ΜΑΘ 202 **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

Τελική Εξέταση **9/2018**

Ονοματεπώνυμο	:	....
Αριθμός Μητρώου	:	....
Εξάμηνο	:	....

Σχολή: Μ.Π.Δ.

Οδηγίες

- *Συμπληρώσατε,* **αμέσως**, *τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο.*
- *Επιτρέπεται μόνο η χρήση υπολογιστή τσέπης.*
  Παραβίαση του κανόνα αυτού συνεπάγεται σοβαρές συνέπειες πέρα από το μηδενισμό στο μάθημα.
- *Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά* **όλη** *η δουλειά σας. Η* **ακρίβεια** *των αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.*
  Σωστές απαντήσεις που δεν δικαιολογούνται από την δουλειά σας δεν θα βαθμολογηθούν.
- *Δεν εγκαταλείπετε την θέση σας για κανένα λόγο χωρίς να επικοινωνήσετε πρώτα με επιτηρητή της εξέτασης.*
- *Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι* **2** *ώρες και* **45** *λεπτά.*
- *Αποχώρηση από την εξέταση επιτρέπεται μετά από 40 λεπτά.*
- *Σύνολο μονάδων στο διαγώνισμα 108, άριστα το 100*

Χρησιμοποιήστε 4 δεκαδικά ψηφεία στους υπολογισμού σας.

Σε όλες τις περιπτώσεις παραδίδετε το φυλλάδιο εξέτασης με συμπληρωμένα στοιχεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Θέμα 1

(α)[4] Υπολογίστε το αποτέλεσμα της πράξης $\dfrac{1.47 + 0.0291}{2.62} - 0.572$ που θα δώσει ένας υπολογιστής που χρησιμοποιεί ακρίβεια 3 δεκαδικών ($t = 3$) στην παράσταση κινητής υποδιαστολής του. Συγκρίνετε με την πραγματική τιμή και εξηγείστε τι συμβαίνει.
(β)[6] Σε έναν υπολογιστή με σύνολο αριθμών μηχανής $M(\beta, t, L, U) = M(2, 12, -62, 63)$ υπολογίστε το μέγιστο θετικό αριθμό που μπορεί να παραστήσει ο συγκεκριμένος υπολογιστής, (i) στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης και (ii) προσεγγιστικά στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = e^x$ οι οποίες έχουν 2 κοινά σημεία το $x_1^\star \in [1, 3]$ και $x_2^\star \in [4, 5]$.
(α)[8+4] Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson για να προσεγγίσετε το κοινό σημείο $x_1^\star$ με ανοχή σφάλματος 10^{-4} δίνοντας σαν αρχική τιμή $x_0 = 1.5$. Τί είδους σύγκλιση έχετε και γιατί; Πόσα βήματα θα χρειαζόσασταν με την μέθοδο της *διχοτόμησης* για να πετύχετε την ίδια ακρίβεια;
(β)[12] Για τη προσέγγιση του κοινού σημείου $x_2^\star$ κατασκευάστε **2** μεθόδους *σταθερού σημείου* $x_{n+1} = \phi_i(x_n), i = 1, 2$ και δείξτε αν κάποια από αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σιγουριά για την προσέγγιση του $x_2^\star$ στο $[4, 5]$.

(γ)[14] Έστω το *μη-γραμμικό σύστημα* εξισώσεων $\begin{cases} x_1^3 + x_2 - 1 = 0 \\ x_2^3 - x_1 + 1 = 0. \end{cases}$ Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson με αρχική προσέγγιση της λύσης $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] = [0, 0]$ να υπολογιστούν οι **2** επόμενες προσεγγίσεις.

Θέμα 3

Για το σύνολο δεδομένων

t_i	0	1	1.5	2
y_i	1	3	5.5	9

υπολογίστε
(α)[8] το *πολυώνυμο παρεμβολής*, $P(t)$, στη μορφή Lagrange (κάνοντας μέχρι τέλος τις πράξεις) και σχολιάστε το αποτέλεσμά σας,
(β)[12] το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $p_2(t)$ με τη *μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων* που προσεγγίζει καλύτερα τα δεδομένα (να φανεί αναλυτικά η διαδικασία και το αποτέλεσμά σας).

Θέμα 4

Είναι γνωστό ότι ο **όγκος** $\mathcal{V}$ και το **εμβαδόν επιφανείας** $\mathcal{S}$ ενός *στερεού εκ περιστροφής* ορίζονται αντίστοιχα ως

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b R^2(x) dx \quad \text{και} \quad \mathcal{S} = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + [R'(x)]^2} dx \ .$$

(α)[12] Θεωρήστε τα δεδομένα

x	0	0.6	1.2	1.4	1.6	2	4	6	8	8.5
$R(x)$	6.2	5.8	4.0	3.8	4.4	5.8	7.6	8.2	9.8	10.0

και χρησιμοποιήστε τον κατάλληλο *συνδυασμό* απλού ή σύνθετου *κανόνα ολοκλήρωσης* του Τραπεζίου, Simpson $\frac{1}{3}$ και Simpson $\frac{3}{8}$ για να υπολογίσετε με την *καλύτερη ακρίβεια* τον όγκο $\mathcal{V}$ στο διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 8.5]$.

(β) [14] Θεωρήστε τα νέα δεδομένα

x	0	2	4	6	8
$R(x)$	6.2	5.5	4.3	5.6	6.9

και χρησιμοποιείστε κατάλληλο σύνθετο κανόνα ολοκλήρωσης και κατάλληλους τύπους *παραγώγισης* (επρός, πίσω και κεντρικών διαφορών τάξης $O(h)$ και $O(h^2)$) για τον *καλύτερο υπολογισμό* του εμβαδού $\mathcal{S}$ όταν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[0, 8]$.

Θέμα 5

[14] Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & y^2(1+t)^{-1}, \quad t \in [1, 2] \\ y(1) & = & -(\ln 2)^{-1} \end{array} \right.$ το οποίο έχει αναλυτική λύση την $y(t) = -\dfrac{1}{\ln(t+1)}$. Χρησιμοποιήστε την γνωστή (κλασσική) τέταρτης τάξης Runge-Kutta μέθοδο:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y^{n+1} & = & y^n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 & = & f(t^n, y^n) \\ k_2 & = & f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 & = & f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 & = & f(t^n + h, y^n + k_3) \end{array} \right.$$

με $h = 0.5$ για να προσεγγίσετε τις τιμές $y(1.5)$ και $y(2)$. Συγκρίνετε με τις πραγματικές τιμές.

Απαντήσεις

Θέμα 1

(α) Μετατρέποντας τους αριθμούς και το αποτέλεσμα των πράξεων σε κινητής υποδιαστολής (και στρογγύλευση) έχουμε,

$fl(1.47) + fl(0.0291) = 0.14991 \cdot 10^1 \Rightarrow fl(fl(1.47) + fl(0.0291)) = 0.150 \cdot 10^1$
$\dfrac{0.150 \cdot 10^1}{0.262 \cdot 10^1} = 0.572519\ldots \Rightarrow fl\left(\dfrac{0.150 \cdot 10^1}{0.262 \cdot 10^1}\right) = 0.573$
$0.573 - 0.572 = 0.001 = 0.100 \cdot 10^{-2}$ (καταστροφική ακύρωση 2 σημαντικών δεκαδικών ψηφείων εφόσον η πραγματική τιμή είναι $1.75572 \cdot 10^{-4}$).

(β) (i) Στο δυαδικό σύστημα $\max_{x\in M} = 0.\underbrace{11\ldots1}_{t=12}\cdot 2^{63} = 0.\underbrace{11\ldots1}_{t=12}\cdot 2^{111111}$ (μετατρέποντας το $(63)_{10} = (111111)_2$).
(ii) Στο δεκαδικό σύστημα αυτός ο αριθμός είναι, προσεγγιστικά (χωρίς τους όρους μετά την υποδιαστολή), $\max_{x\in M} = 1.\underbrace{11\ldots1}_{t=11}0 \cdot 2^{63-1} \approx 1.00\ldots00 \cdot 2^{62} = 2 \cdot 2^{62} = 2^{63} \approx 9.22 \cdot 10^{18}$.

Θέμα 2

(α) Τα κοινά σημεία των f, g θα είναι λύσεις της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - e^x = 0$ συνεπώς με $h'(x) = 3x^2 - e^x$ η μέθοδος $N - R$ γίνεται

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - e^{x_n}}{3x_n^2 - e^{x_n}} \text{ και για } x_0 = 1.5 \text{ δίνει}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1.98789, \quad h(x_1) = 0.555450, \quad |x_1 - x_0| = 0.487891 \\
x_2 &= 1.86595, \quad h(x_2) = 0.034731, \quad |x_2 - x_1| = 0.121943 \\
x_3 &= 1.85723, \quad h(x_3) = 0.000180, \quad |x_3 - x_2| = 0.008719 \\
x_4 &= \mathbf{1.85718}, \quad h(x_4) = 0.000000 \quad |x_4 - x_3| = 0.000046 = 4.6 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}
\end{aligned}$$

Η σύγκλιση είναι τετραγωνική, εφόσον προσεγγίζουμε μια απλή ρίζα της $h(x)$ με αρχική τιμή κοντά στο $x_1^\star$ και διπλασιάζεται το πλήθος των σωστών δεκαδικών στη κάθε νέα προσέγγιση.

Για την $n-$προσέγγιση της μεθόδου διχοτόμισης έχουμε

$$|x_n - x_1^\star| = \frac{3-1}{2^n} < 10^{-4} \Rightarrow 2^n > 2 \cdot 10^4 \Rightarrow n > \frac{\ln(2 \cdot 10^4)}{\ln(2)} \approx 14.28 \Rightarrow \mathbf{n = 15} \text{ (επαναλήψεις).}$$

(β) Οι δύο δυνατές μέθοδοι σταθερού σημείου που μπορούμε να κατασκευάσουμε (από τη σχέση $x^3 = e^x$) είναι οι

$$x_{n+1} = \phi_1(x_n) = e^{x_n/3} \qquad \text{και} \qquad x_{n+1} = \phi_2(x_n) = 3\ln(x_n)$$

Για την πρώτη έχουμε, $|\phi_1'(x)| = \frac{1}{3}e^{x/3}$ άρα $\max_{x\in[4,5]} |\phi_1'(x)| = \frac{1}{3}e^{5/3} = 1.7648$, δεν είναι συστολή και άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί.
Για τη δεύτερη έχουμε, $|\phi_2'(x)| = |\frac{3}{x}|$ και $|\frac{3}{x}| < 1 \Rightarrow$ συστολή για $x > 3$ άρα και στο $[4, 5]$. Επιπλέον, για σίγουρη σύγκλιση (βάση του Θ. συστολής) πρέπει $\phi_2([4, 5]) \subset [4, 5]$ και εφόσον ϕ_2 αύξουσα στο διάστημα που έχουμε και $\phi_2(4) = 4.1589$ και $\phi_2(5) = 4.8283$, αυτό ισχύει.

(γ) ΒΛ. ΕΞΕΤΑΣΗ 1ης ΠΡΟΟΔΟΥ ΘΕΜΑ 3(γ).

Θέμα 3

(α) Στη μορφή Lagrange έχουμε $P(x) = L_0(x) \cdot 1 + L_1(x) \cdot 3 + L_2(x) \cdot 5.5 + L_3(x) \cdot 9$ όπου τα πολυώνυμα

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-1}{0-1}\cdot\frac{x-1.5}{0-1.5}\cdot\frac{x-2}{0-2}, \quad L_1(x)=\frac{x-0}{1-0}\cdot\frac{x-1.5}{1-1.5}\cdot\frac{x-2}{1-2},\\
L_2(x) &= \frac{x-0}{1.5-0}\cdot\frac{x-1}{1.5-1}\cdot\frac{x-2}{1.5-2} \quad L_3(x)=\frac{x-0}{2-0}\cdot\frac{x-1}{2-1}\cdot\frac{x-1.5}{2-1.5}
\end{aligned}
$$

Τελικά το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $P(x) = 2x^2 + 1$. Παρόλο που περιμέναμε το πολυώνυμο παρεμβολής να είναι 3ου βαθμού, τα δεδομένα ακολουθούν (είναι τιμές) ενός πολυώνυμο 2ου βαθμού και η παρεμβολή το υπολογίζει ακριβώς! (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 8 σελ. 5-6, και 8-9).

(β) Ψάχνουμε το βέλτιστο πολυώνυμο $p_2(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$ θέλουμε δηλ. να βρούμε τους συντελεστές a_0, a_1, a_2, ε.ω. η συνάρτηση $E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^4 \Big[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)\Big]^2$ να ελαχιστοποιείται. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{4} x_i^j\Big(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2\Big) = 0, \quad j = 0, 1, 2$$

Το σύστημα κανονικών εξισώσεων είναι:

$$
\begin{aligned}
a_0 4 + a_1\sum_{i=1}^{4} x_i + a_2\sum_{i=1}^{4} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{4} y_i\\
a_0\sum_{i=1}^{4} x_i + a_1\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{4} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{4} x_iy_i\\
a_0\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{4} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{4} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2y_i
\end{aligned}
$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	3	1	1	1	3	3
3	1.5	5.5	2.25	3.375	5.0625	8.25	12.375
4	2	9	4	8	16	18	36
$\sum =$	**4.5**	**18.5**	**7.25**	**12.375**	**22.0625**	**29.25**	**51.375**

Η λύση του συστήματος κανονικών εξισώσεων δίνει $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2$, άρα το $p_2(x) = 2x^2 + 1$.
(βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 12 σελ. 14-15 και σελ. 17-18)

Θέμα 4

(α) Από τα δεδομένα

x	0	0.6	1.2	1.4	1.6	2	4	6	8	8.5
$R(x)$	6.2	5.8	4.0	3.8	4.4	5.8	7.6	8.2	9.8	10.0
$R^2(x)$	38.44	33.64	16	14.44	19.36	33.64	57.76	67.24	96.04	100

Εφαρμόζουμε στο $[0, 1.2]$ απλό κανόνα του Simpson 1/3 με βήμα $h = 0.6$,
στο $[1.2, 1.6]$ απλό κανόνα του Simpson 1/3 με βήμα $h = 0.2$,
στο $[1.6, 2]$ απλό κανόνα του Τραπεζίου,
στο $[2, 8]$ απλό κανόνα του Simpson 3/8 με βήμα $h = 2$ και
στο $[8, 8.5]$ απλό κανόνα του Τραπεζίου.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι $\mathcal{V} \approx \pi\,[37.800 + 6.208 + 10.600 + 358.510 + 49.010] = 1451.7928$.

(α) Ο κανόνας ολοκλήρωσης που πρέπει να εφαρμοστεί είναι ο σύνθετος Simpson 1/3 με $h = 2$ και για να εφαρμοστεί ο κανόνας πρέπει να προσεγγιστούν οι παράγωγοι στα σημεία που δίνονται με κανόνες αριθμητικής παραγώγισης.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε στο $x = 0$ εμπρός τύπο διαφορών $O(h)$ άρα $R'(0) = \frac{5.5-6.2}{2} = -0.35$,
στο $x = 2$ κεντρικό τύπο διαφορών $O(h^2)$ άρα $R'(2) = \frac{4.3-6.2}{2 \cdot 2} = -0.475$,
στο $x = 4$ κεντρικό τύπο διαφορών $O(h^2)$ άρα $R'(4) = \frac{5.6-5.5}{2 \cdot 2} = 0.025$,
στο $x = 6$ κεντρικό τύπο διαφορών $O(h^2)$ άρα $R'(6) = \frac{6.9-4.3}{2 \cdot 2} = 0.650$ και
στο $x = 8$ προς τα πίσω τύπο διαφορών $O(h)$ άρα $R'(8) = \frac{6.9-5.6}{2} = 0.650$.

Συνεπώς έχουμε

x	0	2	4	6	8
$R(x)$	6.2	5.5	4.3	5.6	6.9
$R'(x)$	-0.35	-0.474	0.025	0.650	0.650
$[R'(x)]^2$	0.1225	0.2246	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0.4225	0.4225
$R(x)\sqrt{1+R'(x)]^2}$	6.5687	6.0864	4.3013	6.6790	8.2295

Τελικά $\mathcal{S} \approx 2\pi \cdot 49.6410 \approx 312$.

Θέμα 5

$y^1 = -1.091156$ και $y(1.5) = -1.091356$ σφάλμα $|y^1 - y(1.5)| = 2.0015 \cdot 10^{-4}$,

$y^2 = -0.91008$ και $y(2) = -0.910239$ σφάλμα $|y^2 - y(2)| = 1.577 \cdot 10^{-4}$.