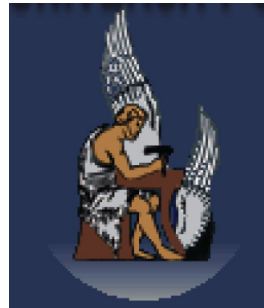


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 1η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Δρ. Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.
Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103
Ώρες Γραφείου: Τρίτη 11:00-13:00 & Πέμπτη 13:00-15:00
e-mail: adelis@science.tuc.gr

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Δρ. Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.
Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103
Ώρες Γραφείου: Τρίτη 11:00-13:00 & Πέμπτη 13:00-15:00
e-mail: adelis@science.tuc.gr
- **Ιστοτόπος Μαθήματος:**
<https://www.eclass.tuc.gr/courses/MPD277/>
Συνθηματικό: ΜΑΘ202

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Δρ. Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.
Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103
Ώρες Γραφείου: Τρίτη 11:00-13:00 & Πέμπτη 13:00-15:00
e-mail: adelis@science.tuc.gr
- Ιστοτόπος Μαθήματος:
<https://www.eclass.tuc.gr/courses/MPD277/>
Συνθηματικό: ΜΑΘ202
- Προτεινόμενα Συγγράμματα:
 - Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Γ. Ακρίβης & Β. Δουγαλής, Παν/μιακές Εκδόσεις Κρήτης.
 - **Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς, S. Chapra & R. Canale**

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Δρ. Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.
Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103
Ώρες Γραφείου: Τρίτη 11:00-13:00 & Πέμπτη 13:00-15:00
e-mail: adelis@science.tuc.gr
- Ιστοτόπος Μαθήματος:
<https://www.eclass.tuc.gr/courses/MPD277/>
Συνθηματικό: MAΘ202
- Προτεινόμενα Συγγράμματα:
 - Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Γ. Ακρίβης & Β. Δουγαλής, Παν/μιακές Εκδόσεις Κρήτης.
 - **Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς, S. Chapra & R. Canale**
- **Αξιολόγηση:**
Εργαστηρ. βαθμός 20% & Τελική Εξέταση 80% (για γραπτό βαθμού ≥ 4)

Πληροφορίες Μαθήματος

- **Διδάσκων:** Δρ. Αργύρης Δελής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Μ.Π.Δ.

Γραφείο: Κτίριο Επιστημών 145.B.103

Ώρες Γραφείου: Τρίτη 11:00-13:00 & Πέμπτη 13:00-15:00

e-mail: adelis@science.tuc.gr

- Ιστοτόπος Μαθήματος:

<https://www.eclass.tuc.gr/courses/MPD277/>

Συνθηματικό: MAΘ202

- Προτεινόμενα Συγγράμματα:

- Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Γ. Ακρίβης & Β. Δουγαλής, Παν/μιακές Εκδόσεις Κρήτης.

- **Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς, S. Chapra & R. Canale**

- **Αξιολόγηση:**

Εργαστηρ. βαθμός 20% & Τελική Εξέταση 80% (για γραπτό βαθμού ≥ 4)

Εργαστήριο μία ώρα την εβδομάδα με μέγιστο μία απουσία

(Απαραίτητες) Βασικές γνώσεις

- **Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός**
- **Υπολογισμός παραγώγων & Ολοκληρωμάτων**
- **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις**
- **Λύση γραμμικών συστημάτων**
- **Τα βασικά στις Σ.Δ.Ε**
- **Χρήση MATLAB**

Εισαγωγή

- Ανάπτυξη και μελέτη βασικών αριθμητικών (**υπολογιστικών**) μεθόδων (**αλγορίθμων**) για την επίλυση επιστημονικών προβλημάτων (των μαθηματικών και της μηχανικής που έχουν συνεχείς μεταβλητές)
- Υλοποίηση των τεχνικών στον υπολογιστή με χρήση αριθμητικών πράξεων.
- Υπολογισμός **προσεγγιστικών λύσεων** για προβλήματα που είναι δύσκολο (ή αδύνατο) να βρούμε ακριβής (αναλυτικές) λύσεις.
- Μελέτη σφάλματος στην προσέγγιση αυτή των λύσεων (ακρίβεια λύσεων).

Εισαγωγή

- Ανάπτυξη και μελέτη βασικών αριθμητικών (**υπολογιστικών**) μεθόδων (**αλγορίθμων**) για την επίλυση επιστημονικών προβλημάτων (των μαθηματικών και της μηχανικής που έχουν συνεχείς μεταβλητές)
- Υλοποίηση των τεχνικών στον υπολογιστή με χρήση αριθμητικών πράξεων.
- Υπολογισμός **προσεγγιστικών λύσεων** για προβλήματα που είναι δύσκολο (ή αδύνατο) να βρούμε ακριβής (αναλυτικές) λύσεις.
- Μελέτη σφάλματος στην προσέγγιση αυτή των λύσεων (ακρίβεια λύσεων).

Αλγόριθμος = σειρά λογικών εντολών που υλοποιούν μία αριθμητική μέθοδο

Εισαγωγή

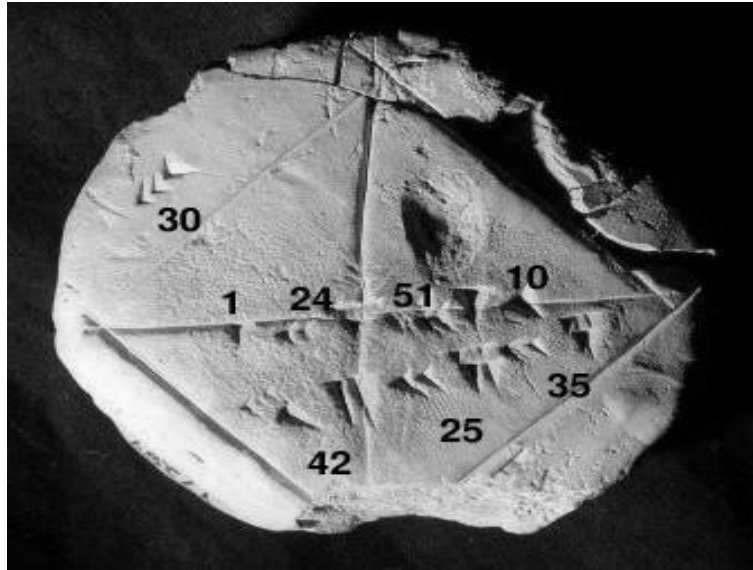
- Ανάπτυξη και μελέτη βασικών αριθμητικών (**υπολογιστικών**) μεθόδων (**αλγορίθμων**) για την επίλυση επιστημονικών προβλημάτων (των μαθηματικών και της μηχανικής που έχουν συνεχείς μεταβλητές)
- Υλοποίηση των τεχνικών στον υπολογιστή με χρήση αριθμητικών πράξεων.
- Υπολογισμός **προσεγγιστικών λύσεων** για προβλήματα που είναι δύσκολο (ή αδύνατο) να βρούμε ακριβής (αναλυτικές) λύσεις.
- Μελέτη σφάλματος στην προσέγγιση αυτή των λύσεων (ακρίβεια λύσεων).

Αλγόριθμος = σειρά λογικών εντολών που υλοποιούν μία αριθμητική μέθοδο

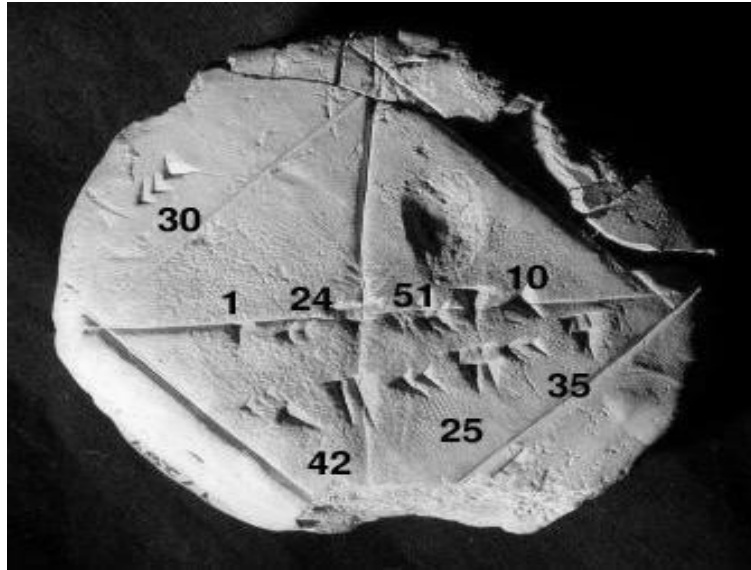
Μας ενδιαφέρει η επιλογή της περισσότερο **κατάλληλης μεθόδου** (αλγορίθμου) για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος.

Απαιτεί ανάπτυξη δεξιοτήτων και διαίσθησης.

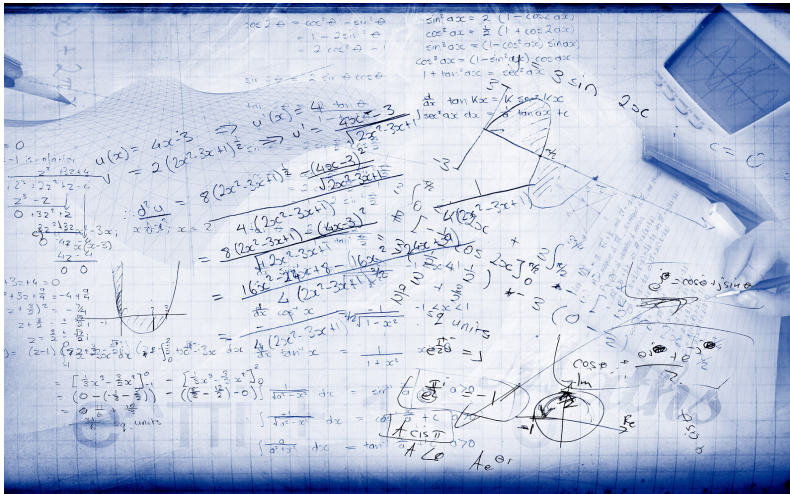
Βαβυλώνιοι (1800-1600 π.χ) Υπολογισμός (προσέγγιση) του $\sqrt{2}$



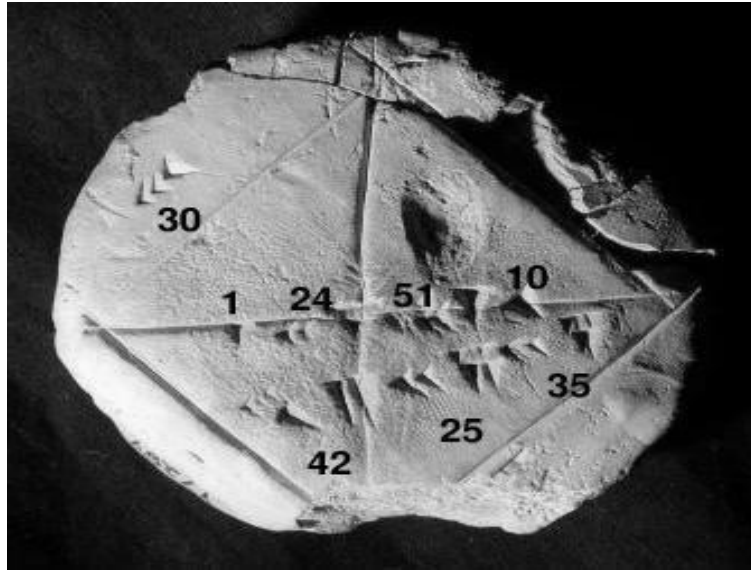
Βαβυλώνιοι (1800-1600 π.χ) Υπολογισμός (προσέγγιση) του $\sqrt{2}$



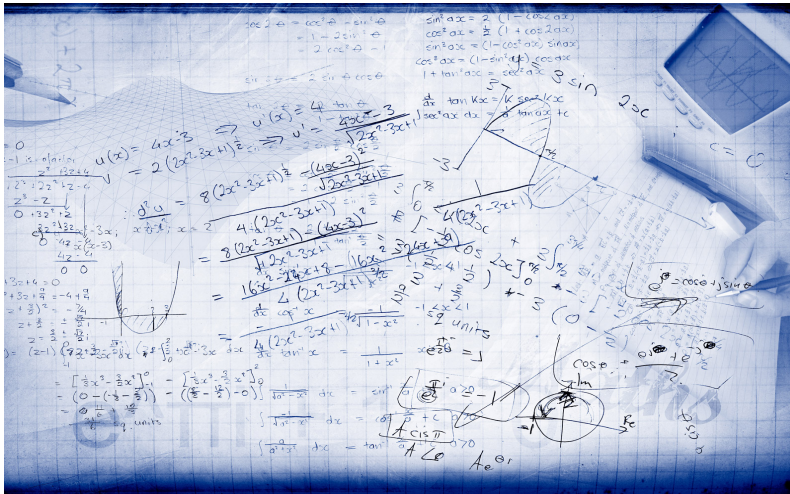
Μαθηματική και υπολογιστική προσομείωση φαινομένων και διεργασιών.



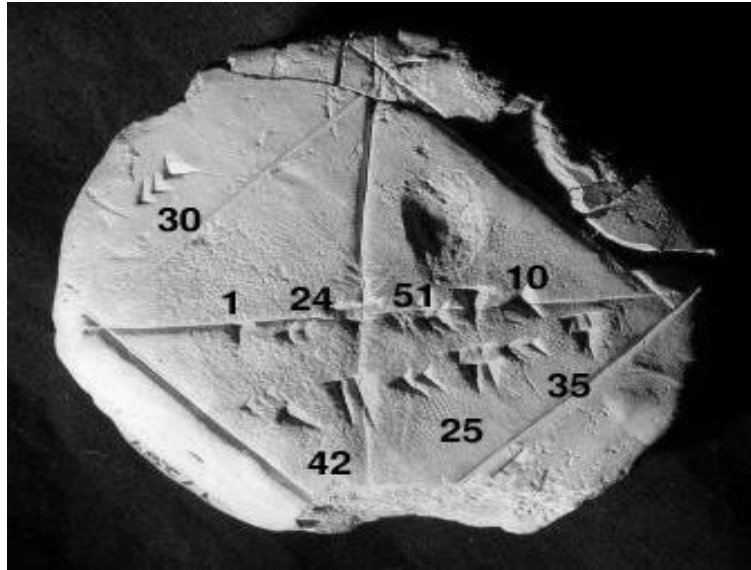
Βαβυλώνιοι (1800-1600 π.χ) Υπολογισμός (προσέγγιση) του $\sqrt{2}$



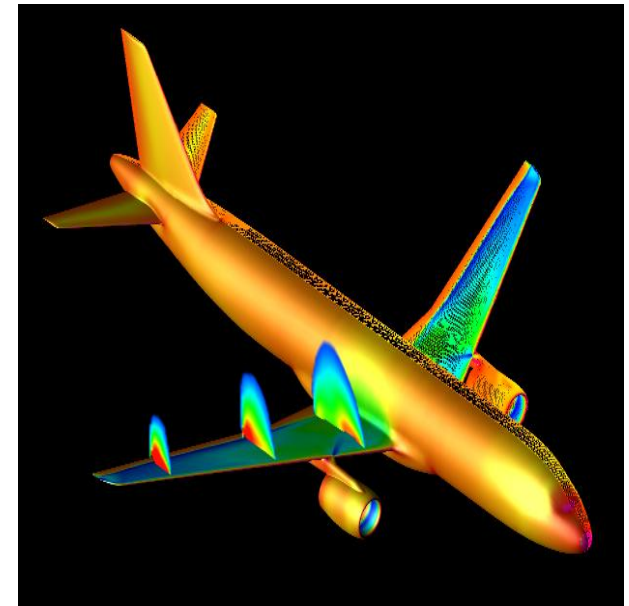
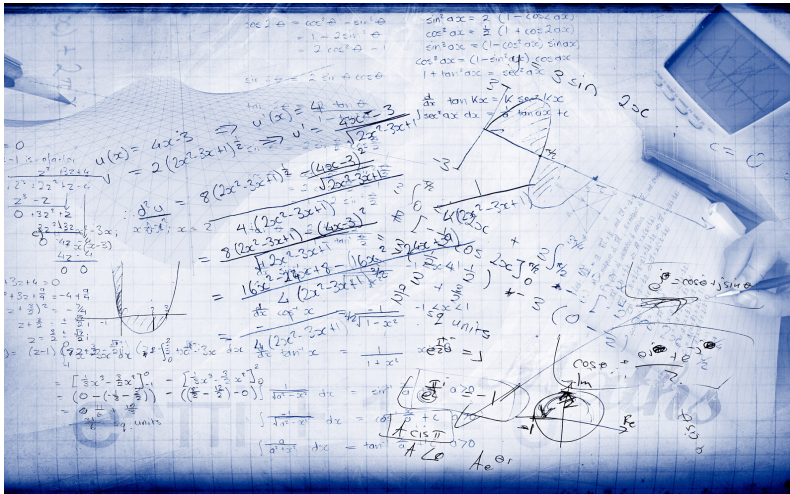
Μαθηματική και υπολογιστική προσομείωση φαινομένων και διεργασιών.



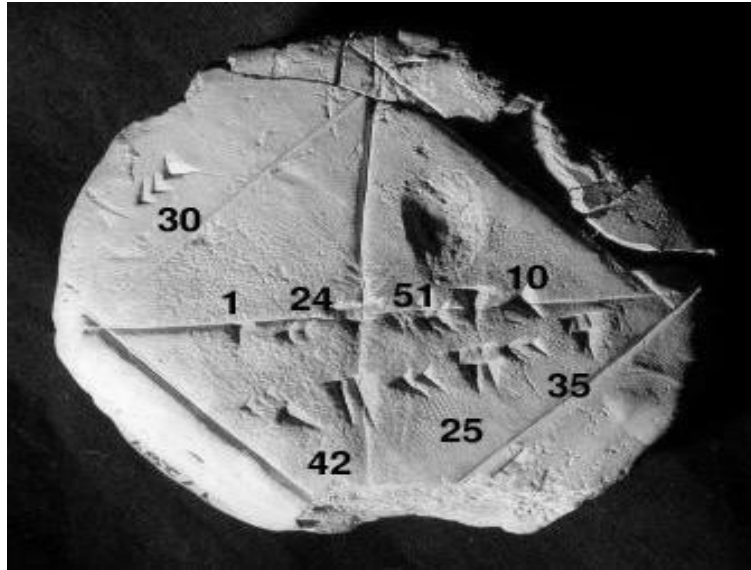
Βαβυλώνιοι (1800-1600 π.χ) Υπολογισμός (προσέγγιση) του $\sqrt{2}$



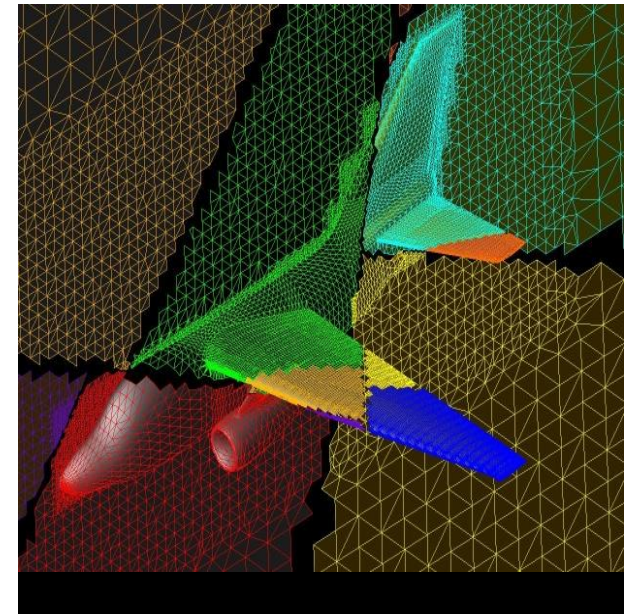
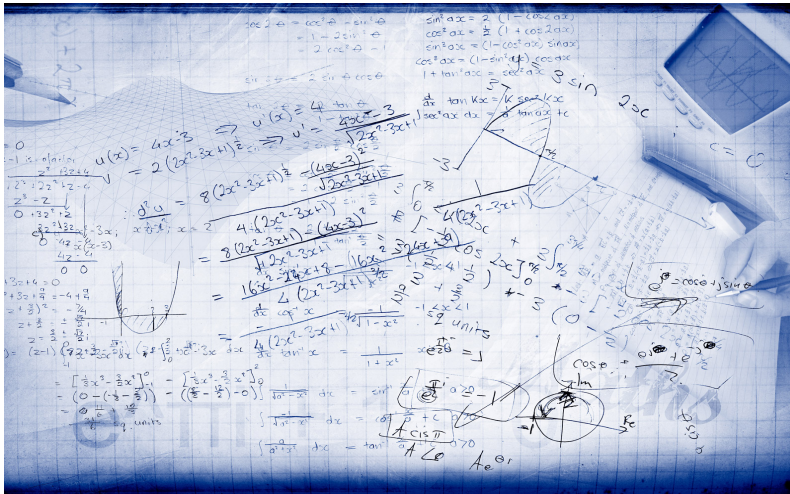
Μαθηματική και υπολογιστική προσομείωση φαινομένων και διεργασιών.



Βαβυλώνιοι (1800-1600 π.χ) Υπολογισμός (προσέγγιση) του $\sqrt{2}$



Μαθηματική και υπολογιστική προσομείωση φαινομένων και διεργασιών.



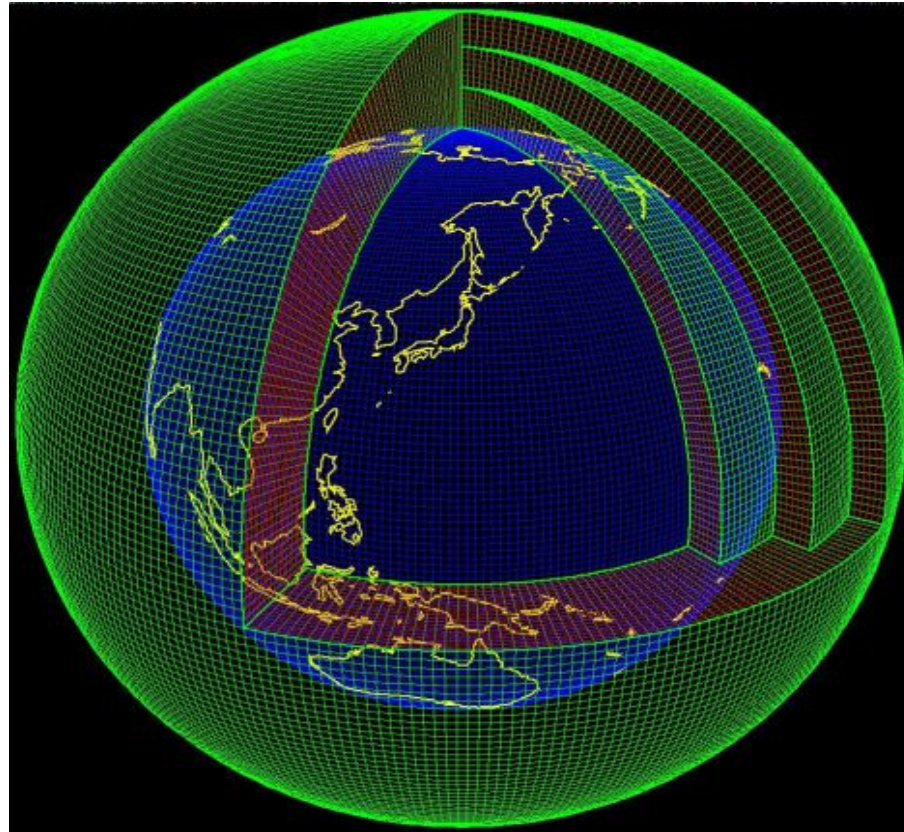
Εφαρμογές Μεγάλης Κλίμακας:

Αριθμητική Προσομοίωση Πρόβλεψης του Καιρού



Εφαρμογές Μεγάλης Κλίμακας:

Αριθμητική Προσομοίωση Πρόβλεψης του Καιρού



Εφαρμογές Μεγάλης Κλίμακας:

Προσομοίωση πρόβλεψης πλημμυρικών φαινομένων



Flood Inundation due to Malpasset Dam-Break Event
Simulated by NCCH Flood Simulation System

Εφαρμογές Μεγάλης Κλίμακας:

Προσομοίωση πρόβλεψης πλημμυρικών φαινομένων



Flood Inundation due to Malpasset Dam-Break Event
Simulated by NCCH Flood Simulation System

Αναγκαιότητα (χρήσης και κατασκευής αριθμητικών μεθόδων)

- Χρήση **εμπορικού λογισμικού** που περιέχει αριθμητικές μεθόδους. Απαραίτητη η γνώση της βασικής θεωρείας για καλύτερη χρήση και αξιολόγηση (των αποτελεσμάτων).

Αναγκαιότητα (χρήσης και κατασκευής αριθμητικών μεθόδων)

- Χρήση **εμπορικού λογισμικού** που περιέχει αριθμητικές μεθόδους. Απαραίτητη η γνώση της βασικής θεωρείας για καλύτερη χρήση και αξιολόγηση (των αποτελεσμάτων).
- Οι αριθμητικές μέθοδοι αποτελούν ένα **ισχυρό εργαλείο** για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Αναγκαιότητα (χρήσης και κατασκευής αριθμητικών μεθόδων)

- Χρήση **εμπορικού λογισμικού** που περιέχει αριθμητικές μεθόδους. Απαραίτητη η γνώση της βασικής θεωρείας για καλύτερη χρήση και αξιολόγηση (των αποτελεσμάτων).
- Οι αριθμητικές μέθοδοι αποτελούν ένα **ισχυρό εργαλείο** για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων.
- Υπάρχουν προβλήματα που δεν λύνονται από έτοιμο λογισμικό και συνεπώς πρέπει να κατασκευάσουμε **δικά μας προγράμματα** υλοποίησης υπολογιστικών μεθόδων.

Αναγκαιότητα (χρήσης και κατασκευής αριθμητικών μεθόδων)

- Χρήση **εμπορικού λογισμικού** που περιέχει αριθμητικές μεθόδους. Απαραίτητη η γνώση της βασικής θεωρείας για καλύτερη χρήση και αξιολόγηση (των αποτελεσμάτων).
- Οι αριθμητικές μέθοδοι αποτελούν ένα **ισχυρό εργαλείο** για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων.
- Υπάρχουν προβλήματα που δεν λύνονται από έτοιμο λογισμικό και συνεπώς πρέπει να κατασκευάσουμε **δικά μας προγράμματα** υλοποίησης υπολογιστικών μεθόδων.
- Στόχος η μείωση της **πολυπλοκότητας** (υπολογιστικής, μνήμης, υλοποίησης), αύξηση της **ταχύτητας** των υπολογισμών, της **ακρίβειας** των παραγόμενων λύσεων και της **ανθεκτικότητας** σε αριθμητικά σφάλματα.

Επιστημονικοί Υπολογισμοί (Scientific Computing)

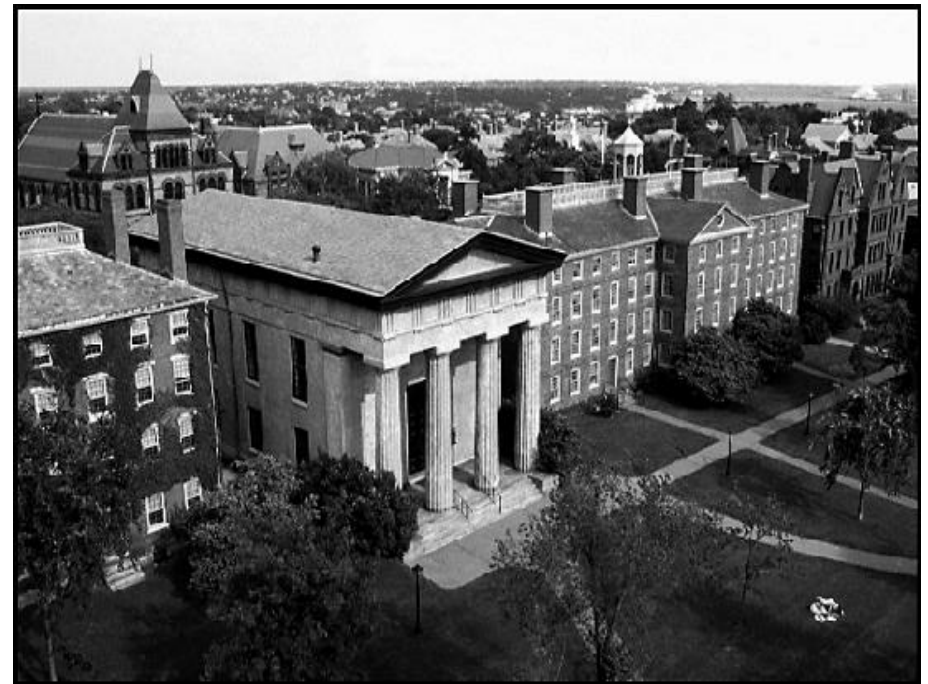
Υπολογισμός (computing) (προσεγγιστικών) λύσεων σε (πρακτικά) προβλήματα της μηχανικής και των φυσικών επιστημών εκφρασμένα μέσα από μαθηματικά.

Επιστημονικοί Υπολογισμοί (Scientific Computing)

Υπολογισμός (computing) (προσεγγιστικών) λύσεων σε (πρακτικά) προβλήματα της μηχανικής και των φυσικών επιστημών εκφρασμένα μέσα από μαθηματικά.

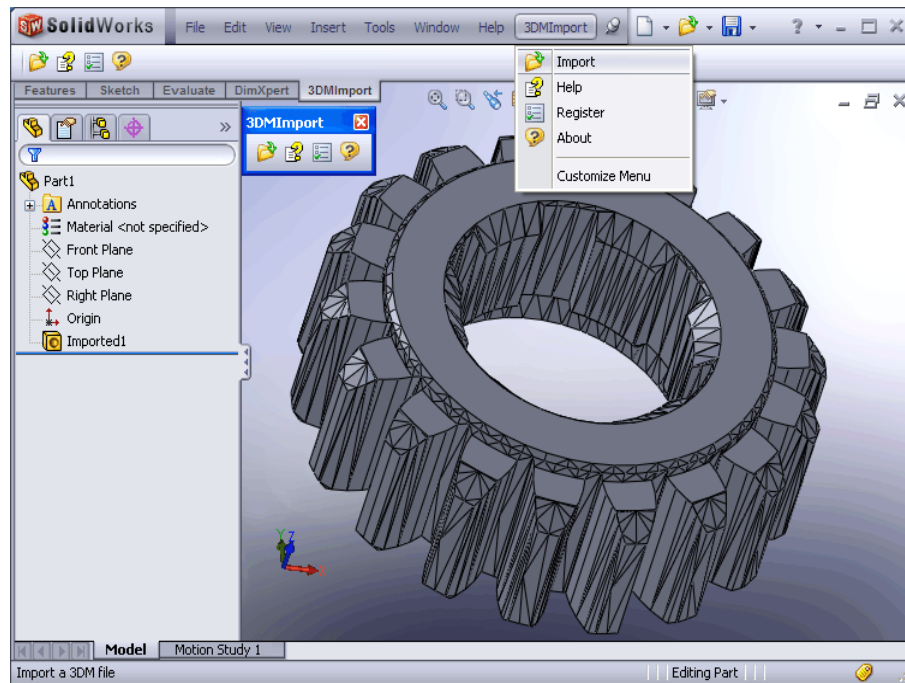
Επεξεργασία σήματος και εικόνας (Signal & Image processing):

Καθαρισμός εικόνων

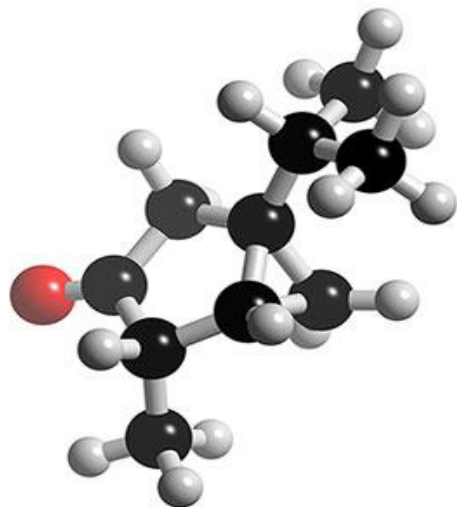


Εργαλεία Γραφικών (CAD):

Σχεδιασμός και βελτίωση μηχανικών εξαρτημάτων, εργαλείων και συσκευών.

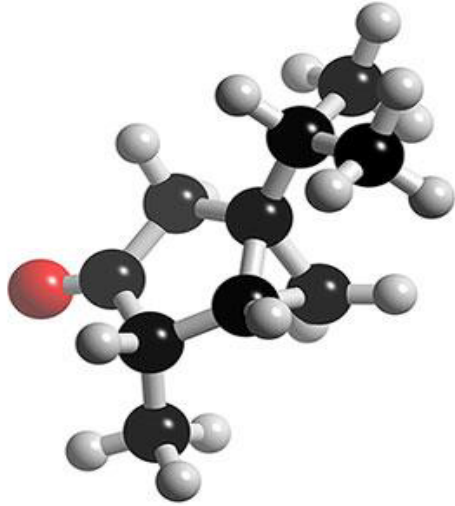


Χημεία:



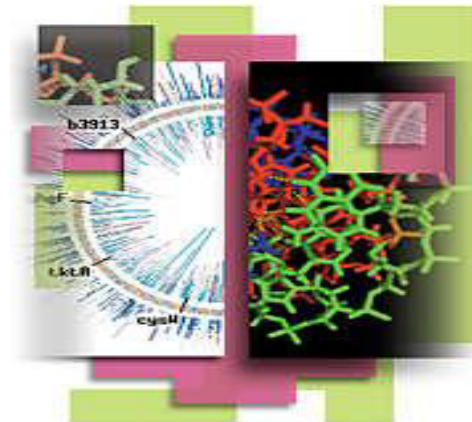
Μοριακός σχεδιασμός,
3D οπτικοποίηση μορίων,
Μοντελοποίηση Μοριακών αντιδράσεων,
Έλεγχος και βελτίωση χημικών αντιδράσεων.

Χημεία:



Μοριακός σχεδιασμός,
3D οπτικοποίηση μορίων,
Μοντελοποίηση Μοριακών αντιδράσεων,
Έλεγχος και βελτίωση χημικών αντιδράσεων.

Βιοπληροφορική:

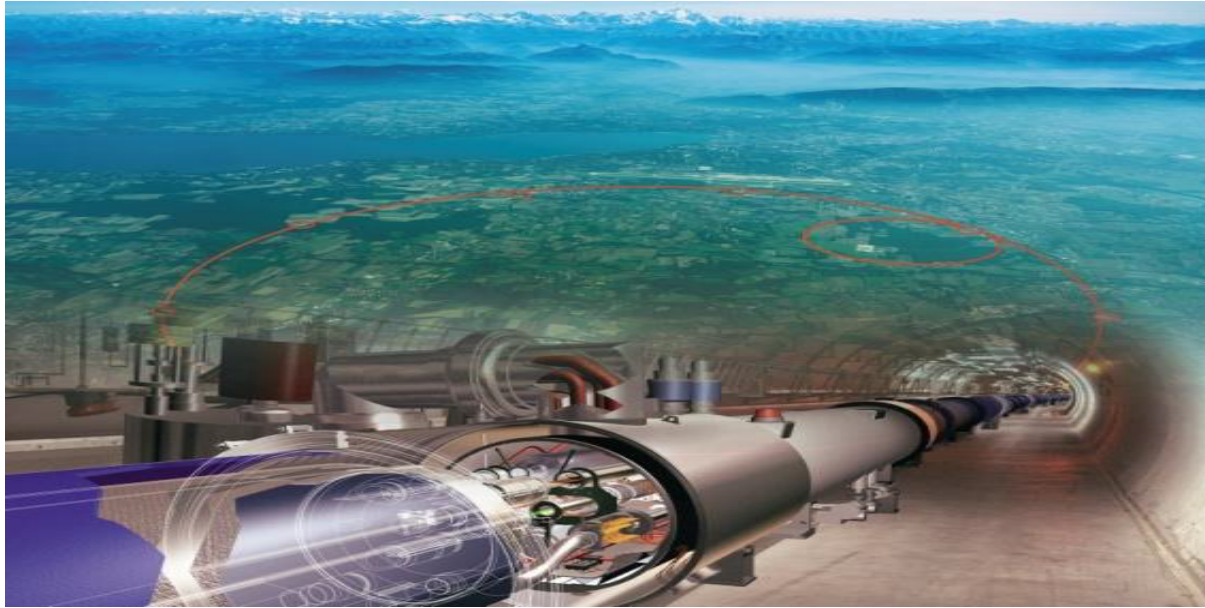


Χρήση υπολογιστικών
μοντέλων για την κατανόηση της ζωής,
Κυτταρική βιολογία-Κατασκευή φαρμάκων,
Ανθρώπινο γονιδίωμα,

Functional genomics and proteomics: μελέτης δράσης-αντίδρασης μεταξύ γονιδίων και πρωτεϊνών.

Φυσική και Αστρονομία

Επιβεβαίωση θεωρίας μέσω προσομοιωτών.



CERN: 1PetaByte δεδομένων ετησίως

1.000.000.000.000.000

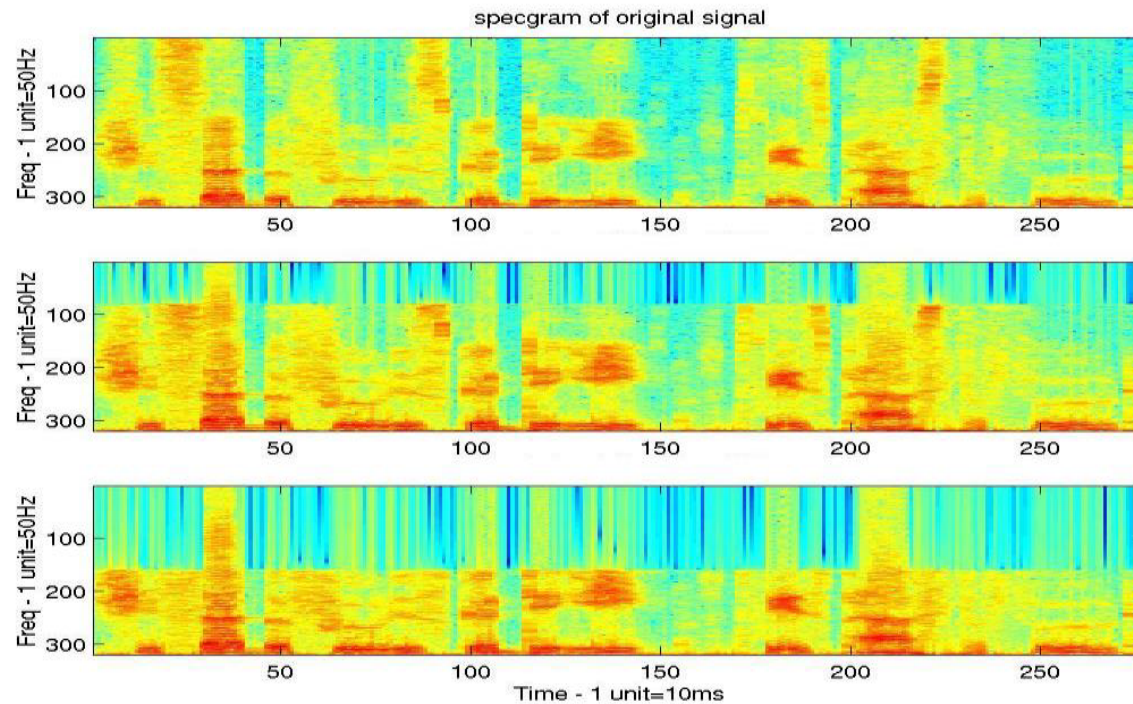
100PB δεδομένα από τον Large Hadron Collider!

Γνωστικές Επιστήμες (Cognitive and Brain Science):

Επεξεργασία πληροφοριων από τον ανθρώπινο εγκέφαλο.

Υπολογιστικά μοντέλα της αντίληψης και των γνωστικών διεργασιών.

Φασματογραφήματα δείχνουν πως ακούμε ήχους



Ιατρική:



Διαγνωστικά εργαλεία,
Επεξεργασία
και οπτικοποίηση δεδομένων (X-ray, sonar, MRI) ,
Επαυξημένη πραγματικότητα και robot-χειρουργοί.

Ιατρική:



Διαγνωστικά εργαλεία,
Επεξεργασία
και οπτικοποίηση δεδομένων (X-ray, sonar, MRI) ,
Επαυξημένη πραγματικότητα και robot-χειρουργοί.

Οικονομία:



Ηλεκτρονικό εμπόριο (E-commerce),
Διαχείριση γνώσης (Knowledge Managment)
Data Mining,
Markets and banking.

Περιεχόμενο Μαθήματος

Περιεχόμενο Μαθήματος

- (1) Αριθμητική του υπολογιστή & Σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Περιεχόμενο Μαθήματος

- (1) Αριθμητική του υπολογιστή & Σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- (2) Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (εύρεση ριζών).

Περιεχόμενο Μαθήματος

- (1) Αριθμητική του υπολογιστή & Σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- (2) Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (εύρεση ριζών).
- (3) Παρεμβολή σε δεδομένα (data) & συναρτήσεις.

Περιεχόμενο Μαθήματος

- (1)** Αριθμητική του υπολογιστή & Σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- (2)** Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (εύρεση ριζών).
- (3)** Παρεμβολή σε δεδομένα (data) & συναρτήσεις.
- (4)** Μέθοδος (προσέγγιση) των Ελαχίστων Τετραγώνων.

Περιεχόμενο Μαθήματος

- (1) Αριθμητική του υπολογιστή & Σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- (2) Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (εύρεση ριζών).
- (3) Παρεμβολή σε δεδομένα (data) & συναρτήσεις.
- (4) Μέθοδος (προσέγγιση) των Ελαχίστων Τετραγώνων.
- (5) Αριθμητική Παραγωγή και Ολοκλήρωση.

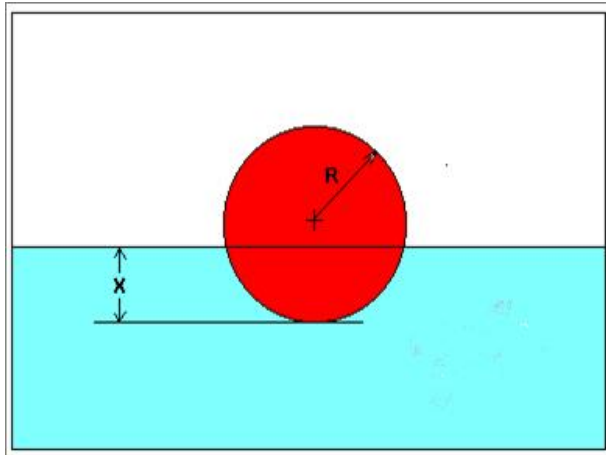
Περιεχόμενο Μαθήματος

- (1) Αριθμητική του υπολογιστή & Σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- (2) Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (εύρεση ριζών).
- (3) Παρεμβολή σε δεδομένα (data) & συναρτήσεις.
- (4) Μέθοδος (προσέγγιση) των Ελαχίστων Τετραγώνων.
- (5) Αριθμητική Παραγωγή και Ολοκλήρωση.
- (6) Αριθμητική επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων.

Περιεχόμενο Μαθήματος

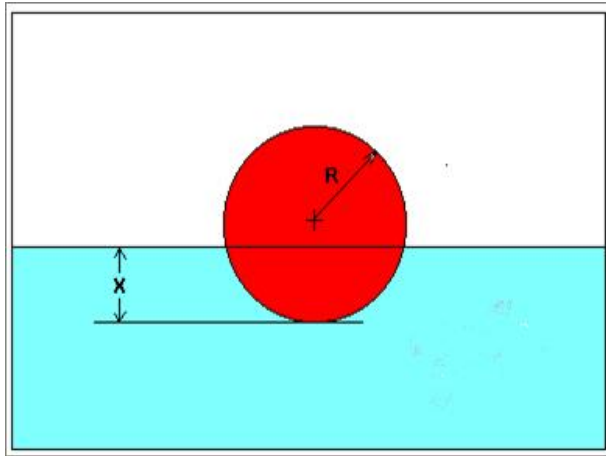
- (1) Αριθμητική του υπολογιστή & Σφάλματα στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
 - (2) Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (εύρεση ριζών).
 - (3) Παρεμβολή σε δεδομένα (data) & συναρτήσεις.
 - (4) Μέθοδος (προσέγγιση) των Ελαχίστων Τετραγώνων.
 - (5) Αριθμητική Παραγωγή και Ολοκλήρωση.
 - (6) Αριθμητική επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων.
- Άλλοι τομείς: Αριθμητική επίλυση Μερικών Διαφορικών εξισώσεων, Αριθμητική Βελτιστοποίηση, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων



Πόση η απόσταση, x , μέσα στο νερό μίας σφαίρας διαμέτρου $D = 0.11m$, που επιπλέει;

Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

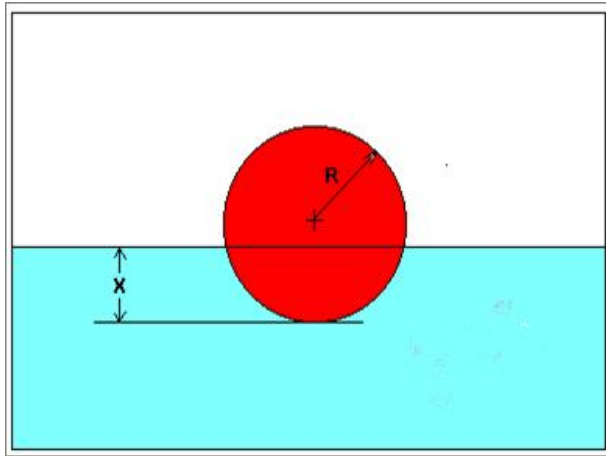


Πόση η απόσταση, x , μέσα στο νερό μίας σφαίρας διαμέτρου $D = 0.11m$, που επιπλέει;

Μαθηματικό μοντέλο/πρόβλημα:

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \cdot 10^{-4} = 0$$

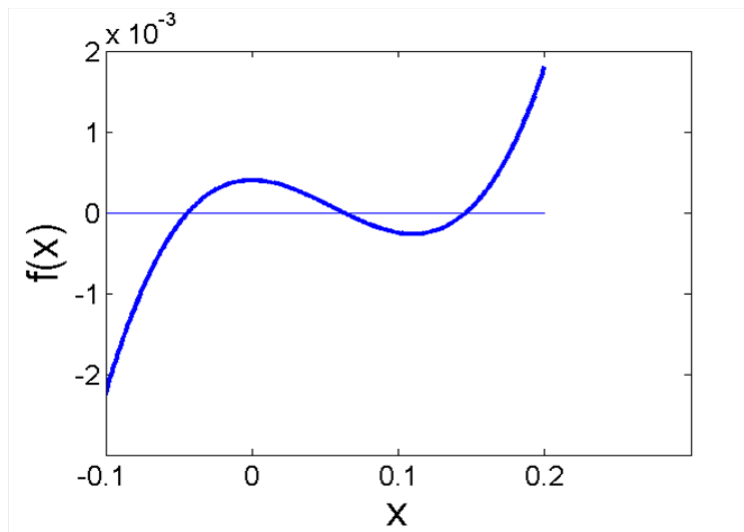
Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων



Πόση η απόσταση, x , μέσα στο νερό μίας σφαίρας διαμέτρου $D = 0.11m$, που επιπλέει;

Μαθηματικό μοντέλο/πρόβλημα:

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \cdot 10^{-4} = 0$$

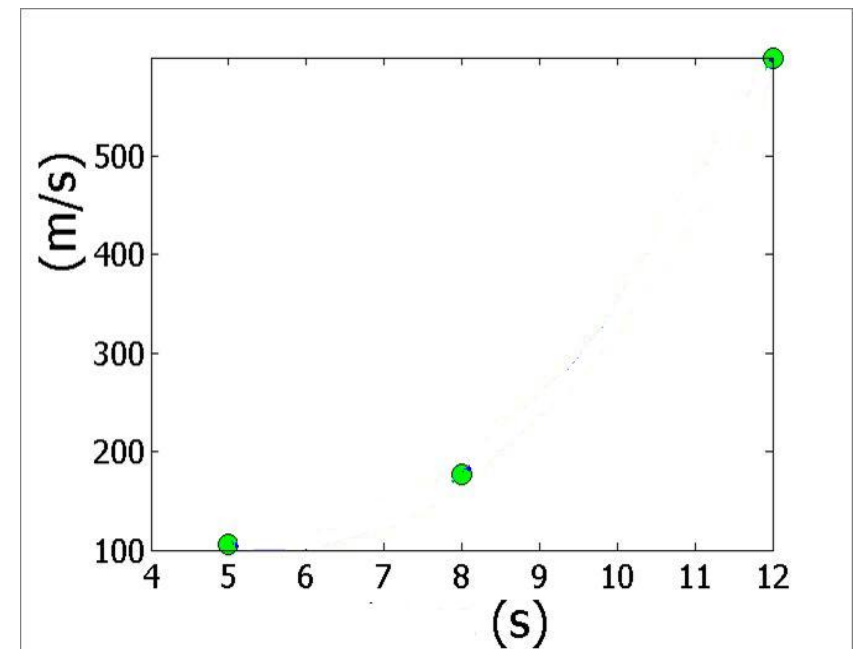


Πώς θα υπολογίσουμε τη σωστή ρίζα x ;

Παρεμβολή σε δεδομένα (data)

Ποιά η ταχύτητα, v , ενός πυραύλου σε $t = 7s$ όταν οι **μετρήσεις** δίνουν:

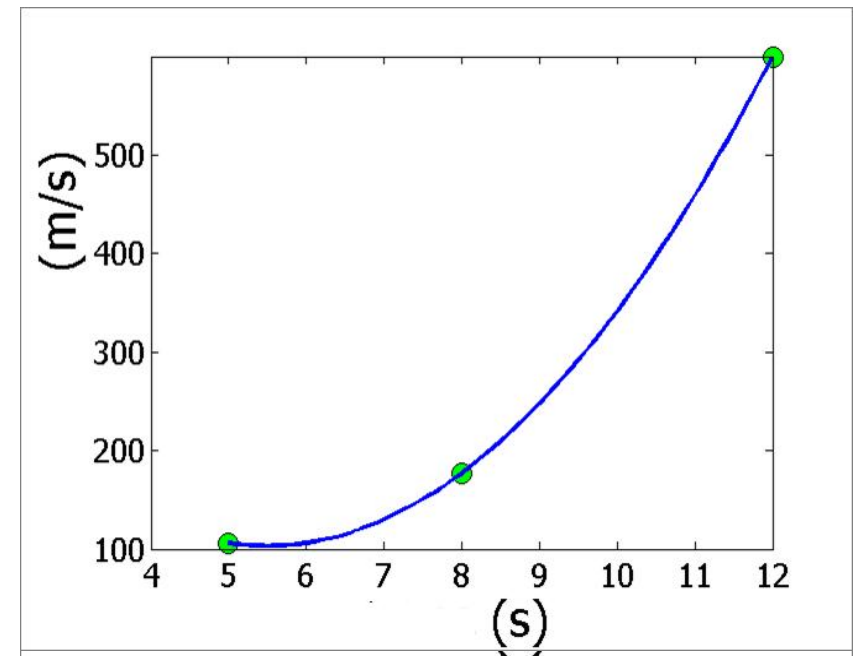
Χρόνος (s)	5	8	12
Ταχ. (m/s)	106	177	600



Παρεμβολή σε δεδομένα (data)

Ποιά η ταχύτητα, v , ενός πυραύλου σε $t = 7s$ όταν οι **μετρήσεις** δίνουν:

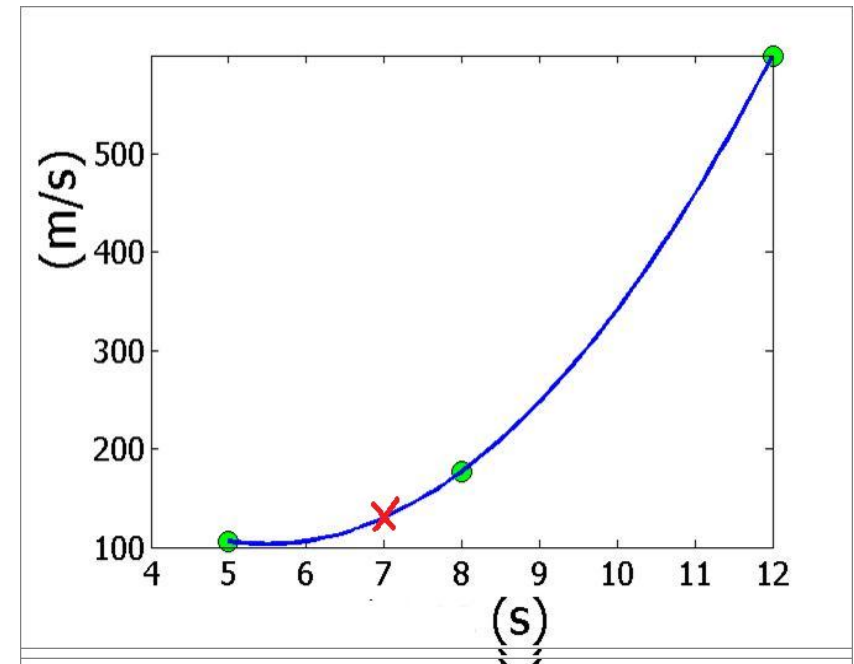
Χρόνος (s)	5	8	12
Ταχ. (m/s)	106	177	600



Παρεμβολή σε δεδομένα (data)

Ποιά η ταχύτητα, v , ενός πυραύλου σε $t = 7s$ όταν οι **μετρήσεις** δίνουν:

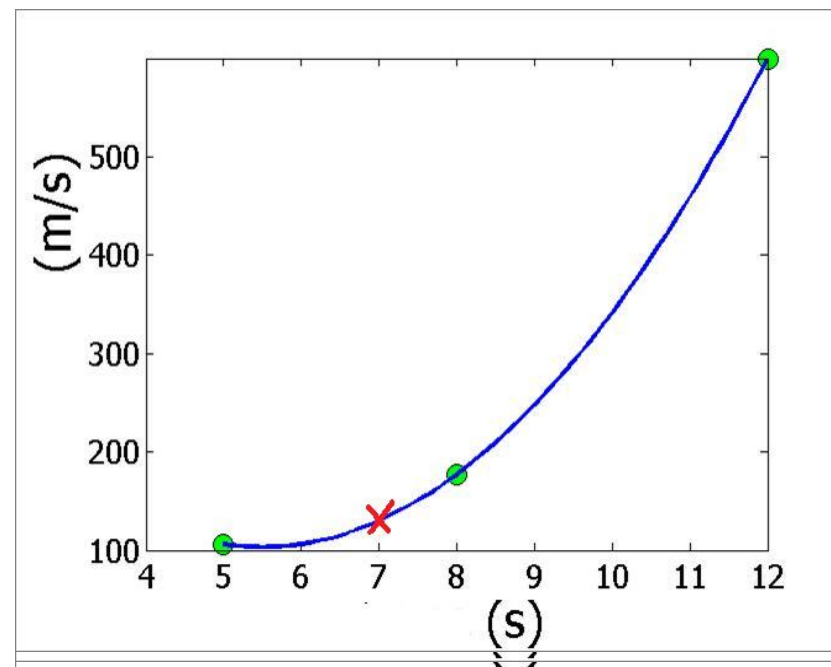
Χρόνος (s)	5	8	12
Ταχ. (m/s)	106	177	600



Παρεμβολή σε δεδομένα (data)

Ποιά η ταχύτητα, v , ενός πυραύλου σε $t = 7s$ όταν οι **μετρήσεις** δίνουν:

Χρόνος (s)	5	8	12
Ταχ. (m/s)	106	177	600



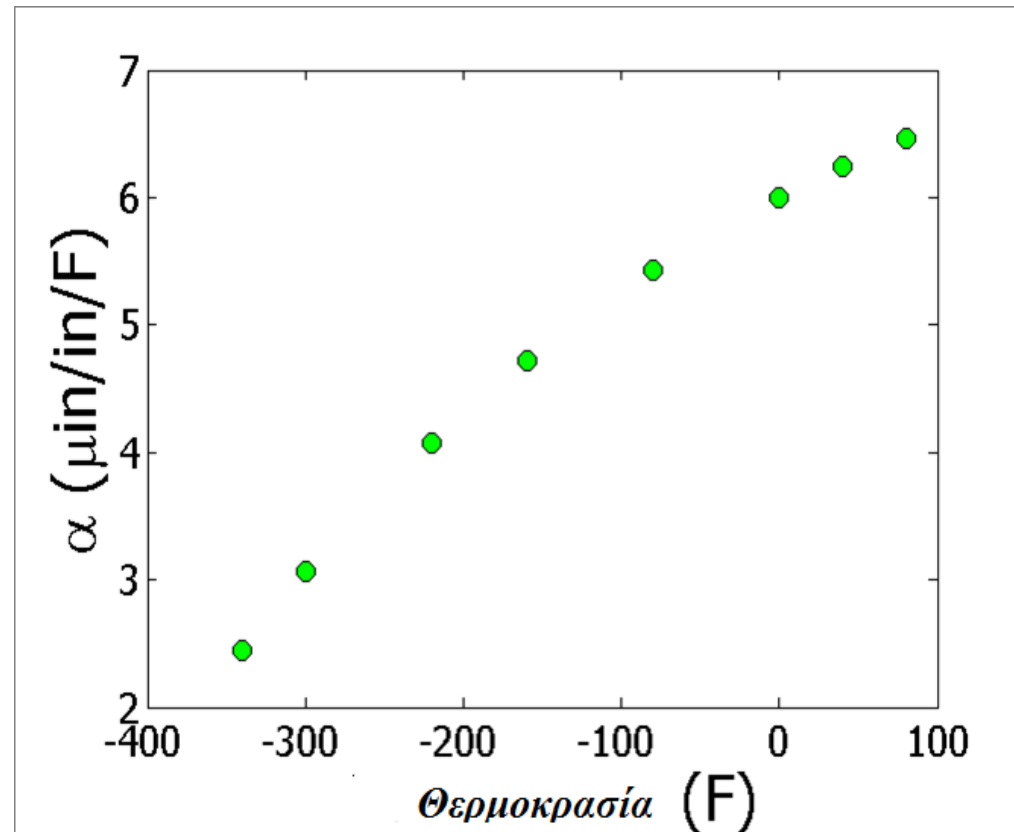
Πολυώνυμο Παρεμβολής:

$$v(t) = at^2 + bt + c$$

Πώς θα υπολογίσουμε τα a , b και c ;

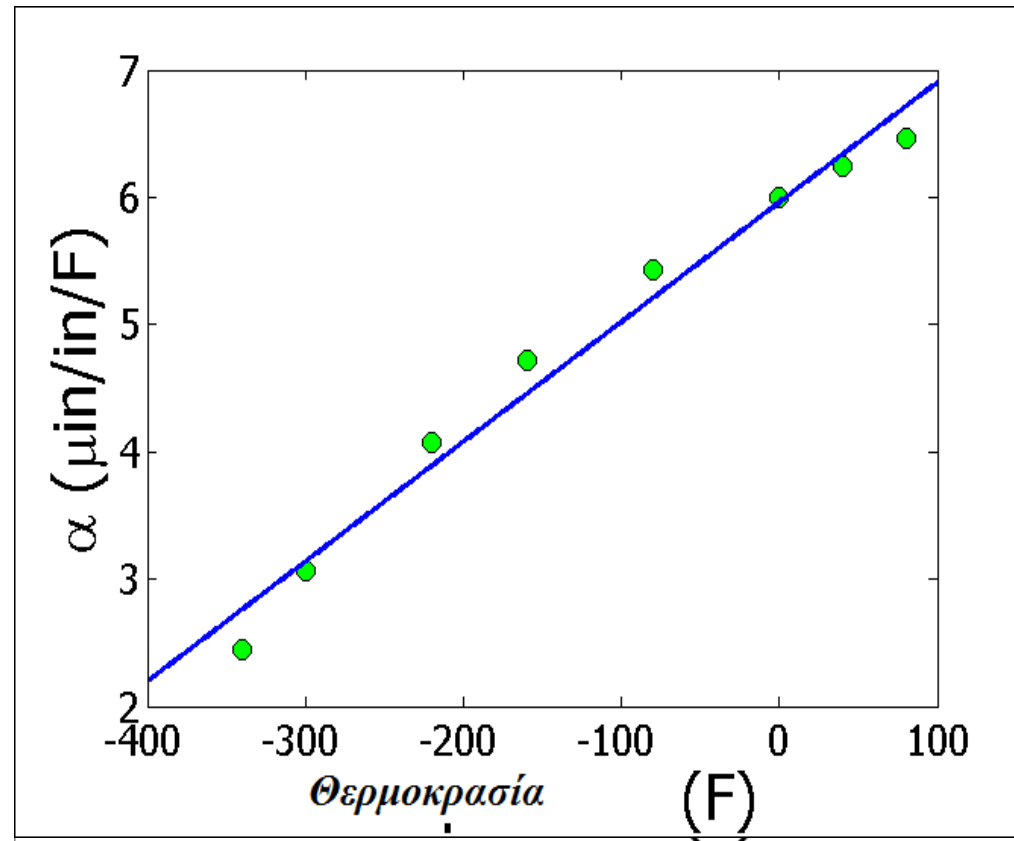
(Διακριτή) Προσέγγιση Ελαχίστων τετραγώνων

Συντελεστής θερμικής διαστολής/συστολής, α , χυτού χάλυβα όταν το βάλουμε σε ξηρό πάγο (από δεδομένα)



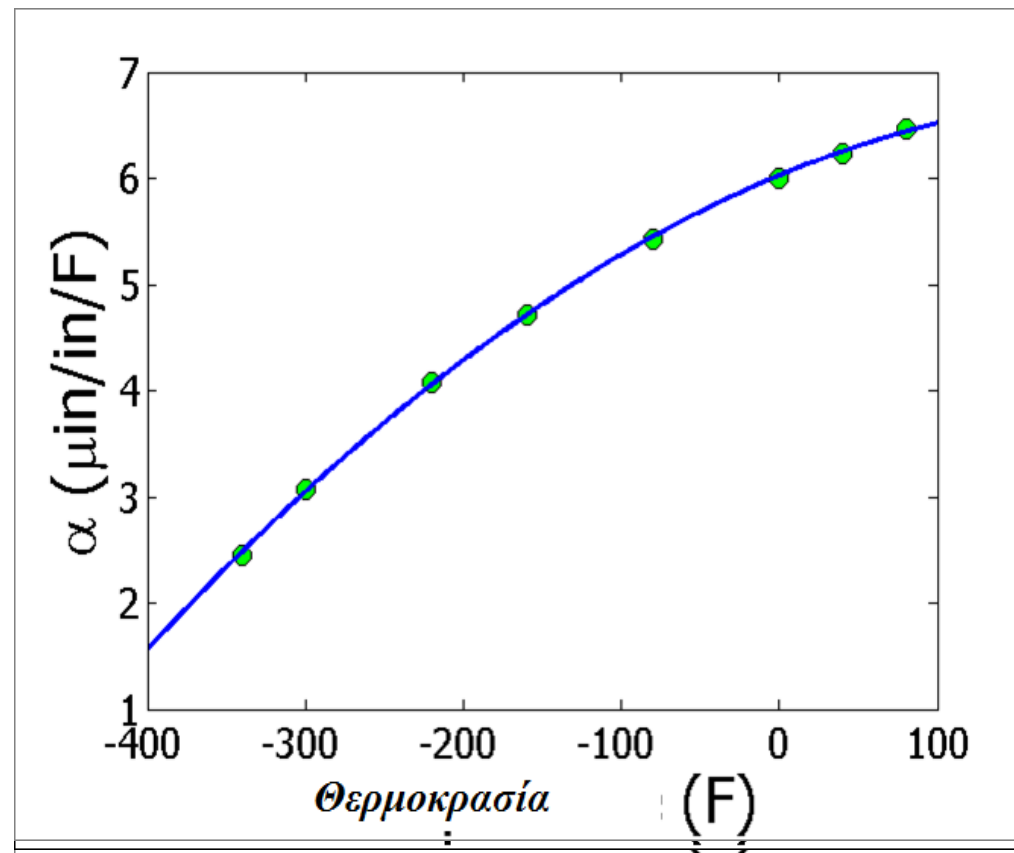
(Διακριτή) Προσέγγιση Ελαχίστων τετραγώνων

Συντελεστής θερμικής διαστολής/συστολής, α , χυτού χάλυβα όταν το βάλουμε σε ξηρό πάγο (από δεδομένα)



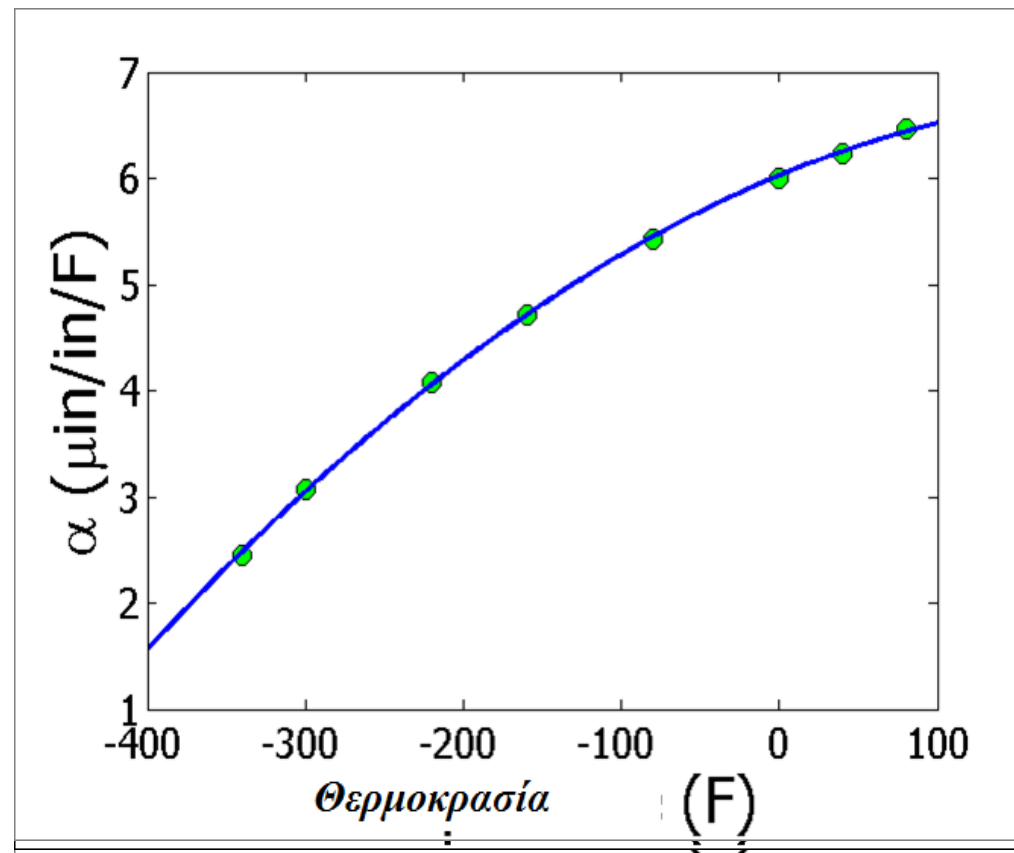
(Διακριτή) Προσέγγιση Ελαχίστων τετραγώνων

Συντελεστής θερμικής διαστολής/συστολής, α , χυτού χάλυβα όταν το βάλουμε σε ξηρό πάγο (από δεδομένα)



(Διακριτή) Προσέγγιση Ελαχίστων τετραγώνων

Συντελεστής θερμικής διαστολής/συστολής, α , χυτού χάλυβα όταν το βάλουμε σε ξηρό πάγο (από δεδομένα)

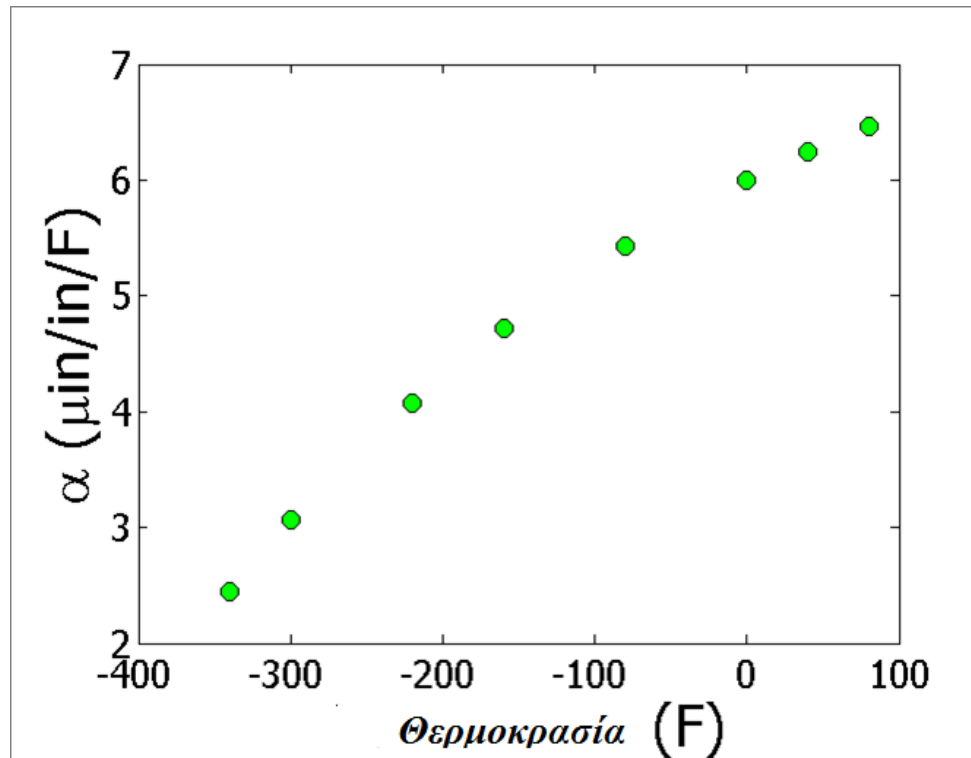


$$\alpha(T) = -1.2278 \times 10^{-5}T^2 + 6.1946 \times 10^{-3}T + 6.0150$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Εύρεση της διαμετρικής συστολής, ΔD , ενός ατσάλινου στελέχους όταν το βάλουμε σε ξηρό πάγο **πώς θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα από δεδομένα;**)

$$\Delta D = D \int_{T_{\pi\alpha\gamma}}^{T_{\delta\omega\mu}} \alpha(T) dT$$



Διαφορικές Εξισώσεις

Πώς αλλάζει (μειώνεται) η θερμοκρασία, $\theta(t)$, ενός ατσάλινου τηλεβόλου (σύνδεσμου) όταν το βάλουμε σε ξηρό πάγο;



Διαφορικές Εξισώσεις

Πώς αλλάζει (μειώνεται) η θερμοκρασία, $\theta(t)$, ενός ατσάλινου τηλεβόλου (σύνδεσμου) όταν το βάλουμε σε ξηρό πάγο;



$$mc\theta' = -h\alpha(\theta - \theta_{\pi\alpha\gamma}), \quad \theta(0) = \theta_{\delta\omega\mu}$$

Πόσος χρόνος χρειάζεται μέχρι να ψυχθεί ο ατσαλένιος σύνδεσμος;

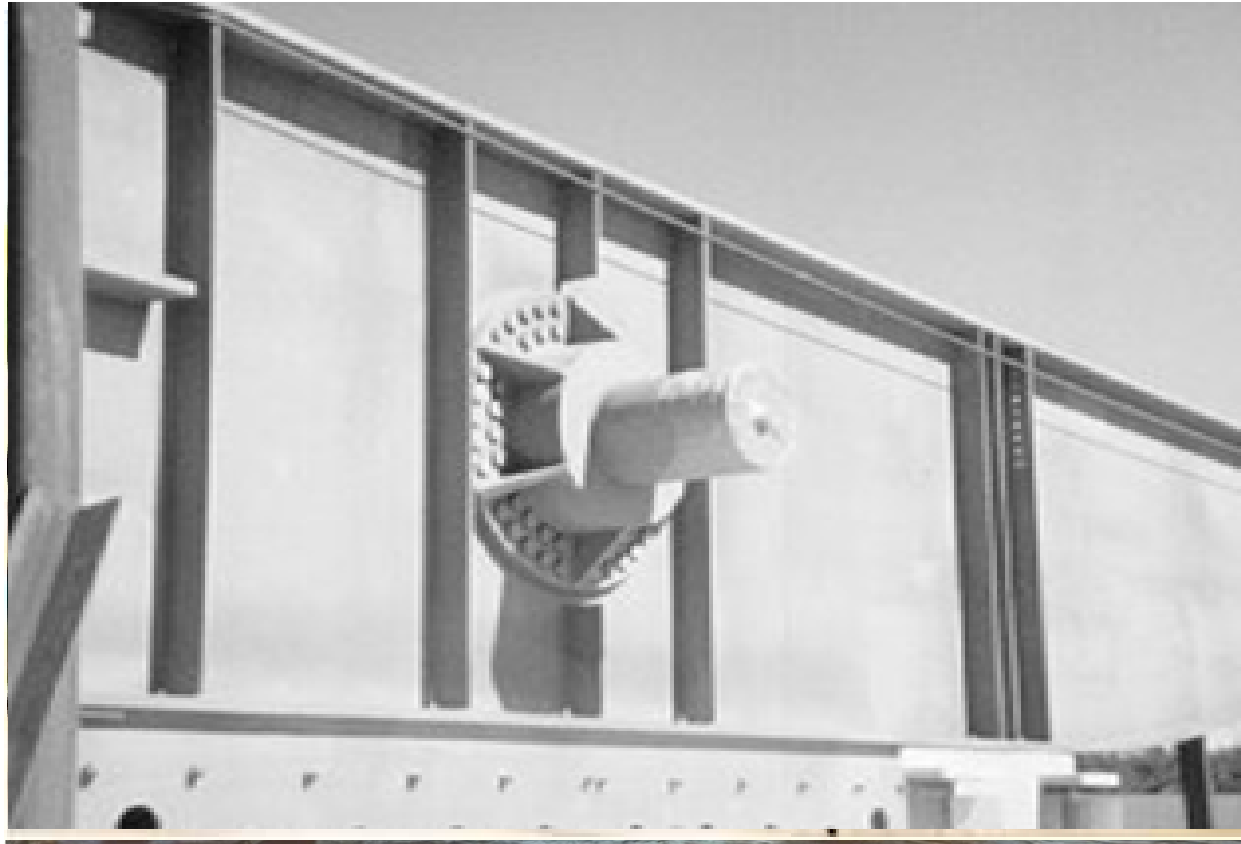
Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα



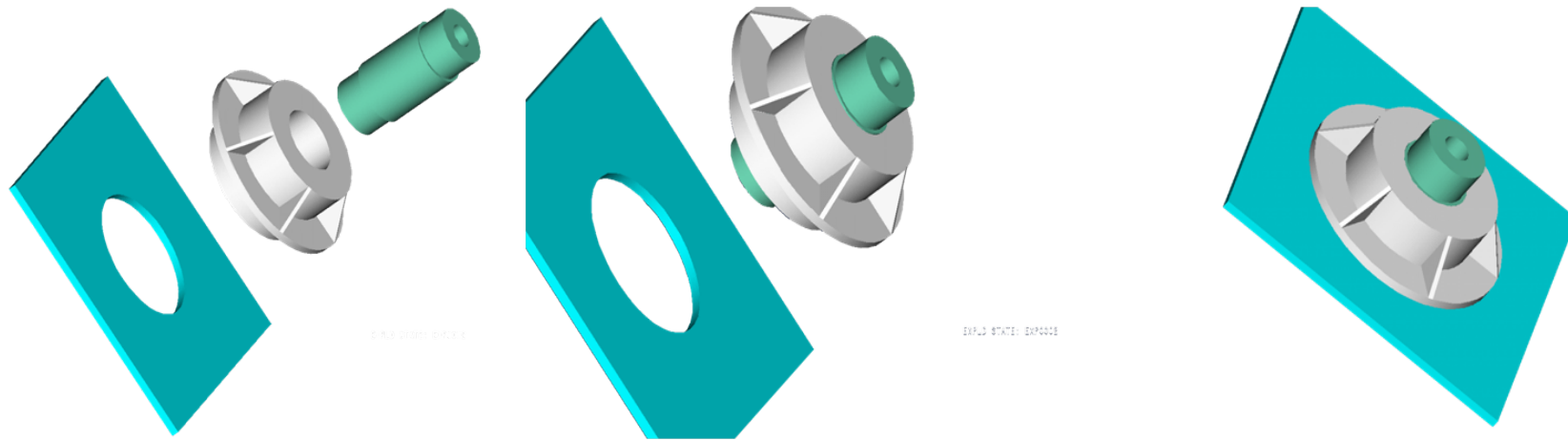
Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα



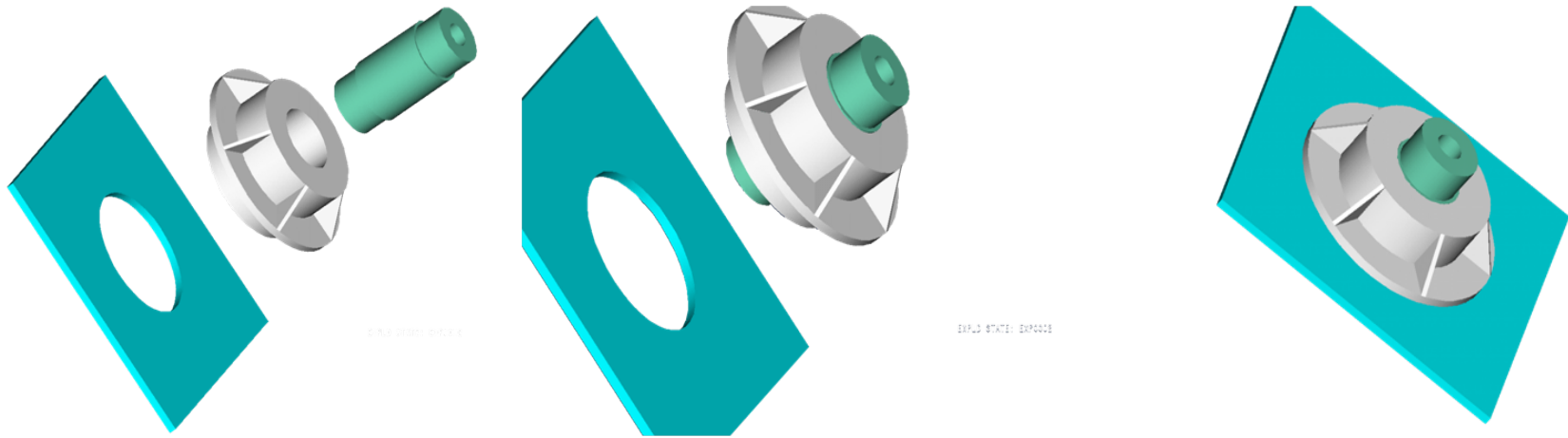
Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα



Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα



Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα



Πρόβλημα: μετά τη ψύξη του, σε ξηρό πάγο, ο σύνδεσμος "κόλλησε" στη βάση.



Ερώτημα: Είχε συσταλεί αρκετά κατά τη ψύξη; Διάμετρος πρέπει μικρύνει κατά -0.015 ίντσες, τουλάχιστον.

Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα

Ο σύμβουλος μηχανικός έκανε τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\Delta D = D \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$D = 12.363 \text{ (αρχική διάμετρος)}$$

$$\alpha = 6.47 \cdot 10^{-6} \text{ (συντελεστής στους } 80^{\circ}F, \text{ από τα δεδομένα)}$$

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{\circ}F$$

Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα

Ο σύμβουλος μηχανικός έκανε τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\Delta D = D \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$D = 12.363 \text{ (αρχική διάμετρος)}$$

$$\alpha = 6.47 \cdot 10^{-6} \text{ (συντελεστής στους } 80^{\circ}F, \text{ από τα δεδομένα)}$$

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{\circ}F$$

$$\Delta D = -0.01504 \text{ ιντσες}$$

Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα

Ο σύμβουλος μηχανικός έκανε τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\Delta D = D \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$D = 12.363 \text{ (αρχική διάμετρος)}$$

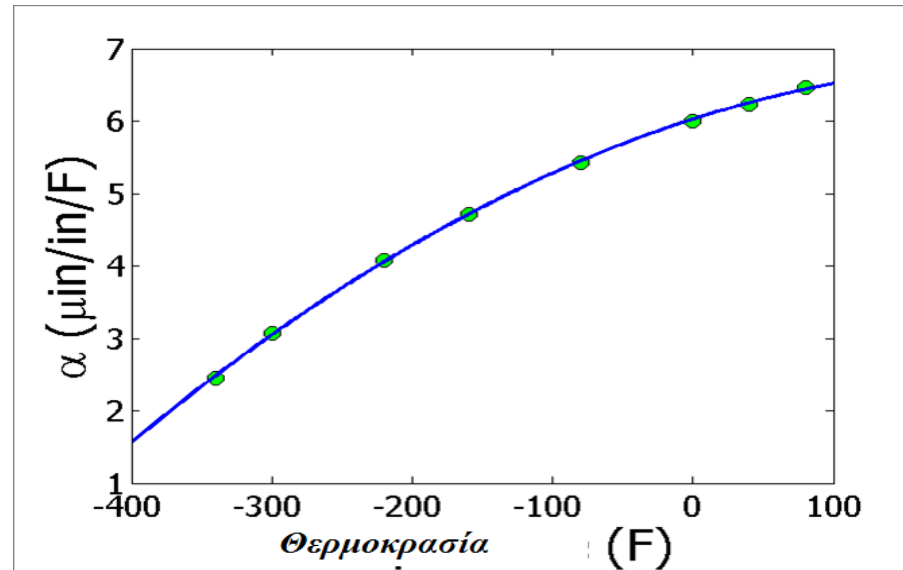
$$\alpha = 6.47 \cdot 10^{-6} \text{ (συντελεστής στους } 80^{\circ}F, \text{ από τα δεδομένα)}$$

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{\circ}F$$

$$\Delta D = -0.01504 \text{ ιντσες}$$

Είναι ο παραπάνω τύπος σωστός;

Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα

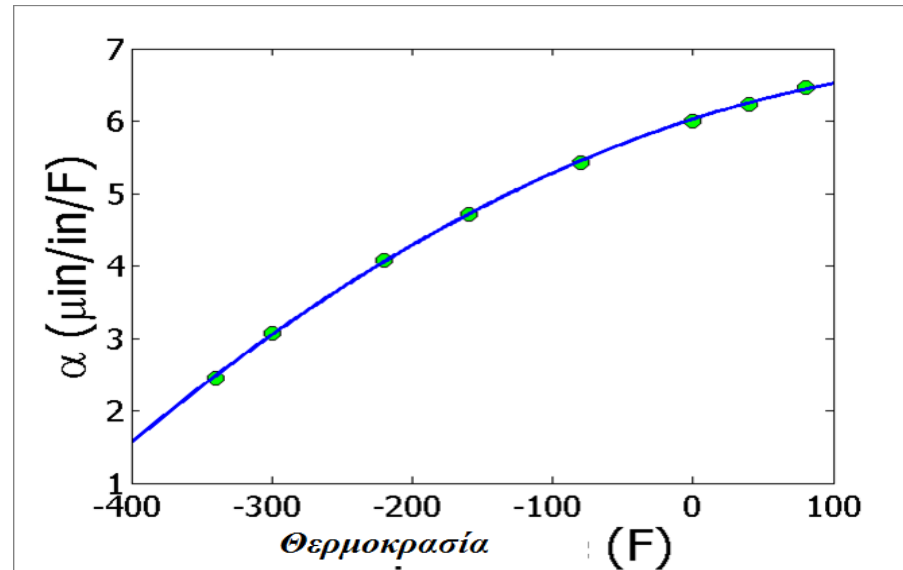


Το σωστό μοντέλο πρέπει να λάβει υπόψιν την μεταβολή του α με τη θερμοκρασία, T

$$\Delta D = D \int_{T_{\pi\alpha\gamma}}^{T_{\delta\omega\mu}} \alpha(T) dT$$

$$T_{\delta\omega\mu} = 80^{\circ}F \quad , T_{\pi\alpha\gamma} = -108^{\circ}F \quad , D = 12.363$$

Εφαρμογή σε πραγματικό πρόβλημα



Το σωστό μοντέλο πρέπει να λάβει υπόψιν την μεταβολή του α με τη θερμοκρασία, T

$$\Delta D = D \int_{T_{\pi\alpha\gamma}}^{T_{\delta\omega\mu}} \alpha(T) dT$$

$$T_{\delta\omega\mu} = 80^{\circ}F, T_{\pi\alpha\gamma} = -108^{\circ}F, D = 12.363$$

$$\Delta D = -0.0137 \text{ ιντσες}$$

Ακόμη μικρότερη διαστολή! Άρα η ψύξη με πάγο δεν ήταν η κατάλληλη.

Κεφάλαιο 1: Αριθμητική κινητής υποδιαστολής και σφάλματα στους υπολογισμούς

- Εισαγωγή-Πηγές σφαλμάτων-Μέτρηση
- Αριθμοί Μηχανής (κινητής υποδιαστολής)
- Ανάλυση σφάλματος των αριθμών κινητής υποδιαστολής

Κεφάλαιο 1: Αριθμητική κινητής υποδιαστολής και σφάλματα στους υπολογισμούς

- Εισαγωγή-Πηγές σφαλμάτων-Μέτρηση
 - Αριθμοί Μηχανής (κινητής υποδιαστολής)
 - Ανάλυση σφάλματος των αριθμών κινητής υποδιαστολής
-
- Στα περισσότερα προβλήματα (στη μηχανική) δεν μπορούμε να βρούμε τις πραγματικές-ακριβείς (αναλυτικές) λύσεις
 - Οι αριθμητικές μέθοδοι μας δίνουν **προσεγγιστικές** λύσεις, κοντά στις αναλυτικές

Κεφάλαιο 1: Αριθμητική κινητής υποδιαστολής και σφάλματα στους υπολογισμούς

- Εισαγωγή-Πηγές σφαλμάτων-Μέτρηση
- Αριθμοί Μηχανής (κινητής υποδιαστολής)
- Ανάλυση σφάλματος των αριθμών κινητής υποδιαστολής

- Στα περισσότερα προβλήματα (στη μηχανική) δεν μπορούμε να βρούμε τις πραγματικές-ακριβής (αναλυτικές) λύσεις
- Οι αριθμητικές μέθοδοι μας δίνουν **προσεγγιστικές** λύσεις, κοντά στις αναλυτικές

**Πόσο σφάλμα είναι παρών στους υπολογισμούς μας;
Πόσο ανεκτό είναι αυτό (ανοχή σφάλματος);**

Πηγές και Μέτρηση Σφαλμάτων

- Σφάλματα που προκύπτουν κατά το σχηματισμό του μαθηματικού μοντέλου
- Σφάλματα στα δεδομένα
- Σφάλματα αποκοπής ή/και στρογγύλευσης

Πηγές και Μέτρηση Σφαλμάτων

- Σφάλματα που προκύπτουν κατά το σχηματισμό του μαθηματικού μοντέλου
- Σφάλματα στα δεδομένα
- Σφάλματα αποκοπής ή/και στρογγύλευσης

Μέτρηση Σφαλμάτων

- **απόλυτο σφάλμα** (πραγματικό σφάλμα)
- **σχετικό σφάλμα**

Ορισμός: Αν $\tilde{x}$ είναι μία προσέγγιση του x (πραγματική τιμή), το **απόλυτο σφάλμα** είναι η ποσότητα

$$\epsilon_{\alpha} = |x - \tilde{x}|$$

και το **σχετικό σφάλμα** η ποσότητα

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Μέτρηση Σφαλμάτων

Τι γίνεται αν δεν ξέρουμε την πραγματική τιμή x ;

Μέτρηση Σφαλμάτων

Τι γίνεται αν δεν ξέρουμε την πραγματική τιμή x ;

Οι αριθμητικές μέθοδοι υλοποιούν (συνήθως) **επαναληπτικές διαδικασίες** για τον υπολογισμό μιάς προσέγγισης του x , δηλ. μια συγκλίνουσα ακολουθεία $x_n \rightarrow x$ για $n \rightarrow \infty$. Η x_{n+1} προσέγγιση υπολογίζεται με βάση την x_n . Τότε

$$\epsilon_\sigma = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|}$$

Επί τις εκατό (%) σφάλμα: $\epsilon_\sigma \times 100$

Πηγές Σφαλμάτων: Αριθμοί Μηχανής

- Ακέραιοι
- Πραγματικοί-Κινητή Υποδιαστολή
- Αριθμητική Πεπερασμένης Ακρίβειας

Πηγές Σφαλμάτων: Αριθμοί Μηχανής

- Ακέραιοι
- Πραγματικοί-Κινητή Υποδιαστολή
- Αριθμητική Πεπερασμένης Ακρίβειας

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ: Δεκαδικό σύστημα

$$(432.52)_{10} = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

Βάση (αρίθμησης) β : 10 Ψηφία : 0,1,2 ... 9

$$x = \pm (\overbrace{a_N a_{N-1} \cdots a_0}^{\text{ακέραιο μέρος}} \cdot \overbrace{a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}}^{\text{κλασματικό μέρος}})_{10} = \pm \sum_{k=-n}^N a_k \cdot 10^k$$

Ακέραιο μέρος:

$$P_N(\beta) = a_N \beta^N + \cdots + a_1 \beta + a_0$$

Κλασματικό μέρος:

$$Q_n(\beta) = a_{-n} \beta^{-n} + \cdots + a_{-1} \beta^{-1}.$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ: Γενίκευση

Βάση $\beta \geq 2$ Ψηφία : $0, 1, \dots, \beta - 1$

$$x_\beta = \pm (\overbrace{a_N a_{N-1} \cdots a_0}^{\text{ακέραιο μέρος}} \cdot \overbrace{a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}}^{\text{κλασματικό μέρος}})_\beta = \pm \sum_{k=-n}^N a_k \cdot \beta^k$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ: Γενίκευση

Βάση $\beta \geq 2$ Ψηφία : $0, 1, \dots, \beta - 1$

$$x_\beta = \pm (\overbrace{a_N a_{N-1} \cdots a_0}^{\text{ακέραιο μέρος}} \cdot \overbrace{a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}}^{\text{κλασματικό μέρος}})_\beta = \pm \sum_{k=-n}^N a_k \cdot \beta^k$$

Παράδειγμα: $\beta = 2 \rightarrow$ Δυαδικό

$$(101.11)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = (5.75)_{10}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ: Γενίκευση

Βάση $\beta \geq 2$ Ψηφία : $0, 1, \dots, \beta - 1$

$$x_\beta = \pm (\overbrace{a_N a_{N-1} \cdots a_0}^{\text{ακέραιο μέρος}} \cdot \overbrace{a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}}^{\text{κλασματικό μέρος}})_\beta = \pm \sum_{k=-n}^N a_k \cdot \beta^k$$

Παράδειγμα: $\beta = 2 \rightarrow$ Δυαδικό

$$(101.11)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = (5.75)_{10}$$

Παράδειγμα: $\beta = 8 \rightarrow$ Οκταδικό

$$(53473)_8 = 5 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (22331)_{10}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ: Γενίκευση

Βάση $\beta \geq 2$ Ψηφία : $0, 1, \dots, \beta - 1$

$$x_\beta = \pm (\overbrace{a_N a_{N-1} \cdots a_0}^{\text{ακέραιο μέρος}} \cdot \overbrace{a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}}^{\text{κλασματικό μέρος}})_\beta = \pm \sum_{k=-n}^N a_k \cdot \beta^k$$

Παράδειγμα: $\beta = 2 \rightarrow$ Δυαδικό

$$(101.11)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = (5.75)_{10}$$

Παράδειγμα: $\beta = 8 \rightarrow$ Οκταδικό

$$(53473)_8 = 5 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (22331)_{10}$$

Ένας ακέραιος σ' ένα σύστημα με βάση β_1 παραμένει ακέραιος αν εκφραστεί σε άλλο σύστημα με βάση β_2

Μετατροπή Αριθμών σε Συστήματα Διαφορετικών Βάσεων

Μετατροπή ακεραίου $(x)_\beta \rightarrow (x)_{10}$

$$\begin{aligned}(x)_{10} &= P_N(\beta) \\ &= a_N\beta^N + \cdots + a_1\beta + a_0 \\ &= a_0 + \beta(a_1 + \beta(a_2 + \beta(a_3 + \cdots + \beta(a_{N-1} + \beta a_N) \cdots)))\end{aligned}$$

Σχήμα Horner

$$(x)_{10} = a_N$$

για $i = N - 1, \dots, 0$

$$(x)_{10} = a_i + \beta \cdot (x)_{10} \quad \leftarrow \text{1flop (floating point operation)}$$

τέλος

Μετατροπή Αριθμών σε Συστήματα Διαφορετικών Βάσεων

Μετατροπή ακεραίου $(x)_\beta \rightarrow (x)_{10}$

$$\begin{aligned}(x)_{10} &= P_N(\beta) \\ &= a_N\beta^N + \cdots + a_1\beta + a_0 \\ &= a_0 + \beta(a_1 + \beta(a_2 + \beta(a_3 + \cdots + \beta(a_{N-1} + \beta a_N) \cdots)))\end{aligned}$$

Σχήμα Horner

$$(x)_{10} = a_N$$

για $i = N - 1, \dots, 0$

$$(x)_{10} = a_i + \beta \cdot (x)_{10} \quad \leftarrow \text{1flop (floating point operation)}$$

τέλος

Μετατροπή κλασματικού $(x)_\beta \rightarrow (x)_{10}$

$$(0.11)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = (0.75)_{10}$$

Μετατροπή ακεραίου $(x)_{10} \rightarrow (x)_{\beta}$ (αλγόριθμος της διαίρεσης)

$$(369)_{10} = (\dots a_3 a_2 a_1 a_0)_{\beta} = a_0 + \beta(a_1 + \beta(a_2 + \dots) \dots)$$

Παράδειγμα: $\beta = 8$

$$\frac{369}{8} \rightarrow \text{πηλίκo} = (46)_{10} \rightarrow a_0 = 1 \quad \text{υπόλοιπο}$$

$$\frac{46}{8} \rightarrow \text{πηλίκo} = (5)_{10} \rightarrow a_1 = 6 \quad \text{υπόλοιπο}$$

$$5 < 8 \rightarrow a_2 = 5$$

$$(369)_{10} = (561)_8$$

Μετατροπή κλασματικού $(x)_{10} \rightarrow (x)_{\beta}$

$$(x)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}a_{-3} \dots)_{\beta} = a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

$$\beta x = (a_{-1}.a_{-2}a_{-3} \dots)_{\beta} = a_{-1} + a_{-2}\beta^{-1} + \dots$$

$$\beta(.a_{-2}a_{-3} \dots)_{\beta} = a_{-2} + a_{-3}\beta^{-1} + \dots$$

Παράδειγμα: $(x)_{10} = (0.372)_{10} = (.a_{-1}a_{-2} \dots)_2$

Μετατροπή κλασματικού $(x)_{10} \rightarrow (x)_{\beta}$

$$(x)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

$$\beta x = (a_{-1}.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1} + a_{-2}\beta^{-1} + \dots$$

$$\beta(.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-2} + a_{-3}\beta^{-1} + \dots$$

Παράδειγμα: $(x)_{10} = (0.372)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}\dots)_2$

$$2x = 0.744 \quad \text{άρα} \quad a_{-1} = 0 \quad \text{και} \quad \gamma_1 = 0.744$$

Μετατροπή κλασματικού $(x)_{10} \rightarrow (x)_{\beta}$

$$(x)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

$$\beta x = (a_{-1}.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1} + a_{-2}\beta^{-1} + \dots$$

$$\beta(.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-2} + a_{-3}\beta^{-1} + \dots$$

Παράδειγμα: $(x)_{10} = (0.372)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}\dots)_2$

$$2x = 0.744 \quad \text{άρα} \quad a_{-1} = 0 \quad \text{και} \quad \gamma_1 = 0.744$$

$$2\gamma_1 = 1.488 \quad \text{άρα} \quad a_{-2} = 1 \quad \text{και} \quad \gamma_2 = 0.488$$

Μετατροπή κλασματικού $(x)_{10} \rightarrow (x)_{\beta}$

$$(x)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

$$\beta x = (a_{-1}.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1} + a_{-2}\beta^{-1} + \dots$$

$$\beta(.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-2} + a_{-3}\beta^{-1} + \dots$$

Παράδειγμα: $(x)_{10} = (0.372)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}\dots)_2$

$$2x = 0.744 \quad \text{άρα} \quad a_{-1} = 0 \quad \text{και} \quad \gamma_1 = 0.744$$

$$2\gamma_1 = 1.488 \quad \text{άρα} \quad a_{-2} = 1 \quad \text{και} \quad \gamma_2 = 0.488$$

$$2\gamma_2 = 0.976 \quad \text{άρα} \quad a_{-3} = 0 \quad \text{και} \quad \gamma_3 = 0.976$$

Μετατροπή κλασματικού $(x)_{10} \rightarrow (x)_{\beta}$

$$(x)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

$$\beta x = (a_{-1}.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-1} + a_{-2}\beta^{-1} + \dots$$

$$\beta(.a_{-2}a_{-3}\dots)_{\beta} = a_{-2} + a_{-3}\beta^{-1} + \dots$$

Παράδειγμα: $(x)_{10} = (0.372)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}\dots)_2$

$$2x = 0.744 \quad \text{άρα} \quad a_{-1} = 0 \quad \text{και} \quad \gamma_1 = 0.744$$

$$2\gamma_1 = 1.488 \quad \text{άρα} \quad a_{-2} = 1 \quad \text{και} \quad \gamma_2 = 0.488$$

$$2\gamma_2 = 0.976 \quad \text{άρα} \quad a_{-3} = 0 \quad \text{και} \quad \gamma_3 = 0.976$$

$$2\gamma_3 = 1.952 \quad \text{άρα} \quad a_{-4} = 1 \quad \text{και} \quad \gamma_4 = 0.952$$

$$\dots \dots (0.371)_{10} = (.01011\dots)_2$$

Αριθμοί Μηχανής- Αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Κάθε πραγματικός $x \neq 0$ μπορεί να παρασταθεί σε οποιαδήποτε βάση ως

$$x = \pm(0.d_1d_2d_3 \dots) \cdot \beta^e, \quad d_1 \neq 0$$

όπου

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1, \quad i = 2, 3, \dots$$

Αριθμοί Μηχανής- Αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Κάθε πραγματικός $x \neq 0$ μπορεί να παρασταθεί σε οποιαδήποτε βάση ως

$$x = \pm(0.d_1d_2d_3\dots) \cdot \beta^e, \quad d_1 \neq 0$$

όπου

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1, \quad i = 2, 3, \dots$$

Παράδειγμα:

$$-(0.00598)_{10} = -0.598 \cdot 10^{-2}$$

$$(111.001)_2 = 0.111001 \cdot 2^3$$

Αριθμοί Μηχανής- Αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Κάθε πραγματικός $x \neq 0$ μπορεί να παρασταθεί σε οποιαδήποτε βάση ως

$$x = \pm(0.d_1d_2d_3 \dots) \cdot \beta^e, \quad d_1 \neq 0$$

όπου

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1, \quad i = 2, 3, \dots$$

Παράδειγμα:

$$-(0.00598)_{10} = -0.598 \cdot 10^{-2}$$

$$(111.001)_2 = 0.111001 \cdot 2^3$$

Ο υπολογιστής, λόγω **πεπερασμένης μνήμης**, προσεγγίζει έναν πραγματικό αριθμό με κάποιον από τους λεγόμενους **αριθμούς μηχανής**.

Αριθμοί Μηχανής- Αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Κάθε πραγματικός $x \neq 0$ μπορεί να παρασταθεί σε οποιαδήποτε βάση ως

$$x = \pm(0.d_1d_2d_3 \dots) \cdot \beta^e, \quad d_1 \neq 0$$

όπου

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1, \quad i = 2, 3, \dots$$

Παράδειγμα:

$$-(0.00598)_{10} = -0.598 \cdot 10^{-2}$$

$$(111.001)_2 = 0.111001 \cdot 2^3$$

Ο υπολογιστής, λόγω **πεπερασμένης μνήμης**, προσεγγίζει έναν πραγματικό αριθμό με κάποιον από τους λεγόμενους **αριθμούς μηχανής**.

Οι αριθμοί μηχανής αποτελούν ένα μικρό και πεπερασμένο υποσύνολο των πραγματικών.