αντίστοιχα σύγκλιση.

...Τάξη σύγκλισης ...

Ορισμός 2: Λέμε ότι μία ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά, αν $\exists \ C < 1$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|, \quad \text{για } n \gg$$

Ενώ λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης $p > 1$, αν $\exists \ C > 0$ τέτοια ώστε

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Για $p = 2, 3$ μιλάμε για τετραγωνική και κυβική αντίστοιχα σύγκλιση.

Παράδειγμα: Για τη μέθοδο διχοτόμησης έχουμε γραμμική τάξη σύγκλισης

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \frac{1}{2}$$