

Όνοματεπώνυμο :

Αριθμός Μητρώου :

Εξάμηνο :

Σχολή: Μ.Π.Δ.

Οδηγίες

- Συμπληρώσατε, **αμέσως**, τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο.
- Επιτρέπεται μόνο η χρήση υπολογιστή τσέπης.
Παραβίαση του κανόνα αυτού συνεπάγεται σοβαρές συνέπειες πέρα από το μηδενισμό στο μάθημα.
- Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά **όλη** η δουλειά σας. Η **ακρίβεια** των αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.
Σωστές απαντήσεις που δεν δικαιολογούνται από την δουλειά σας δεν θα βαθμολογηθούν.
- Δεν εγκαταλείπετε την θέση σας για κανένα λόγο χωρίς να επικοινωνήσετε πρώτα με επιτηρητή της εξέτασης.
- Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι **2 ώρες και 45 λεπτά**.
- Αποχώρηση από την εξέταση επιτρέπεται μετά από 40 λεπτά.

Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά ψηφία στους υπολογισμούς σας.

Σε όλες τις περιπτώσεις παραδίδετε το φυλλάδιο εξέτασης με συμπληρωμένα στοιχεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Θέμα 1

(α)[6] Έστω υπολογιστής όπου το σύνολο αριθμών μηχανής του ορίζεται ως $M(\beta = 2, t = 10, L = -6, U = 6)$ και ο αριθμός $x = (20.1)_{10}$. Ποιός είναι ο αριθμός μηχανής (κινητής υποδιαστολής) στο δοσμένο υπολογιστή;

(β)[6] Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $E(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)}$ για $x = 10^{-8}$. Δείξτε ότι για τον υπολογισμό του $E(10^{-8})$ σε έναν υπολογιστή αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλο σφάλμα και εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό. Προτείνετε έναν καλύτερο τρόπο υπολογισμού του $E(x)$ και υπολογίστε το $E(10^{-8})$.

Θέμα 2

(α)[15] Για τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - e^x$, να προσεγγιστεί η μικρότερη πραγματική ρίζα της με τη μέθοδο **Newton-Raphson** με ανοχή σφάλματος μικρότερη του $5 \cdot 10^{-3}$, καθορίζοντας αρχικά ένα διάστημα που περιέχει τη ρίζα αυτή με τη βοήθεια γραφικής παράστασης και εφαρμογή σε αυτό 2 βημάτων της μεθόδου της **διχοτόμησης** για τον υπολογισμό της αρχικής τιμής για τη μέθοδο Newton-Raphson.

(β)[6] Έστω $0 \leq x_0 \leq 1$. Αποδείξτε αν η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n}), n = 0, 1, 2, \dots$, συγκλίνει ή όχι στο $[0, 1]$.

Θέμα 3

(α)[12] Για τα δεδομένα $(x_i, y_i) : (0, 2), (1, 1), (2, 0)$ και $(3, -1)$, υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής (i) με χρήση των πολυωνύμων Lagrange και (ii) στη μορφή Newton με χρήση διαιρεμένων διαφορών. Υπολογίστε το σφάλμα της παρεμβολής στα δεδομένα αυτά.

(β) [6] Δίνεται η παρακάτω clamped κυβική spline $S(x)$ στο διάστημα $[0, 3]$,

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = -1 + \alpha x - \frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{9}x^3, & x \in [0, 1] \\ s_1(x) = \frac{14}{9}(x-1) + \frac{10}{9}(x-1)^2 - \frac{2}{3}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ s_2(x) = 2 + \frac{16}{9}(x-2) + \beta(x-2)^2 - \frac{1}{9}(x-2)^3, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Υπολογίστε τα α και β και τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί η $S(x)$.

(γ)[14] Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν την ποσότητα, c , ενός φαρμάκου στο αίμα ενός ασθενούς ανά ώρα

t	1	2	3	4	5	6	7	8
c	8.0	12.3	15.5	16.8	17.1	15.8	15.2	14.0

Προσαρμόστε το μοντέλο $c(t) = \kappa t e^{\lambda t}$ στα παραπάνω δεδομένα, υπολογίζοντας τα κ και λ .

Θέμα 4

(α)[12] Υπολογίστε το πλήθος των κόμβων που χρειάζονται για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(f) = \int_1^2 x \ln(x) dx$ με ακρίβεια 10^{-4} χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 και για τα σημεία (κόμβους) που βρήκατε προσεγγίστε το ολοκλήρωμα. (Δίνεται ότι ο τύπος του σφάλματος για το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 είναι $R_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$.)

(β) [12] Θεωρείστε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, 1]$ ο οποίος παράγεται ως εξής: $\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 P(x) dx$, όπου $P(x)$ το γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλλει την $f(x)$ στο $x_0 = 0$ και $x_1 = 3/4$. Υπολογίστε αυτόν το κανόνα στη συνήθη μορφή, $Q_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$, και μετασχηματίστε τον για να κατασκευάσετε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x) dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$.

Θέμα 5

Έστω η μέθοδος του Τραπεζίου: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})]$ για προβλήματα αρχικών τιμών.

(α) [5] Αποδείξτε ότι η μέθοδος του Τραπεζίου είναι Α-ευσταθής.

(β) [6] Για το Π.Α.Τ. $y' = -20y, y(0) = 1$, εφαρμόστε τη μέθοδος του Τραπεζίου με $h = 1$ για να προσεγγίσετε το $y(5)$ και εξηγήστε γιατί η προσέγγισή ταλαντώνεται. Για ποιές τιμές του h μπορούμε να πάρουμε ομαλή προσέγγιση;

Απαντήσεις Θεμάτων

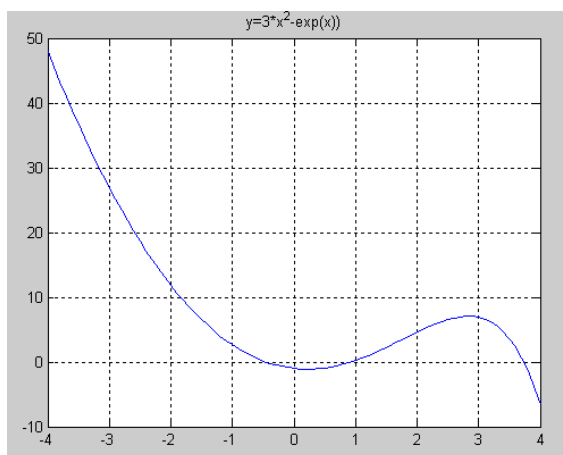
Θέμα 1

(α) Στο δοσμένο υπολογιστή, πρέπει να μετατραπεί ο αριθμός x σε βάση 2 από το δεκαδικό. Άρα, για τον $x = 20.1$ μετατρέπουμε πρώτα το ακέραιο μέρος και έχουμε (με βάση τον αλγόριθμο της διαίρεσης) $(20)_{10} = (10100)_2$. Για το $(0.1)_{10} = 0.000100110011 \dots$ (δεν παριστάνεται ακριβώς). Άρα $fl(x) = (0.1010000010 \cdot 2^5)_2 (= 20.0625)_{10}$.

(β) Ο υπολογισμός για το $E(10^{-8})$ με βάση τον τύπο που δίνεται δίνει $E(10^{-8}) = 0$ γιατί υπολογίζεται το $1 - \cos(x) = 0$ αν και το $x \neq 0$ (αφαίρεση σχεδόν ίδιων αριθμών/καταστροφική ακύρωση). Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρανομαστή με την ποσότητα $1 + \cos(x)$ παίρνουμε ένα ισοδύναμο (μαθηματικά) τρόπο υπολογισμού $E(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$ που δίνει $E(10^{-8}) = 0.50$

Θέμα 2

(α) Για τον εντοπισμό των ριζών μπορούμε να δούμε ότι αυτές βρίσκονται π.χ. στο διάστημα $[1, 4]$ ($f(1) \cdot f(4) < 0$). Με βάση την μονοτονία και τα ακρότατα της f οι ρίζες της ανήκουν στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και $[3, 4]$.



Για την μικρότερη ρίζα εφαρμόζουμε αρχικά τη διχοτόμηση στο διάστημα $[-1, 0]$, και έχουμε

$$\begin{aligned}x_1 &= -0.50, & f(-0.5) &= 0.1435 > 0, & \text{και } f(-0.5) \cdot f(0) &= -0.1435 < 0, \\x_2 &= (-0.5 + 0)/2 = -0.25\end{aligned}$$

Για την μέθοδο Newton-Raphson έχουμε, με $x_0 = -0.25$,

$$\begin{aligned}x_1 &= -0.5095, & |x_1 - x_0| &= 0.2595 \\x_2 &= -0.4608, & |x_2 - x_1| &= 0.0487 \\x_3 &= -0.4590, & |x_3 - x_2| &= 0.0018 = 1.8 \cdot 10^{-3} < 5 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Σωστή είναι η εφαρμογή της διχοτόμησης και σε άλλα διαστήματα, π.χ. $[-2, 0]$ ή $[-0.5, 0]$ όπου ισχύει το Θ . Bolzano.

(β) Με $\phi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x)$, $x \in [0, 1]$, έχουμε $\phi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x) \leq 0$ για $x \in [0, 1]$ άρα, $\phi(x)$ φθίνουσα και $\phi([0, 1]) = [\phi(0), \phi(1)] = [\frac{3-e}{3}, \frac{1}{3}] \approx [0.09, 0.33] \subset [0, 1]$.

Ακόμα $|\phi'(x)| = |\frac{1}{3}(1 - e^x)| = \frac{e^x - 1}{3} \leq \frac{e-1}{3} = L < 1$, για $x \in [0, 1]$. Συνεπώς, έχουμε εξασφαλισμένη σύγκλιση της ακολουθίας στο $x \in [0, 1]$ εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ . Συστολής.

Θέμα 3

(α) Στη μορφή Lagrange έχουμε

$$P(x) = 2 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 1 \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} - 1 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \dots = 2 - x$$

Στη μορφή Newton έχουμε τις Δ.Δ.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & & \\ & & -1 & \\ 1 & 1 & & 0 \\ & & -1 & 0 \\ 2 & 0 & & 0 \\ & & -1 & \\ 3 & -1 & & \end{array}$$

Άρα $P(x) = 2 + (-1)(x - 0) = 2 - x$. Η παρεμβολή περιγράφει ακριβώς τα δεδομένα που ανήκουν σε ένα πρώτου βαθμού πολυώνυμο, συνεπώς το σφάλμα είναι 0.

(β) Το α μπορεί να υπολογιστεί από τη συνθήκη $s'_0(1) = s'_1(1)$ δηλ. $\alpha - \frac{10}{9}1 + \frac{5}{3}1^2 = \frac{14}{9}$ που δίνει $\alpha = 1$. Το β από τη συνθήκη $s''_1(2) = s''_2(2)$ δηλ. $\frac{20}{9} - 4 = 2\beta$ άρα $\beta = -8/9$. Οι συνοριακές συνθήκες για clamped κυβική spline είναι $s'_0(0) = \alpha = 1$ και $s'_2(3) = \frac{16}{9} + 2(-\frac{8}{9}) - \frac{1}{3} = -1/3$.

(γ) Με τη μέθοδο **ελαχίστων τετραγώνων** γραμμικοποιούμε

$$\ln\left(\frac{c}{t}\right) = \ln(\kappa) + \lambda t \Rightarrow Y = A + Bt$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	t_i	$Y_i = \ln(c_i/t_i)$	t_i^2	$t_i Y_i$
1	1	2.0794	1	
2	2	1.8164	4	
3	3	1.6411	9	
4	4	1.4351	16	
5	5	1.2296	25	
6	6	0.6983	36	
7	7	0.7755	49	
8	8	0.5596	64	
$\Sigma =$	36	10.50	204	38.242

Λύνοντας τις κανονικές εξισώσεις έχουμε

$$\begin{bmatrix} 204 & 36 \\ 36 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.242 \\ 10.50 \end{bmatrix}$$

$$A \approx 2.28 \Rightarrow \kappa = e^{2.28} \approx 9.77 \text{ και } B = \lambda \approx -0.215.$$

Θέμα 4

(α) Θέλουμε $|R_S| = \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right|_{\infty} = \max_{x \in [1,2]} \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right| < 10^{-4}$, όπου $f^{(4)}(x) = 2/x^3$ (τέταρτη παράγωγος της $f(x) = x \ln(x)$) και $\max_{x \in [1,2]} |2/x^3| = 2$, συνεπώς

$$\frac{1}{180} \cdot h^4 \cdot 2 < 10^{-4} \Rightarrow h^4 < \frac{180 \cdot 10^{-4}}{2} \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} < 0.308 \Rightarrow n > 3.2466$$

Άρα θέλουμε $n = 4$ υποδιαστήματα (ακέραιος και άρτιος αριθμός) στο $[1, 2]$ άρα 5 σημεία (κόμβους) για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο (με $h = (2 - 1)/4 = 0.25$).

Οι κόμβοι είναι $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75$ και $x_4 = 2$, άρα ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 μας δίνει

$$I(f) \approx \frac{h}{3} [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)] = \dots = 0.636309.$$

(β) Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $P(x) = f(0) + \frac{f(3/4) - f(0)}{3/4 - 0}x = f(0)(1 - \frac{4}{3}x) + \frac{4}{3}f(3/4)x$ (μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους). Βρίσκουμε τον κανόνα ολοκλήρωσης (ολοκληρώνοντας το $P(x)$) ως

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(3/4)$$

άρα $w_0 = 1/3, w_1 = 2/3, x_0 = 0, x_1 = 3/4$. (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 14, σελ 3-4 & 13)

Για να κατασκευάσουμε τον απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x)dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$, χρειαζόμαστε την αλλαγή μεταβλητής (όπως στους τύπους Gauss ΔΙΑΛΕΞΗ 16 σελ. 2) από το $[0, 1]$ στο $[a, b]$. Άρα, αν $t \in [0, 1]$ και $x \in [a, b]$ από $x = mt + c$ (γραμμικός μετασχηματισμός από το ένα διάστημα στο άλλο, για $t = 0$ το $x = a$ και για $t = 1$ το $x = b$) έχουμε $m = b - a, c = a$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= (b-a) \int_0^1 f((b-a)t + a)dt \approx (b-a) \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{3}{4}(b-a) + a\right) \right) \\ &\approx (b-a) \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right) \right) \end{aligned}$$

Θέμα 5

(α) Εφαρμόζοντας τη δοσμένη μέθοδο στο Π.Α.Τ. (δοκιμής) $y' = \lambda y, \lambda < 0, y(0) = 1$ έχουμε (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 15-16 και σελ. 24)

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\lambda h}{2} [y^n + y^{n+1}] \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2} y^n = \left(\frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2} \right)^n y_0, \text{ που δίνει ευσταθή μέθοδο, δηλ. } y^n \rightarrow 0, \text{ αν}$$

$$\left| \frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2} \right| < 1 \Rightarrow |1 + \lambda h/2| < 1 - \lambda h/2 \text{ εφόσον } \lambda h < 0 \text{ και ισχύει για κάθε επιλογή του βήματος } h.$$

(β) Η μέθοδος δίνει για $\lambda = -20$ και $h = 1$

$$y^{n+1} = \frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2} y^n = \frac{1 - 10}{1 + 10} y^n = -\frac{9}{11} y^n \text{ άρα, λόγω του } -9/11 \text{ σε κάθε βήμα αλλάζει το πρόσημο της προσεγγίσης.}$$

Για να έχουμε ομαλή προσέγγιση πρέπει η επιλογή του βήματος h να γίνει ώστε

$$\frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2} = \frac{1 - 10h}{1 + 10h} > 0 \Rightarrow 1 - 10h > 0 \Rightarrow h < 1/10.$$