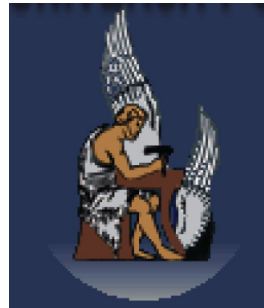


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 3η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

ΑΞΙΖΕΙ ΝΑ ΚΑΛΥΠΤΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ;

ΑΞΙΖΕΙ ΝΑ ΚΑΛΥΠΤΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ;

Η καταστροφή του Ariane 5. Στις 4 Ιουνίου του 1996 μια έκρηξη κατέστρεψε το πύραυλο εκτόξευσης ενός δορυφόρου της Ευρωπαϊκής Υπηρεσίας Διαστήματος (ΕΥΔ). Ο πύραυλος έκανε το παρθενικό του ταξίδι και καταστράφηκε 40 δευτερόλεπτα μετά την εκτόξευσή του. Η κύρια αιτία ήταν η **λάθος μετατροπή ενός αριθμού κινητής υποδιαστολής**. Κόστος ήταν περίπου 500.000.000\$.

ΑΞΙΖΕΙ ΝΑ ΚΑΛΥΠΤΟΥΜΕ ΤΗΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ;

Η καταστροφή του Ariane 5. Στις 4 Ιουνίου του 1996 μια έκρηξη κατέστρεψε το πύραυλο εκτόξευσης ενός δορυφόρου της Ευρωπαϊκής Υπηρεσίας Διαστήματος (ΕΥΔ). Ο πύραυλος έκανε το παρθενικό του ταξίδι και καταστράφηκε 40 δευτερόλεπτα μετά την εκτόξευσή του. Η κύρια αιτία ήταν η **λάθος μετατροπή ενός αριθμού κινητής υποδιαστολής**. Κόστος ήταν περίπου 500.000.000\$.

Intel Pentium Bug. Στις 30 Οκτώβρη του 1994 κάποιος καθηγητής Μαθηματικών ενός μικρού Κολεγίου των Η.Π.Α. ανακοινώνει ότι υπάρχει κάποιο **λάθος στον υπολογισμό της διαίρεσης αριθμών κινητής υποδιαστολής** στο νέο επεξεργαστή Pentium. Η αρχική αντίδραση της εταιρίας ήταν ότι ο καθηγητής μάλλον είναι λεπτολόγος αν όχι γραφικός. Στις 20 Δεκέμβρη όμως αναγκάζεται να ανακοινώσει ότι αντικαθιστά όλους του επεξεργαστές Pentium που είχε διαθέσει στην αγορά τους τελευταίους 6 μήνες. Το συνολικό κόστος της εταιρίας υπολογίζεται σε πολύ πάνω από τα 10.000.000\$.

ΑΞΙΖΕΙ ΝΑ ΚΑΛΥΠΤΟΥΜΕ ΤΗΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ;

Η καταστροφή του Ariane 5. Στις 4 Ιουνίου του 1996 μια έκρηξη κατέστρεψε το πύραυλο εκτόξευσης ενός δορυφόρου της Ευρωπαϊκής Υπηρεσίας Διαστήματος (ΕΥΔ). Ο πύραυλος έκανε το παρθενικό του ταξίδι και καταστράφηκε 40 δευτερόλεπτα μετά την εκτόξευσή του. Η κύρια αιτία ήταν η **λάθος μετατροπή ενός αριθμού κινητής υποδιαστολής**. Κόστος ήταν περίπου 500.000.000\$.

Intel Pentium Bug. Στις 30 Οκτώβρη του 1994 κάποιος καθηγητής Μαθηματικών ενός μικρού Κολεγίου των Η.Π.Α. ανακοινώνει ότι υπάρχει κάποιο **λάθος στον υπολογισμό της διαίρεσης αριθμών κινητής υποδιαστολής** στο νέο επεξεργαστή Pentium. Η αρχική αντίδραση της εταιρίας ήταν ότι ο καθηγητής μάλλον είναι λεπτολόγος αν όχι γραφικός. Στις 20 Δεκέμβρη όμως αναγκάζεται να ανακοινώσει ότι αντικαθιστά όλους του επεξεργαστές Pentium που είχε διαθέσει στην αγορά τους τελευταίους 6 μήνες. Το συνολικό κόστος της εταιρίας υπολογίζεται σε πολύ πάνω από τα 10.000.000\$.

Η αποτυχία ενός πυραύλου Patriot. Στις 25 Φλεβάρη του 1991, κατά την διάρκεια του πολέμου του Περσικού Κόλπου ένας πύραυλος Patriot αποτυγχάνει στην αναχαίτιση ενός Ιρακινού πυραύλου Scud, ο οποίος Patriot τελικά **σκοτώνει 28** στρατιώτες των Η.Π.Α. και τραυματίζει άλλους 100. Αργότερα ανακαλύφθηκε ότι **συσσωρευμένα λάθη στρογγύλευσης** ήταν η αιτία αποτυχίας του Patriot .

ΑΞΙΖΕΙ ΝΑ ΚΑΛΥΠΤΟΥΜΕ ΤΗΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ;

Η καταστροφή του Ariane 5. Στις 4 Ιουνίου του 1996 μια έκρηξη κατέστρεψε το πύραυλο εκτόξευσης ενός δορυφόρου της Ευρωπαϊκής Υπηρεσίας Διαστήματος (ΕΥΔ). Ο πύραυλος έκανε το παρθενικό του ταξίδι και καταστράφηκε 40 δευτερόλεπτα μετά την εκτόξευσή του. Η κύρια αιτία ήταν η **λάθος μετατροπή ενός αριθμού κινητής υποδιαστολής**. Κόστος ήταν περίπου 500.000.000\$.

Intel Pentium Bug. Στις 30 Οκτώβρη του 1994 κάποιος καθηγητής Μαθηματικών ενός μικρού Κολεγίου των Η.Π.Α. ανακοινώνει ότι υπάρχει κάποιο **λάθος στον υπολογισμό της διαίρεσης αριθμών κινητής υποδιαστολής** στο νέο επεξεργαστή Pentium. Η αρχική αντίδραση της εταιρίας ήταν ότι ο καθηγητής μάλλον είναι λεπτολόγος αν όχι γραφικός. Στις 20 Δεκέμβρη όμως αναγκάζεται να ανακοινώσει ότι αντικαθιστά όλους του επεξεργαστές Pentium που είχε διαθέσει στην αγορά τους τελευταίους 6 μήνες. Το συνολικό κόστος της εταιρίας υπολογίζεται σε πολύ πάνω από τα 10.000.000\$.

Η αποτυχία ενός πυραύλου Patriot. Στις 25 Φλεβάρη του 1991, κατά την διάρκεια του πολέμου του Περσικού Κόλπου ένας πύραυλος Patriot αποτυγχάνει στην αναχαίτιση ενός Ιρακινού πυραύλου Scud, ο οποίος Patriot τελικά **σκοτώνει 28** στρατιώτες των Η.Π.Α. και τραυματίζει άλλους 100. Αργότερα ανακαλύφθηκε ότι **συσσωρευμένα λάθη στρογγύλευσης** ήταν η αιτία αποτυχίας του Patriot .

Λάθος στρογγύλευση στην μετατροπή συναλλάγματος απο/σε EURO. Η μετατροπή συναλλάγματος απο/προς Λίρες Αγγλίας σε EURO γινόταν με **λάθη στρογγύλευσης επί περίπου 1 μήνα.** Το French National Council for the Consumer έχει υπολογίσει ότι λόγω του σφάλματος αυτού οι μεγάλες αλυσίδες supermarkets στην Γαλλία κέρδισαν περίπου 500.000 EUR.

Λάθος στρογγύλευση στην μετατροπή συναλλάγματος απο/σε EURO. Η μετατροπή συναλλάγματος απο/προς Λίρες Αγγλίας σε EURO γινόταν με **λάθη στρογγύλευσης επί περίπου 1 μήνα.** Το French National Council for the Consumer έχει υπολογίσει ότι λόγω του σφάλματος αυτού οι μεγάλες αλυσίδες supermarkets στην Γαλλία κέρδισαν περίπου 500.000 EUR.

Λάθος στοιχεία από τον δορυφόρο ROSAT. Το 1991 μία ερευνητική ομάδα Ράδιο-Αστρονομίας από το Manchester ανακοίνωσε την ανακάλυψη ενός νέου πλανήτη εκτός του Ηλιακού μας συστήματος. Ένα χρόνο μετά ανακαλύφθηκε ότι ο πλανήτης αυτός δεν ήταν τίποτε άλλο από ένα **λάθος στρογγύλευσης,** ενός δορυφόρου παρατήρησης, **στον υπολογισμό της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο.**

Λάθος στρογγύλευση στην μετατροπή συναλλάγματος απο/σε EURO. Η μετατροπή συναλλάγματος απο/προς Λίρες Αγγλίας σε EURO γινόταν με **λάθη στρογγύλευσης επί περίπου 1 μήνα.** Το French National Council for the Consumer έχει υπολογίσει ότι λόγω του σφάλματος αυτού οι μεγάλες αλυσίδες supermarkets στην Γαλλία κέρδισαν περίπου 500.000 EUR.

Λάθος στοιχεία από τον δορυφόρο ROSAT. Το 1991 μία ερευνητική ομάδα Ράδιο-Αστρονομίας από το Manchester ανακοίνωσε την ανακάλυψη ενός νέου πλανήτη εκτός του Ηλιακού μας συστήματος. Ένα χρόνο μετά ανακαλύφθηκε ότι ο πλανήτης αυτός δεν ήταν τίποτε άλλο από ένα **λάθος στρογγύλευσης**, ενός δορυφόρου παρατήρησης, **στον υπολογισμό της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο.**

Σε λίγες ώρες ο δείκτης χρηματιστηρίου διπλασιάστηκε. Ο δείκτης του Χρηματιστηρίου του Βανκούβερ, Καναδάς, **υπολογιζόταν με 4 δεκαδικά ψηφία και κατόπιν μετατρεπόταν σε 3 με αποκοπή αντί για στρογγύλευση.** Ο δείκτης αυτός υπολογιζόταν κάθε φορά που πραγματοποιούνταν μία συναλλαγή (περίπου 3000 φορές την μέρα). Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα το χάσιμο περίπου 20 πόντων τον μήνα. Στο κλείσιμο της Παρασκευή 25 Νοέμβρη 1983, ο δείκτης ήταν 524.811. Μια ομάδα ειδικών μετά από μελέτες 3 εβδομάδων υπολόγισε το συνολικό λάθος. Έτσι την ερχόμενη Δευτέρα το πρωί ο δείκτης άνοιξε στις 1098.892 μονάδες.

Λάθος στρογγύλευση στην μετατροπή συναλλάγματος απο/σε EURO. Η μετατροπή συναλλάγματος απο/προς Λίρες Αγγλίας σε EURO γινόταν με **λάθη στρογγύλευσης επί περίπου 1 μήνα.** Το French National Council for the Consumer έχει υπολογίσει ότι λόγω του σφάλματος αυτού οι μεγάλες αλυσίδες supermarkets στην Γαλλία κέρδισαν περίπου 500.000 EUR.

Λάθος στοιχεία από τον δορυφόρο ROSAT. Το 1991 μία ερευνητική ομάδα Ράδιο-Αστρονομίας από το Manchester ανακοίνωσε την ανακάλυψη ενός νέου πλανήτη εκτός του Ηλιακού μας συστήματος. Ένα χρόνο μετά ανακαλύφθηκε ότι ο πλανήτης αυτός δεν ήταν τίποτε άλλο από ένα **λάθος στρογγύλευσης**, ενός δορυφόρου παρατήρησης, **στον υπολογισμό της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο.**

Σε λίγες ώρες ο δείκτης χρηματιστηρίου διπλασιάστηκε. Ο δείκτης του Χρηματιστηρίου του Βανκούβερ, Καναδάς, **υπολογιζόταν με 4 δεκαδικά ψηφία και κατόπιν μετατρεπόταν σε 3 με αποκοπή αντί για στρογγύλευση.** Ο δείκτης αυτός υπολογιζόταν κάθε φορά που πραγματοποιούνταν μία συναλλαγή (περίπου 3000 φορές την μέρα). Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα το χάσιμο περίπου 20 πόντων τον μήνα. Στο κλείσιμο της Παρασκευή 25 Νοέμβρη 1983, ο δείκτης ήταν 524.811. Μια ομάδα ειδικών μετά από μελέτες 3 εβδομάδων υπολόγισε το συνολικό λάθος. Έτσι την ερχόμενη Δευτέρα το πρωί ο δείκτης άνοιξε στις 1098.892 μονάδες.

Λάθος κυβέρνηση σε κρατίδιο της Γερμανίας. Την Κυριακή 5 Απρίλη του 1992 έγιναν εκλογές στο κρατίδιο Schleswig - Holstein της Γερμανίας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που δημοσιοποιήθηκαν το βράδυ της ίδιας μέρας το κόμμα των Πρασίνων συγκέντρωσε ακριβώς 5% με αποτέλεσμα να μπει στην κατανομή των εδρών. Αργότερα ανακαλύφθηκε ότι λόγω λάθους στρογγύλευσης οι Πράσινοι δεν είχαν 5% αλλά 4.97%. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να μην καταλάβουν καμία έδρα στο κοινοβούλιο. Μετά από αυτό οι Σοσιαλδημοκράτες σχημάτισαν κυβέρνηση έχοντας την πλειοψηφία της βουλής κατά μία έδρα.

Σφάλματα στρογγύλευσης στους υπολογισμούς

- Πολλαπλασιασμός

$$x \cdot y \mapsto \boxed{H/Y(u, M)} \mapsto z \equiv fl\left(fl(x) \cdot fl(y)\right)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{|z - x \cdot y|}{|x \cdot y|} \leq 3u + 4u^2$$

με $u \ll 1$ και $u^2 \ll u$, λέμε ότι στον πολλαπλασιασμό το σχετικό σφάλμα στρογγύλευσης είναι περίπου τριπλάσιο του **μοναδιαίου (σφάλματος στρογγύλευσης u)**.

Σφάλματα στρογγύλευσης στους υπολογισμούς

- Πολλαπλασιασμός

$$x \cdot y \mapsto \boxed{H/Y(u, M)} \mapsto z \equiv fl\left(fl(x) \cdot fl(y)\right)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{|z - x \cdot y|}{|x \cdot y|} \leq 3u + 4u^2$$

με $u \ll 1$ και $u^2 \ll u$, λέμε ότι στον πολλαπλασιασμό το σχετικό σφάλμα στρογγύλευσης είναι περίπου τριπλάσιο του **μοναδιαίου (σφάλματος στρογγύλευσης u)**.

- Διαίρεση

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) \Rightarrow \frac{|z - x/y|}{|x/y|} \leq 3u.$$

- Πρόσθεση-Αφαίρεση

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) \Rightarrow \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \leq \frac{2u(|x| + |y|)}{|x + y|}$$

• Πρόσθεση-Αφαίρεση

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) \Rightarrow \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \leq \frac{2u(|x| + |y|)}{|x + y|}$$

▷ Αν οι x, y **ομόσημοι** τότε $|x + y| = |x| + |y| \Rightarrow$ το φράγμα του σφάλματος $\approx 2u$, δηλ. μικρό σφάλμα.

• Πρόσθεση-Αφαίρεση

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) \Rightarrow \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \leq \frac{2u(|x| + |y|)}{|x + y|}$$

▷ Αν οι x, y **ομόσημοι** τότε $|x + y| = |x| + |y| \Rightarrow$ το φράγμα του σφάλματος $\approx 2u$, δηλ. μικρό σφάλμα.

▷ Αν οι x, y **ετερόσημοι** και $x \approx y \Rightarrow$ το φράγμα του σφάλματος

$$\approx 2u \frac{(|x| + |y|)}{||x| - |y||} \text{ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.}$$

• Πρόσθεση-Αφαίρεση

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) \Rightarrow \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \leq \frac{2u(|x| + |y|)}{|x + y|}$$

▷ Αν οι x, y **ομόσημοι** τότε $|x + y| = |x| + |y| \Rightarrow$ το φράγμα του σφάλματος $\approx 2u$, δηλ. μικρό σφάλμα.

▷ Αν οι x, y **ετερόσημοι** και $x \approx y \Rightarrow$ το φράγμα του σφάλματος

$$\approx 2u \frac{(|x| + |y|)}{||x| - |y||} \text{ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.}$$

Παράδειγμα: έστω $x = 451852000$ και $y = -451851000$

$$x + y = 1000$$

• Πρόσθεση-Αφαίρεση

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) \Rightarrow \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \leq \frac{2u(|x| + |y|)}{|x + y|}$$

▷ Αν οι x, y **ομόσημοι** τότε $|x + y| = |x| + |y| \Rightarrow$ το φράγμα του σφάλματος $\approx 2u$, δηλ. μικρό σφάλμα.

▷ Αν οι x, y **ετερόσημοι** και $x \approx y \Rightarrow$ το φράγμα του σφάλματος

$$\approx 2u \frac{(|x| + |y|)}{||x| - |y||} \text{ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.}$$

Παράδειγμα: έστω $x = 451852000$ και $y = -451851000$

$$x + y = 1000$$

Στον (υποθετικό) υπολογιστή με $M(10, 5, -10, 10)$ και στρογγύλευση:

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) = 0$$

Παράδειγμα: Έστω $x = 0.45142708$ και $y = -0.45115944$ τότε
πραγματική τιμή: $x + y = 0.26764 \cdot 10^{-3}$

Παράδειγμα: Έστω $x = 0.45142708$ και $y = -0.45115944$ τότε
πραγματική τιμή: $x + y = 0.26764 \cdot 10^{-3}$

Στον υπολογιστή με $M(10, 5, -10, 10)$ και στρογγύλευση:

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(.45143 - .45116) = 0.00027 = .27000 \cdot 10^{-3}$$

Εδώ $2u = 10^{-4}$ και

$$|\epsilon_\sigma| = \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \cong 88 \cdot 10^{-4}$$

Η εμφάνιση των μηδενικών οφείλεται στη «ακύρωση» των ψηφίων .451 και τη μετατροπή σε αριθμό μηχανής $\implies$ απώλεια **σημαντικών δεκαδικών ψηφίων**.

Παράδειγμα: Έστω $x = 0.45142708$ και $y = -0.45115944$ τότε
πραγματική τιμή: $x + y = 0.26764 \cdot 10^{-3}$

Στον υπολογιστή με $M(10, 5, -10, 10)$ και στρογγύλευση:

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(.45143 - .45116) = 0.00027 = .27000 \cdot 10^{-3}$$

Εδώ $2u = 10^{-4}$ και

$$|\epsilon_\sigma| = \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \cong 88 \cdot 10^{-4}$$

Η εμφάνιση των μηδενικών οφείλεται στη «ακύρωση» των ψηφίων .451 και τη μετατροπή σε αριθμό μηχανής $\implies$ απώλεια **σημαντικών δεκαδικών ψηφίων**.

Σημαντικά ψηφία: ενός δεκαδικού αριθμού, είναι όλα τα ψηφία του αριθμού από αριστερά προς τα δεξιά, του πρώτου μη μηδενικού (συμπεριλαμβανομένου).

Παράδειγμα: Έστω $x = 0.45142708$ και $y = -0.45115944$ τότε
πραγματική τιμή: $x + y = 0.26764 \cdot 10^{-3}$

Στον υπολογιστή με $M(10, 5, -10, 10)$ και στρογγύλευση:

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(.45143 - .45116) = 0.00027 = .27000 \cdot 10^{-3}$$

Εδώ $2u = 10^{-4}$ και

$$|\epsilon_\sigma| = \frac{|z - (x + y)|}{|x + y|} \cong 88 \cdot 10^{-4}$$

Η εμφάνιση των μηδενικών οφείλεται στη «ακύρωση» των ψηφίων .451 και τη μετατροπή σε αριθμό μηχανής $\implies$ απώλεια **σημαντικών δεκαδικών ψηφίων**.

Σημαντικά ψηφία: ενός δεκαδικού αριθμού, είναι όλα τα ψηφία του αριθμού από αριστερά προς τα δεξιά, του πρώτου μη μηδενικού (συμπεριλαμβανομένου).

Για τον έλεγχο της προσέγγισης z του x υπάρχουν τα κριτήρια:

- Αν $|\epsilon_\alpha| = |x - z| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$ ο z προσεγγίζει τον x σε d **(σωστά)**
δεκαδικά ψηφία

- Αν $|\epsilon_\sigma| = |x - z|/|x| \leq 5 \cdot 10^{-k}$ ο z προσεγγίζει τον x σε k **(ακρίβη)**
σημαντικά ψηφία

- Αν $|\epsilon_\alpha| = |x - z| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$ ο z προσεγγίζει τον x σε d **(σωστά)**
δεκαδικά ψηφία

- Αν $|\epsilon_\sigma| = |x - z|/|x| \leq 5 \cdot 10^{-k}$ ο z προσεγγίζει τον x σε k **(ακρίβη)**
σημαντικά ψηφία

Παράδειγμα: έστω $x = 0.028254$ και $z = 0.028271$

$|\epsilon_\alpha| = |-0.000017| = 0.17 \cdot 10^{-4} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \implies$ ο z είναι ακριβής σε **τέσσερα δεκαδικά ψηφία**.

- Αν $|\epsilon_\alpha| = |x - z| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$ ο z προσεγγίζει τον x σε d **(σωστά)**
δεκαδικά ψηφία

- Αν $|\epsilon_\sigma| = |x - z|/|x| \leq 5 \cdot 10^{-k}$ ο z προσεγγίζει τον x σε k **(ακριβή)**
σημαντικά ψηφία

Παράδειγμα: έστω $x = 0.028254$ και $z = 0.028271$

$|\epsilon_\alpha| = |-0.000017| = 0.17 \cdot 10^{-4} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \implies$ ο z είναι ακριβής σε **τέσσερα δεκαδικά** ψηφία.

$|\epsilon_\sigma| \approx 0.602 \cdot 10^{-3} \leq 5 \cdot 10^{-3} \implies$ ο z είναι ακριβής σε **τρία σημαντικά** ψηφία.

• Αν $|\epsilon_\alpha| = |x - z| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$ ο z προσεγγίζει τον x σε d **(σωστά)**
δεκαδικά ψηφία

• Αν $|\epsilon_\sigma| = |x - z|/|x| \leq 5 \cdot 10^{-k}$ ο z προσεγγίζει τον x σε k **(ακριβή)**
σημαντικά ψηφία

Παράδειγμα: έστω $x = 0.028254$ και $z = 0.028271$

$|\epsilon_\alpha| = |-0.000017| = 0.17 \cdot 10^{-4} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \implies$ ο z είναι ακριβής σε
τέσσερα δεκαδικα ψηφία.

$|\epsilon_\sigma| \approx 0.602 \cdot 10^{-3} \leq 5 \cdot 10^{-3} \implies$ ο z είναι ακριβής σε **τρία σημαντικά**
ψηφία.

Παράδειγμα: έστω $x = 28.254$ και $z = 28.271$

$|\epsilon_\alpha| = |-0.017| = 0.17 \cdot 10^{-1} \leq 0.5 \cdot 10^{-1} \implies$ ο z είναι ακριβής σε **ένα**
δεκαδικό ψηφίο.

• Αν $|\epsilon_\alpha| = |x - z| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$ ο z προσεγγίζει τον x σε d **(σωστά)**
δεκαδικά ψηφία

• Αν $|\epsilon_\sigma| = |x - z|/|x| \leq 5 \cdot 10^{-k}$ ο z προσεγγίζει τον x σε k **(ακριβή)**
σημαντικά ψηφία

Παράδειγμα: έστω $x = 0.028254$ και $z = 0.028271$

$|\epsilon_\alpha| = |-0.000017| = 0.17 \cdot 10^{-4} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \implies$ ο z είναι ακριβής σε
τέσσερα δεκαδικα ψηφία.

$|\epsilon_\sigma| \approx 0.602 \cdot 10^{-3} \leq 5 \cdot 10^{-3} \implies$ ο z είναι ακριβής σε **τρία σημαντικά**
ψηφία.

Παράδειγμα: έστω $x = 28.254$ και $z = 28.271$

$|\epsilon_\alpha| = |-0.017| = 0.17 \cdot 10^{-1} \leq 0.5 \cdot 10^{-1} \implies$ ο z είναι ακριβής σε **ένα**
δεκαδικό ψηφίο.

$|\epsilon_\sigma| \approx 0.602 \cdot 10^{-3} \leq 5 \cdot 10^{-3} \implies$ ο z ακριβής σε **τρία σημαντικά** ψηφία.

Αποφυγή καταστροφικής ακύρωσης: Θέλουμε να αποφύγουμε αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών.

Παράδειγμα: έστω $M(10, 10, L, U)$ και θέλω το αποτέλεσμα

$$z = \sqrt{7892} - \sqrt{7891}$$

$$\sqrt{7892} = 0.8883692926 \cdot 10^2 \quad \text{και} \quad \sqrt{7891} = 0.8883130079 \cdot 10^2$$

$$z = 0.5628470000 \cdot 10^2$$

Αποφυγή καταστροφικής ακύρωσης: Θέλουμε να αποφύγουμε αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών.

Παράδειγμα: έστω $M(10, 10, L, U)$ και θέλω το αποτέλεσμα

$$z = \sqrt{7892} - \sqrt{7891}$$

$$\sqrt{7892} = 0.8883692926 \cdot 10^2 \quad \text{και} \quad \sqrt{7891} = 0.8883130079 \cdot 10^2$$

$$z = 0.5628470000 \cdot 10^2$$

Χρησιμοποιώντας όμως την ταυτότητα

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

βρίσκουμε

$$z = 0.56284768294 \cdot 10^2$$

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων-Διαδιδόμενο σφάλμα

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων-Διαδιδόμενο σφάλμα

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k}$$

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων-Διαδιδόμενο σφάλμα

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = 2 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{ακριβής τιμή})$$

Τότε για παράδειγμα $S_{999} = 1.999$, $S_{9999} = 1.9999$.

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων-Διαδιδόμενο σφάλμα

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = 2 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{ακριβής τιμή})$$

Τότε για παράδειγμα $S_{999} = 1.999$, $S_{9999} = 1.9999$.

Αλγόριθμος 1

$$\begin{cases} S_0 = 1, \\ S_k = S_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων-Διαδιδόμενο σφάλμα

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = 2 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{ακριβής τιμή})$$

Τότε για παράδειγμα $S_{999} = 1.999$, $S_{9999} = 1.9999$.

Αλγόριθμος 1

$$\begin{cases} S_0 = 1, \\ S_k = S_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Αλγόριθμος 2

$$\begin{cases} S_0 = \frac{1}{n(n+1)}, \\ S_k = S_{k-1} + \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}, & k = 1, \dots, n-1, \\ S_n = S_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Αλγόριθμος 2

$$\begin{cases} S_0 = \frac{1}{n(n+1)}, \\ S_k = S_{k-1} + \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}, & k = 1, \dots, n-1, \\ S_n = S_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Σε υπολογιστή με $M(10, 10, L, U)$

n	Αλγόριθμος 1	Αλγόριθμος 2
99	1.9900000003	1.9900000000
999	1.9990000003	1.9990000000
9999	1.999899972	1.9999000000

Γιατί ο Αλγόριθμος 2 είναι ποιό ακριβής από τον Αλγόριθμο 1;

Έστω ένα οποιοδήποτε άθροισμα $s_N = \sum_{i=1}^N a_i$ με αλγόριθμο

$$s_1 = a_1, \quad s_k = s_{k-1} + a_k, \quad k = 2, 3, \dots, N$$

Αν υποθέσουμε ότι $a_i \in M$ (δηλ. παριστάνεται χωρίς σφάλμα) τότε

$$\tilde{s}_1 = a_1, \quad \tilde{s}_k = fl(\tilde{s}_{k-1} + a_k) = (\tilde{s}_{k-1} + a_k)(1 + \epsilon_k), \quad |\epsilon_k| \leq u$$

Το **σχετικό σφάλμα** στο άθροισμα N όρων μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\frac{|\tilde{s}_N - s_N|}{|s_N|} \leq \frac{\gamma_N}{|s_N|} u =: \rho_N u$$

όπου $\gamma_N = |s_2| + |s_3| + \dots + |s_N|$ (άθροισμα μερικών αθροισμάτων)

Ο ρ_N = **συντελεστής μετάδοσης** του (σχετικού) σφάλματος κατά τις πράξεις.

Έστω ένα οποιοδήποτε άθροισμα $s_N = \sum_{i=1}^N a_i$ με αλγόριθμο

$$s_1 = a_1, \quad s_k = s_{k-1} + a_k, \quad k = 2, 3, \dots, N$$

Αν υποθέσουμε ότι $a_i \in M$ (δηλ. παριστάνεται χωρίς σφάλμα) τότε

$$\tilde{s}_1 = a_1, \quad \tilde{s}_k = fl(\tilde{s}_{k-1} + a_k) = (\tilde{s}_{k-1} + a_k)(1 + \epsilon_k), \quad |\epsilon_k| \leq u$$

Το **σχετικό σφάλμα** στο άθροισμα N όρων μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\frac{|\tilde{s}_N - s_N|}{|s_N|} \leq \frac{\gamma_N}{|s_N|} u =: \rho_N u$$

όπου $\gamma_N = |s_2| + |s_3| + \dots + |s_N|$ (άθροισμα μερικών αθροισμάτων)

Ο ρ_N = **συντελεστής μετάδοσης** του (σχετικού) σφάλματος κατά τις πράξεις.

Αλγόριθμος 1 $\rightarrow \rho_N \sim n$ (γραμμική αύξηση!)

Αλγόριθμος 2 $\rightarrow \rho_N \sim \frac{1}{2} \log n$ (λογαριθμική αύξηση).

Τι μπορεί να συμβεί αν τα a_i ετερόσημα;

Τότε ένα ή περισσότερα από τα μερικά αθροίσματα $s_k \gg s_N$ (το τελικό άθροισμα) και συνεπώς ο $\rho_N \gg$ (γίνεται δηλ. πολύ μεγάλο).

Τι μπορεί να συμβεί αν τα a_i ετερόσημα;

Τότε ένα ή περισσότερα από τα μερικά αθροίσματα $s_k \gg s_N$ (το τελικό άθροισμα) και συνεπώς ο $\rho_N \gg$ (γίνεται δηλ. πολύ μεγάλο).

Παράδειγμα: Προσέγγιση του e^{-x} για $x \gg 1$ από (ανάπτυγμα Taylor)

$$s_N = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

Τότε $s_N \rightarrow e^{-x}$, $N \rightarrow \infty \forall x$, και γνωρίζω πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το N (πόσοι όροι στο ανάπτυγμα) έτσι ώστε να έχω ικανοποιητική προσέγγιση.
Όμως

Τι μπορεί να συμβεί αν τα a_i ετερόσημα;

Τότε ένα ή περισσότερα από τα μερικά αθροίσματα $s_k \gg s_N$ (το τελικό άθροισμα) και συνεπώς ο $\rho_N \gg$ (γίνεται δηλ. πολύ μεγάλο).

Παράδειγμα: Προσέγγιση του e^{-x} για $x \gg 1$ από (ανάπτυγμα Taylor)

$$s_N = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

Τότε $s_N \rightarrow e^{-x}$, $N \rightarrow \infty \forall x$, και γνωρίζω πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το N (πόσοι όροι στο ανάπτυγμα) έτσι ώστε να έχω ικανοποιητική προσέγγιση.

Όμως

για $x = 100$ το $e^{-100} \approx 0$, ενώ $s_2 = -99$, $s_3 = 4901$, $s_4 = -161766 \dots$

Τι μπορεί να συμβεί αν τα a_i ετερόσημα;

Τότε ένα ή περισσότερα από τα μερικά αθροίσματα $s_k \gg s_N$ (το τελικό άθροισμα) και συνεπώς ο $\rho_N \gg$ (γίνεται δηλ. πολύ μεγάλο).

Παράδειγμα: Προσέγγιση του e^{-x} για $x \gg 1$ από (ανάπτυγμα Taylor)

$$s_N = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

Τότε $s_N \rightarrow e^{-x}$, $N \rightarrow \infty \forall x$, και γνωρίζω πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το N (πόσοι όροι στο ανάπτυγμα) έτσι ώστε να έχω ικανοποιητική προσέγγιση. Όμως

για $x = 100$ το $e^{-100} \approx 0$, ενώ $s_2 = -99$, $s_3 = 4901$, $s_4 = -161766 \dots$

Σε υπολογιστή με $M(10, 5, L, U)$ και $N = 25$ (όρους) για $x = 5.5$

$$e^{-5.5} \approx .0002636 \text{ ενώ το πραγματικό } e^{-5.5} \approx .0040867.$$

Αν θέλαμε το e^{100} το αποτέλεσμα γίνεται αρνητικό (στο συγκεκριμένο υπολογιστή)!!

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Ορισμός: Ένας αλγόριθμος λέγεται αριθμητικά **ασταθής** εάν, μικρές διαταραχές (σφάλματα) που γίνονται κατά την παράσταση των αριθμών και τις πράξεις στον υπολογιστή επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα δηλ. είναι πολύ ευαίσθητος σε διαταραχές των δεδομένων του.

Διαφορετικά, αν μικρές διαταραχές στα δεδομένα δεν επηρεάζουν πολύ το τελικό αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος λέγεται (αριθμητικά) **ευσταθής**.

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Ορισμός: Ένας αλγόριθμος λέγεται αριθμητικά **ασταθής** εάν, μικρές διαταραχές (σφάλματα) που γίνονται κατά την παράσταση των αριθμών και τις πράξεις στον υπολογιστή επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα δηλ. είναι πολύ ευαίσθητος σε διαταραχές των δεδομένων του.

Διαφορετικά, αν μικρές διαταραχές στα δεδομένα δεν επηρεάζουν πολύ το τελικό αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος λέγεται (αριθμητικά) **ευσταθής**.

Η «ποιότητα» ενός αλγορίθμου καθορίζεται από την

- Ευστάθεια του
- Ακρίβεια του
- Ταχυτητά του

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Παράδειγμα: Για τον υπολογισμό του e^{-x} με μερικά αθροίσματα Taylor

$$s_N = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

είδαμε στην αστάθειά του στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Παράδειγμα: Για τον υπολογισμό του e^{-x} με μερικά αθροίσματα Taylor

$$s_N = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

είδαμε στην αστάθειά του στο προηγούμενο παράδειγμα.

Αντίθετα, ο αλγόριθμος

$$\tilde{s}_N = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots}$$

είναι αριθμητικά ευσταθής.

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Παράδειγμα: Για τον υπολογισμό του e^{-x} με μερικά αθροίσματα Taylor

$$s_N = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

είδαμε στην αστάθειά του στο προηγούμενο παράδειγμα.

Αντίθετα, ο αλγόριθμος

$$\tilde{s}_N = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots}$$

είναι αριθμητικά ευσταθής.

Οι υπολογιστές (και τσέπης/κομπουτεράκια) κάνουν την πράξη e^{-x} , $\forall x$ ως

$$e^x = e^{m+f} = (e^m)e^f = \overbrace{(e^{1+f/m})^m}^y, \quad m = \text{ακέραιος}, 0 \leq f < 1,$$

και $y \in [0, 2)$.

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Παράδειγμα: Υπολογισμός του

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Παράδειγμα: Υπολογισμός του

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Το $I_n > 0 \quad \forall n \geq 1$, $I_{n+1} < I_n \leq \frac{1}{n+1}$ στο $(0, 1)$ και $I_n \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$

Ευστάθεια Αλγορίθμων

Παράδειγμα: Υπολογισμός του

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Το $I_n > 0 \quad \forall n \geq 1$, $I_{n+1} < I_n \leq \frac{1}{n+1}$ στο $(0, 1)$ και $I_n \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$

Αλγόριθμος 1:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{e} \\ I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Αλγόριθμος 2:

$$\begin{cases} I_m, \quad m > n \quad (\text{τυχαία τιμή}) \\ I_{n-1} = (1 - I_n)/n, \quad n = m, \dots k \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό του I_9 τα αποτελέσματα σε έναν υπολογιστή με $M(10, 6, L, U)$ είναι:

n	Αλγόριθμος 1 (ασταθής)	n	Αλγόριθμος 2 (ευσταθής)
1	0.367879	$(m =) 20$	0.00000
2	0.264242	19	0.05000
3	0.207274	18	0.05000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	-0.068480	$k = 9$	0.0916123

Υποθέτοντας ότι κάνουμε σφάλμα ϵ_1, ϵ_m , δηλ. μόνο στις αρχικές τιμές αντίστοιχα, τότε για τα σφάλματα ϵ_n και ϵ_k έχουμε

n	Αλγόριθμος 1 (ασταθής)	n	Αλγόριθμος 2 (ευσταθής)
1	0.367879	$(m =) 20$	0.00000
2	0.264242	19	0.05000
3	0.207274	18	0.05000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	-0.068480	$k = 9$	0.0916123

Υποθέτοντας ότι κάνουμε σφάλμα ϵ_1, ϵ_m , δηλ. μόνο στις αρχικές τιμές αντίστοιχα, τότε για τα σφάλματα ϵ_n και ϵ_k έχουμε

Αλγόριθμος 1: $\epsilon_n = (-1)^{n-1} n! \epsilon_1$, **μεγένθυση (αρχικού) σφάλματος**

$$\epsilon_1 \approx -4.4 \cdot 10^{-7} \text{ και τότε } \epsilon_9 = 9! \epsilon_1 \approx -0.16$$

Αλγόριθμος 2: $\epsilon_k = (-1)^{m-k} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} \cdots \frac{1}{m} \epsilon_m$, **καταστολή σφάλμ.**

$$\epsilon_{20} \approx 1/21 \text{ και τότε } \epsilon_9 \approx 0.15 \cdot 10^{-14} \epsilon_{20}$$

Κατάσταση (ευαισθησία) Προβλημάτων

Η αριθμητική **επίλυση** προβλημάτων γίνεται σε **περιβάλλον διαταραχών** λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς.

Κατάσταση (ευαισθησία) Προβλημάτων

Η αριθμητική **επίλυση** προβλημάτων γίνεται σε **περιβάλλον διαταραχών** λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς.

Ορισμός: Αν σ' ένα πρόβλημα η λύση του αλλάζει λίγο αν τα δεδομένα του διαταραχθούν ελάχιστα, δηλ. δεν είναι ευαίσθητο σε διαταραχές δεδομένων τότε το πρόβλημα είναι **καλής κατάστασης**.

Κατάσταση (ευαισθησία) Προβλημάτων

Η αριθμητική **επίλυση** προβλημάτων γίνεται σε **περιβάλλον διαταραχών** λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς.

Ορισμός: Αν σ' ένα πρόβλημα η λύση του αλλάζει λίγο αν τα δεδομένα του διαταραχθούν ελάχιστα, δηλ. δεν είναι ευαίσθητο σε διαταραχές δεδομένων τότε το πρόβλημα είναι **καλής κατάστασης**.

- Αν ένα πρόβλημα είναι κακής κατάστασης τότε κάθε αριθμητική μέθοδος (αλγόριθμος) θα είναι ασταθής.
- Αν ένα πρόβλημα είναι κακής κατάστασης θα λύνω στην ουσία ένα άλλο διαταραγμένο πρόβλημα και η αριθμητική λύση θα είναι η **ακριβής** λύση αυτού του **διαταραγμένου** προβλήματος.

Κατάσταση (ευαισθησία) Προβλημάτων

Η αριθμητική **επίλυση** προβλημάτων γίνεται σε **περιβάλλον διαταραχών** λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς.

Ορισμός: Αν σ' ένα πρόβλημα η λύση του αλλάζει λίγο αν τα δεδομένα του διαταραχθούν ελάχιστα, δηλ. δεν είναι ευαίσθητο σε διαταραχές δεδομένων τότε το πρόβλημα είναι **καλής κατάστασης**.

- Αν ένα πρόβλημα είναι κακής κατάστασης τότε κάθε αριθμητική μέθοδος (αλγόριθμος) θα είναι ασταθής.
- Αν ένα πρόβλημα είναι κακής κατάστασης θα λύνω στην ουσία ένα άλλο διαταραγμένο πρόβλημα και η αριθμητική λύση θα είναι η **ακριβής** λύση αυτού του **διαταραγμένου** προβλήματος.

▷ Πρέπει να μπορούμε να διερευνούμε την κατάσταση των προβλημάτων. Παράδειγμα ο **δείκτης κατάστασης ενός πίνακα** $cond(A)$ στην λύση γραμμικών συστημάτων $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Κατάσταση Προβλημάτων

Παράδειγμα: Η λύση (ρίζα) της εξίσωσης $(x - 2)^6 = 0$ είναι, προφανώς, η $x = 2$ (πολλαπλότητας 6).

Μεταβάλλοντας ελάχιστα τα δεδομένα

$$(x - 2)^6 = 10^{-6}$$

Κατάσταση Προβλημάτων

Παράδειγμα: Η λύση (ρίζα) της εξίσωσης $(x - 2)^6 = 0$ είναι, προφανώς, η $x = 2$ (πολλαπλότητας 6).

Μεταβάλλοντας ελάχιστα τα δεδομένα

$$(x - 2)^6 = 10^{-6}$$

οι ρίζες τότε είναι

$$x_k = 2 + \frac{1}{10}e^{2\pi i k/6}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

Η μικρή διαταραχή 10^{-6} προκάλεσε τη σχετικά "μεγάλη" μεταβολή 10^{-1} γιατί $|x_k - 2| \approx 1/10$.