ΜΑΘ 202 **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

Τελική Εξέταση Α **5/2018**

Ονοματεπώνυμο	:	....
Αριθμός Μητρώου	:	....
Εξάμηνο	:	....

Σχολή: Μ.Π.Δ.

Οδηγίες

- *Συμπληρώσατε,* **αμέσως**, *τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο.*
- *Επιτρέπεται μόνο η χρήση υπολογιστή τσέπης.*
  Παραβίαση του κανόνα αυτού συνεπάγεται σοβαρές συνέπειες πέρα από το μηδενισμό στο μάθημα.
- *Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά* **όλη** *η δουλειά σας.*
  Σωστές απαντήσεις που δεν δικαιολογούνται από την δουλειά σας δεν θα βαθμολογηθούν.
- *Δεν εγκαταλείπετε την θέση σας για κανένα λόγο χωρίς να επικοινωνήσετε πρώτα με επιτηρητή της εξέτασης.*
- *Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι* **2** *ώρες και* **45** *λεπτά.*
- *Αποχώρηση από την εξέταση επιτρέπεται μετά από 30 λεπτά.*
- *Σύνολο μονάδων στο διαγώνισμα 100.*

Σε όλες τις περιπτώσεις παραδίδετε το φυλλάδιο εξέτασης με συμπληρωμένα στοιχεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

[12] Περιγράψτε *αναλυτικά*, (i) πώς μετατρέπονται και παριστάνονται οι πραγματικοί αριθμοί σέ έναν υπολογιστή, (ii) τι ιδιαιτερότητες υπάρχουν σε αυτή την παράσταση, (iii) πως δημιουργούνται πιθανά σφάλματα σε αυτή την παράσταση καθώς και στις πράξεις μεταξύ των αριθμών και (iv) πώς αυτές μπορούν να επηρεάσουν την ακρίβεια και την ευστάθεια των αλγορίθμων που υλοποιούν μία αριθμητική/υπολογιστική μέθοδο.

Θέμα 2

(α)[14] Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := \ln(x+1) - x$ και δείχνοντας ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[-0.5,\ 1]$, εφαρμόστε κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο *τετραγωνικής τάξης σύγκλισης* για την προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια τουλάχιστον πέντε δεκαδικών, δίνοντας σαν αρχική τιμή $x_0 = -0.5$.

(β)[6] Για τη προσέγγιση της ρίζας του (α) ερωτήματος προτείνονται οι παρακάτω 2 επαναληπτικές διαδικασίες της μορφής $x_{n+1} = g(x_n)$. Δείξτε αν κάποια από αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σιγουριά για την προσέγγιση της ρίζας της $f(x)$,

$$\texttt{(i)}\ x_{n+1} = \ln(x_n + 1), \quad \text{και} \quad \texttt{(ii)}\ x_{n+1} = \frac{e^{x_n} + x_n - 1}{2}.$$

Θέμα 3

(α)[8] Τα πολυώνυμα $p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21$ και $q(x) = 3x^2 - 10x + 9$ παρεμβάλλονται στα δεδομένα

x	1	2	3
y	2	1	6

. Εξηγείστε γιατί αυτό το γεγονός *δεν* αντιβαίνει τη μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής.

(β)[8] Υπολογίστε την *τετραγωνική* spline παρεμβολής, $S(x)$, που παρεμβάλει τα δεδομένα το ερωτήματος (α) και για την οποία ισχύει $S''(1) = 0$.

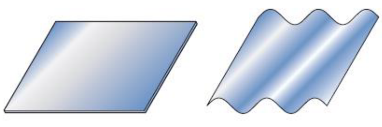
(γ)[14] Ο πληθυσμός, p, σε χιλιάδες, μίας πόλης αυξάνεται τις τελευταίες δεκαετίες με βάση τις μετρήσεις που δίνουν τα δεδομένα

t	10	20	30	40	50
p	0.5	6	16.5	32	52.5

. Ποιός προβλέπεται είναι ο πληθυσμός με βάση το *μοντέλο ελαχίστων τετραγώνων* $p(t) = \alpha t^2 + \beta t$ τα επόμενα δέκα χρόνια;

Θέμα 4

(α)[12] Έστω συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στό διάστημα $[0, 2]$ και τα σημεία $x_0 = 0, x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα x_0, x_1 και x_2 και χρησιμοποιήστε το για να παράγετε:
(i) τον κανόνα ολοκλήρωσης Simplson 1/3 για την προσέγγιση του $\int_0^2 f(x)dx$ και
(ii) τον κανόνα αριθμητικής παραγώγισης για την προσέγγιση της $f'(1)$.
(β)[8] Για την κατασκευή του παρακάτω κυματιστού φύλου αλουμινίου (μήκους $48cm$ και ύψους $10cm$) χρειάζεται να πιεστεί σε μια μηχανική πρέσα ένα επίπεδο φύλο αλουμινίου αρχικού μήκους L.



Το μήκος του επίπεδου φύλου υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα $L = \int_0^{48} \sqrt{10 + (\cos x)^2}dx$. Να προσεγγιστεί η τιμή του μήκους L με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 2 σημείων.

Θέμα 5

(α)[8] Για το Π.Α.Τ. $y' = -5y,\ y(0) = 1$, θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή $y(2)$ με βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$. Εξηγείστε ποιά από τις δύο μεθόδους, την (άμεση) Euler ή την πεπλεγμένη Euler πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, και επιλέξτε την για να δώσετε μια προσέγγιση της $y(2)$.

(β)[10] Για το Π.Α.Τ. του (α) ερωτήματος και με το ίδιο βήμα $h = 0.5$ εφαρμόστε την μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης του Heun: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, \widetilde{y}^{n+1})]$, για την προσέγγιση του $y(2)$. Σχολιάστε και εξηγείστε το αποτέλεσμά σας και σε σχέση με αυτό που πήρατε από το (α) ερώτημα.

ΜΑΘ 202 **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

Τελική Εξέταση Β **5/2018**

Ονοματεπώνυμο	:	....
Αριθμός Μητρώου	:	....
Εξάμηνο	:	....

Σχολή: Μ.Π.Δ.

Οδηγίες

- *Συμπληρώσατε,* **αμέσως**, *τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο.*
- *Επιτρέπεται μόνο η χρήση υπολογιστή τσέπης.*
  Παραβίαση του κανόνα αυτού συνεπάγεται σοβαρές συνέπειες πέρα από το μηδενισμό στο μάθημα.
- *Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά* **όλη** *η δουλειά σας.*
  Σωστές απαντήσεις που δεν δικαιολογούνται από την δουλειά σας δεν θα βαθμολογηθούν.
- *Δεν εγκαταλείπετε την θέση σας για κανένα λόγο χωρίς να επικοινωνήσετε πρώτα με επιτηρητή της εξέτασης.*
- *Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι* **2** *ώρες και* **45** *λεπτά.*
- *Αποχώρηση από την εξέταση επιτρέπεται μετά από 30 λεπτά.*
- *Σύνολο μονάδων στο διαγώνισμα 100.*

Σε όλες τις περιπτώσεις παραδίδετε το φυλλάδιο εξέτασης με συμπληρωμένα στοιχεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

Θέμα 1

[12] Περιγράψτε *αναλυτικά*, (i) πώς μετατρέπονται και παριστάνονται οι πραγματικοί αριθμοί σέ έναν υπολογιστή, (ii) τι ιδιαιτερότητες υπάρχουν σε αυτή την παράσταση, (iii) πως δημιουργούνται πιθανά σφάλματα σε αυτή την παράσταση καθώς και στις πράξεις μεταξύ των αριθμών και (iv) πώς αυτές μπορούν να επηρεάσουν την ακρίβεια και την ευστάθεια των αλγορίθμων που υλοποιούν μία αριθμητική/υπολογιστική μέθοδο.

Θέμα 2

(α)[14] Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := \ln(x+1) - x$ και δείχνοντας ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[-0.5,\ 1]$, εφαρμόστε κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο *τετραγωνικής τάξης σύγκλισης* για την προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια τουλάχιστον πέντε δεκαδικών, δίνοντας σαν αρχική τιμή $x_0 = 0.5$.

(β)[6] Για τη προσέγγιση της ρίζας του (α) ερωτήματος προτείνονται οι παρακάτω 2 επαναληπτικές διαδικασίες της μορφής $x_{n+1} = g(x_n)$. Δείξτε αν κάποια από αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σιγουριά για την προσέγγιση της ρίζας της $f(x)$,

$$\text{(i) } x_{n+1} = \ln(x_n + 1), \quad \text{και} \quad \text{(ii) } x_{n+1} = \frac{e^{x_n} + x_n - 1}{2}.$$

Θέμα 3

(α)[8] Τα πολυώνυμα $p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21$ και $q(x) = 3x^2 - 10x + 9$ παρεμβάλλονται στα δεδομένα

x	1	2	3
y	2	1	6

. Εξηγείστε γιατί αυτό το γεγονός *δεν* αντιβαίνει τη μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής.

(β)[8] Υπολογίστε την *τετραγωνική* spline παρεμβολής, $S(x)$, που παρεμβάλει τα δεδομένα το ερωτήματος (α) και για την οποία ισχύει $S''(1) = 0$.

(γ)[14] Ο πληθυσμός, p, σε χιλιάδες, μίας πόλης αυξάνεται τις τελευταίες δεκαετίες με βάση τις μετρήσεις που δίνουν τα δεδομένα

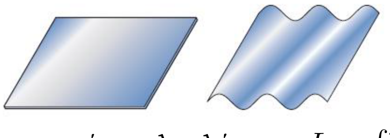
t	10	20	30	40	50
p	1	6	15	28	45

. Ποιός προβλέπεται είναι ο πληθυσμός με βάση το *μοντέλο ελαχίστων τετραγώνων* $p(t) = \alpha t^2 + \beta t$ τα επόμενα δέκα χρόνια;

Θέμα 4

(α)[12] Έστω συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στό διάστημα $[0, 2]$ και τα σημεία $x_0 = 0, x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα x_0, x_1 και x_2 και χρησιμοποιήστε το για να παράγετε:
(i) τον κανόνα ολοκλήρωσης Simplson 1/3 για την προσέγγιση του $\int_0^2 f(x)dx$ και
(ii) τον κανόνα αριθμητικής παραγώγισης για την προσέγγιση της $f'(1)$.

(β)[8] Για την κατασκευή του παρακάτω κυματιστού φύλου αλουμινίου (μήκους $48cm$ και ύψους $10cm$) χρειάζεται να πιεστεί σε μια μηχανική πρέσα ένα επίπεδο φύλο αλουμινίου αρχικού μήκους L.



Το μήκος του επίπεδου φύλου υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα $L = \int_0^{48} \sqrt{10 + (\cos x)^2} dx$. Να προσεγγιστεί η τιμή του μήκους L με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 2 σημείων.

Θέμα 5

(α)[8] Για το Π.Α.Τ. $y' = -5y,\ y(0) = 1$, θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή $y(2)$ με βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$. Εξηγείστε ποιά από τις δύο μεθόδους, την (άμεση) Euler ή την πεπλεγμένη Euler πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, και επιλέξτε την για να δώσετε μια προσέγγιση της $y(2)$.

(β)[10] Για το Π.Α.Τ. του (α) ερωτήματος και με το ίδιο βήμα $h = 0.5$ εφαρμόστε την μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης του Heun: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, \widetilde{y}^{n+1})]$, για την προσέγγιση του $y(2)$. Σχολιάστε και εξηγείστε το αποτέλεσμά σας και σε σχέση με αυτό που πήρατε από το (α) ερώτημα.

Θέμα 1

Βλέπε ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ 2-4.

Θέμα 2

(α) Υπολογίζοντας την $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1$ βλέπουμε ότι μηδενίζεται στο $x = 0$, βλέπουμε όμως ότι και $f(0) = 0$ συνεπώς, η $x^\star = 0$ είναι διπλή ρίζα της $f(x)$ και ταυτόχρονα αποτελεί ακρότατό της (μέγιστο). Η $f(x)$ είναι αύξουσα για $x \in [-0.5, 0]$ και φθίνουσα για $x \in [0, 1]$ και $f''(x) = -1/(x+1)^2 < 0$, άρα η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω και παίρνει μόνο αρνητικές τιμές στο $[-0.5, 1]$.

Εφόσον η ρίζα που θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι διπλή, δηλ. πολλαπλότητας $m = 2$, θα χρησιμοποιήσουμε την *τροποποιημένη* μέθοδο Newton-Raphson για να πετύχουμε τετραγωνική τάξη σύγκλισης (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6 σελ. 8-10)

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Για $x_0 = -0.5$ (πρώτη έκδοση θεμάτων) έχουμε $x_1 \approx -0.1137$, $x_2 \approx -0.0045$, $x_3 \approx -6.986 \cdot 10^{-6}$ και $x_4 \approx -2.520 \cdot 10^{-11}$ (μέχρι και τη x_3 είναι αποδεκτή σαν απάντηση).
Για $x_0 = 0.5$ (δεύτερη έκδοση θεμάτων) έχουμε $x_1 \approx -0.06720$, $x_2 \approx -0.0015$, $x_3 \approx -8.1020 \cdot 10^{-7}$ και $x_4 \approx -1.2117 \cdot 10^{-10}$ (μέχρι και τη x_3 είναι αποδεκτή σαν απάντηση).

(β) Πρόκειται για μεθόδους σταθερού σημείου, άρα ελέγχουμε αν ισχύει το Θ. Συστολής (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 5 σελ. 7-10) σε κάποιο κλειστό διάστημα που να περιέχει τη ρίζα (σταθερό σημείο), $x^\star = 0$.
Για την (i) έχουμε $|g'(x)| = |1/(x+1)| < 1 \;\Rightarrow\; |x+1| > 1 \;\Rightarrow x > 0$ ή $x < -2$ (δεν μπορεί να εφαρμοστεί).
Για την (ii) έχουμε $|g'(x)| = \frac{e^x+1}{2} < 1 \;\Rightarrow\; e^x < 1 \;\Rightarrow$ για $x < 0$ συστολή, αλλά δεν υπάρχει κλειστό διάστημα που να περιέχει το $x^\star = 0$ (δεν μπορούμε να πούμε αν συγκλίνει σίγουρα).

Θέμα 3

(α) Αφού $p(x)$ και $q(x)$ συμφωνούν στα σημεία $x_0 = 1, x_1 = 2$ και $x_2 = 3$ και ο βαθμός του $q(x)$ είναι 2, το $q(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής του $p(x)$ (και άρα των δεδομένων) από τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ δύο. Δεν υπάρχει λοιπόν καμιά αντίφαση με την μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής (που έχει πάντα βαθμό $\le n$).

(β) Έστω $S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in [1,2], \\ s_1(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 & x \in [2,3] \end{cases}$ άρα $S'(x) = \begin{cases} 2a_1x + b_1, & x \in [1,2], \\ 2a_2x + b_2 & x \in [2,3]. \end{cases}$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 11 σελ. 11)

Εφόσον θέλουμε $S''(1) = 0 \;\Rightarrow\; 2a_1 = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0$, και από τις συνθήκες παρεμβολής έχουμε:

$$\begin{aligned} s_0(1) = 2 &\;\Rightarrow\; b_1 + c_1 = 2, \\ s_0(2) = 1 &\;\Rightarrow\; 2b_1 + c_1 = 1, \\ s_1(2) = 1 &\;\Rightarrow\; 4a_2 + 2b_2 + c_2 = 1, \\ s_1(3) = 6 &\;\Rightarrow\; 9a_2 + 3b_2 + c_2 = 6, \\ s_0'(2) = s_2'(2) &\;\Rightarrow\; b_1 = 4a_2 + b_2. \end{aligned}$$

άρα $S(x) = \begin{cases} s_0(x) = -x + 3, & x \in [1,2], \\ s_1(x) = 6x^2 - 25x + 27, & x \in [2,3]. \end{cases}$

(γ) Από θεωρεία ελαχίστων τετραγώνων θέλουμε να βρούμε τα α, β έτσι ώστε η απόσταση $E(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{5} \Big[p_i - (\alpha t_i^2 + \beta t_i)\Big]^2$ να ελαχιστοποιείται (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 12 σελ. 16). Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται οι 2 συνθήκες:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0 \;\Rightarrow\; -2\sum_{i=1}^{5} t_i^2\Big(p_i - \alpha t_i^2 - \beta t_i\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = 0 \;\Rightarrow\; -2\sum_{i=1}^{5} t_i\Big(p_i - \alpha t_i^2 - \beta t_i\Big) = 0$$

Το σύστημα κανονικών εξισώσεων είναι τότε:

$$\begin{aligned}\alpha\sum_{i=1}^{5} t_i^4 + \beta\sum_{i=1}^{5} t_i^3 &= \sum_{i=1}^{5} t_i^2 p_i\\ \alpha\sum_{i=1}^{5} t_i^3 + \beta\sum_{i=1}^{5} t_i^2 &= \sum_{i=1}^{5} t_i p_i\end{aligned}$$

(Πρώτη έκδοση θεμάτων) $\alpha = 0.025, \beta = -0.2$ και $p(60) = 78.000$
(Δεύτερη έκδοση θεμάτων) $\alpha = 0.020, \beta = -0.1$ και $p(60) = 66.000$

Θέμα 4

Το πολυώνυμο παραμβολής μπορεί να υπολογιστεί με όποιο γνωστό τρόπο, έστω στη μορφή Lagrange (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 8 σελ 5-6)

$$p_2(x) = f(0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= f(0)\frac{(x-1)(x-2)}{2} + f(1)\frac{x(x-2)}{-1} + f(2)\frac{x(x-1)}{2}$$

(i) Για να παράγουμε τον τύπο ολοκλήρωσης Simpson 1/3 ολοκληρώνουμε το $p_2(x)$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 14 σελ. 13)

$$\begin{aligned}Q_3^S &= \int_0^2 p_2(x)dx = \frac{f(0)}{2}\int_0^2 (x-1)(x-2)dx - f(1)\int_0^2 x(x-2)dx + \frac{f(0)}{2}\int_0^2 x(x-1)dx\\ &= \ldots\ldots = \frac{1}{3}\left[f(0) + 4f(1) + f(2)\right]\end{aligned}$$

(ii) Για την προσέγγιση της τιμής $f'(1)$ παραγωγίζουμε το $p_2(x)$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 13 σελ. 10-11)

$$\begin{aligned}p_2'(x) &= \frac{f(0)}{2}((x-1)+(x-2)) - f(1)((x-2)+x) + \frac{f(0)}{2}((x-1)+x)\\ &= \frac{f(0)}{2}(2x-3) - f(1)(2x-2) + \frac{f(2)}{2}(2x-1) \qquad \text{άρα}\end{aligned}$$

$$f'(1) \approx p_2'(1) = \frac{f(2)-f(0)}{2} \quad \text{(τύπος κεντρικής διαφοράς)}$$

(β) Ο τύπος ολοκλήρωσης G-L 2-σημείων προσεγγίζει το $\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})$. Συνεπώς, με αλλαγή μεταβλητής $x = 24t + 24,\ dx = 24dt$,

$$\begin{aligned}L = \int_0^{48}\sqrt{10+(\cos x)^2}dx &= 24\int_{-1}^{1}\sqrt{10+(\cos(24t+24))^2}dt\\ &\approx 24\left[\sqrt{10+(\cos(-24/\sqrt{3}+24))^2} + \sqrt{10+(\cos(24/\sqrt{3}+24))^2}\right] = 157.5245cm\end{aligned}$$

Θέμα 5

(α) Για να χρησιμοποιήσουμε την (άμεση) μέθοδο Euler πρέπει να επιλέξουμε βήμα h έτσι ώστε οι υπολογισμοί μας να είναι ευσταθείς. Για το δοσμένο Π.Α.Τ. η συνθήκη ευστάθειας δίνει ότι $|1-5\cdot h| < 1 \Rightarrow h < -2/-5 = 0.4$. Συνεπώς η άμεση Euler *δεν* μπορεί να χρησιμοποιηθεί με $h = 0.5$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 15-16 και σελ. 23-24). Η πεπλεγμένη Euler είναι πάντα ευσταθής και δίνει

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) = y^n + 0.5\cdot(-5y^{n+1}) \;\Rightarrow\; y^{n+1} = y^n - 2.5y^{n+1} \;\Rightarrow\; (1+2.5)y^{n+1} = y^n$$

αρα (για να αποφύγουμε τον υπολογισμό των ενδιάμεσων βημάτων)

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{3.5} \;\Rightarrow\; y^{n+1} = y^0\left(\frac{1}{3.5}\right)^{n+1} \;\Rightarrow\; y^4 = \left(\frac{1}{3.5}\right)^4\cdot 1 = 0.00666389 \approx y(2).$$

(β) Η μέθοδος Heun (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 18 σελ. 6) δίνει

$$
\begin{aligned}
\widetilde{y}^1 &= y^0 + hf(y^0) = 1 - 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = -1.5 \qquad (\text{ άμεση Euler για πρόβλεψη }) \\
y^1 &= 1 + \frac{0.5}{2}[-5y^0 - 5 \cdot \widetilde{y}^1] = 1.625 \qquad (\text{ διόρθωση }) \\
&\vdots \\
y^2 &= 2.6406 \\
y^3 &= 4.2910 \\
y^4 &= 6.9729
\end{aligned}
$$

Η μέθοδος προφανώς αποκλίνει από τη σωστή συμπεριφορά (δηλ. από το ότι η πραγματική λύση $y(t) = e^{-5t} \to 0$ για $t \to \infty$) και αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος είναι ασταθής για την δοσμένη επιλογή του h. Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler, αν και μικρότερης τάξης ακρίβειας, έχει τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά στη προσέγγιση της πραγματικής λύσης $(y(2) = e^{-10} = 0.0000454)$.