Θέμα 1

(α) [0.6] Έστω ό αριθμός $y = 2^{-3} + 2^{-24} + 2^{-28}$ (i) γράψτε τον αριθμό y στη *συγκεκριμένη* παρακάτω μορφή κινητής υποδιαστολής $(1.d_1d_2 \dots d_t) \cdot 2^k$, όπου $d_i = 0$ ή 1 και (ii) για έναν υπολογιστή με $t = 24$ επιβεβαιώστε ότι το *σχετικό σφάλμα* μεταξύ του αριθμού μηχανής $fl(y)$ και του y είναι μικρότερο από το *μοναδιαίο σφάλμα αποκοπής*.
(β) [0.6] Για ποιές τιμές του x μπορεί να παρουσιαστεί πρόβλημα (και ποιό είναι αυτό) στον υπολογισμό της παρακάτω έκφρασης, σε έναν υπολογιστή πεπερασμένης ακρίβειας, $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$. Πώς μπορεί να διορθωθεί αυτό το πρόβλημα;

Θέμα 2

Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := x - e\ln x - 1$.
(α) [0.6] Δείξτε ότι η $f(x) = 0$ έχει 2 πραγματικές θετικές ρίζες, *προσδιορίζοντας ακριβώς τη μία* και δείχνοντας ότι η άλλη είναι στο διάστημα $(5, 6)$.
(β) [0.7] Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $x = \phi(x) = e\ln x + 1$. Δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in [5, 6]$, η ακολουθία $x_n, n \geq 0$ που παράγει η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$, συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)$ στο διάστημα $(5, 6)$.
(γ) [1] Με $x_0 = 4$, υπολογίστε τον όρο x_2 της ακολουθίας που δίνει η μέθοδος Newton-Raphson για την $f(x)$. Δείξτε ότι η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)$ στο διάστημα $(5, 6)$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας με βάση τη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου και τις ιδιότητες της f).

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $S(x) := \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$.
(α) [0.6] Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange P_2 που παρεμβάλλεται στις τιμές της S στα σημεία $-1, 0$ και 1.
(β) [0.8] Αν θεωρήσουμε ότι η $S(x)$ είναι η γραμμική spline παρεμβολής στο $P_2(x)$ ποιό είναι το σφάλμα $\max\limits_{x \in [0,1]} |P_2 - S|$;
(γ) [1.4] Τα παρακάτω δεδομένα περιγράφουν τη δύναμη (F) που ασκείται σε ένα αντικείμενο τοποθετημένο σε μία ανεμοσύραγγα σε σχέση με την ταχύτητα του ανέμου $v(m/s)$

$v(m/s)$	10	20	30	40
F	20	60	120	200

Γνωρίζουμε ότι τέτοιου είδους δεδομένα μπορούν να προσομοιωθούν από το ακόλουθο μοντέλο $y = a_1 v + a_2 v^2$. Χρησιμοποιήστε την *προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων* για να υπολογίσετε τις τιμές των a_1 και a_2.

Θέμα 4

(α) [1.2] Ο παρακάτω πίνακας δίνει στο χρόνο, t (σε λεπτά της ώρας), την ταχύτητα, v (σε μέτρα/δευτερόλεπτο), που έχει ένα αυτοκίνητο

$t(min)$	1	2	3.25	4.5	6	7	8	9	9.5	10
$v(m/s)$	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

Υπολογίστε την απόσταση που έχει διανύσει το αυτοκίνητο χρησιμοποιώντας τον *καλύτερο συνδυασμό* των κανόνων: του Τραπεζίου, Simpson 1/3 και Simpson 3/8.

(γ) [0.5+0.6] Δείξτε πως κατασκευάζεται ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 2-σημείων και εφαρμόστε τον για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^4 te^{2t}dt$.

Θέμα 5

(α) [0.8] Για την προσέγγιση της λύσης της διαφορικής εξίσωση (Π.Α.Τ): $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$ *αποδείξτε* πώς κατασκευάζονται η (άμεση) μέθοδος του Euler και η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler με βήμα ολοκλήρωσης (διακριτοποίησης) h με χρήση κανόνων αριθμητικής παραγώγισης και αριθμητικής ολοκλήρωσης.
(β)[1.2] Η μέθοδος του Heun (πρόβλεψης-διόρθωσης)για Π.Α.Τ δίνεται ως εξής:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, \widetilde{y}^{n+1})\right], \quad \text{όπου } \widetilde{y}^{n+1} \text{ η πρόβλεψη της (άμεσης) μεθόδου του Euler.}$$

Εφαρμόστε τη μέθοδο στο Π.Α.Τ. $y' = \dfrac{t - y}{2},\ y(0) = 1$ με $h = 1$ για να προσεγγίσετε την τιμή του $y(3)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Μ.Π.Δ.: Αριθμ. Ανάλυση, Τελική Εξέταση, 8/2017, **Απαντήσεις Θεμάτων**

Θέμα 1

(α) Στη ζητούμενη μορφή, ο αριθμός γράφεται $y = 2^{-3}+2^{-24}+2^{-28} = 2^{-3}(1+2^{-21}+2^{-25}) = (1.\underbrace{0\ldots\ldots0}_{20-\text{θέσεις}}10001)\cdot 2^{-3}$.

Ο αριθμός κινητής υποδιαστολής, στη ζητούμενη μορφή και για $t = 24$, ειναι $fl(y) = (1.\underbrace{0\ldots\ldots0}_{20-\text{θέσεις}}100)\cdot 2^{-3}$ (χάνονται τα τελευταία 2 δεκαδικά) άρα το σχετικό σφάλμα είναι

$$\frac{|y-fl(y)|}{|y|} = \frac{2^{-28}}{2^{-3}+2^{-24}+2^{-28}} = \frac{2^{-28}}{2^{-3}(1+2^{-21}+2^{-25})} = \frac{2^{-25}}{1+2^{-21}+2^{-25}} < 2^{-25} < u = 2^{1-24} = 2^{-23}.$$

(β) Για τιμές του x πολυ μεγαλύτερες του ενα $(x \gg 1)$ έχουμε $y \approx \sqrt{x}-\sqrt{x}$ (δηλ. καταστροφική ακύρωση δεκαδικών). Για να το αποφύγουμε γράφουμε

$$y = \frac{(x+1/x)-(x-1/x)}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}} = \frac{2/x}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}.$$

Θέμα 2

(α) Η μελέτη της συνάρτησης (μονοτονία, κυρτότητα, ακρότατα κτλ) f δίνει το γράφημα της, π.χ. στο $(0,7]$. Η $f'(x) = 1 - e/x$, άρα η f έχει σημείο καμπής στο $x = e$ και είναι αύξουσα στο (e,∞) και φθίνουσα αλλιώς, επίσης $f''(x) = e/x^2 > 0\ \forall x$. Η προφανής ρίζα είναι η $\rho_1 = 1$ και εφόσον $f(5)\cdot f(6) < 0$ υπάρχει μία ακόμη (μοναδική) στο $(5,6)$.

(β) Εφόσον $\phi(x) = e\ln x + 1$ κοιτάμε καταρχάς αν είναι συστολή, δηλ. $|\phi'(x)| < 1$ ή αν $\max|\phi'(x)| < 1$ για $x \in [5,6]$ και έχουμε ότι

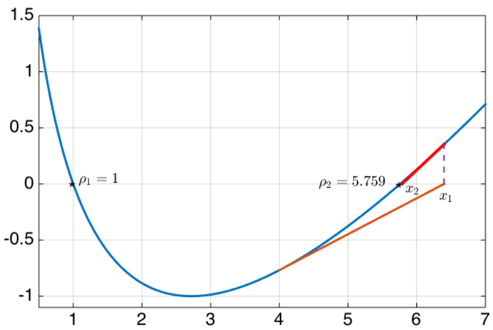
$$|\phi'(x)| = e/x < 1 \quad \forall x \in [5,6]$$

Πρεπει επιπλεον $\phi([5,6]) \subset [5,6]$ (δεύτερη προυπόθεση του Θεωρ. Συστολής) και έχουμε $\phi(5) = 1.5921$ και $\phi(6) = 1.6592$, άρα ισχύει, εφόσον $\phi(x)$ αύξουσα ($\phi'(x) > 0 \forall x \in [5,6]$).

(γ) Η μέθοδος Newton-Raphson δίνει για $x_0 = 4$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad\Rightarrow\quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 6.3978 \quad\Rightarrow\quad \cdots \quad\Rightarrow\quad x_2 \approx 5.7843$$

η οποία συγκλίνει στη ρίζα $\rho_2 \in (5,6)$, όπως φαίνεται γεωμετρικά από τα 2 βήματα της μεθόδου, φέρνοντας τις αντίστοιχες εφαπτόμενες (και εφόσον η f αύξουσα για $x > e$ και $f'' > 0$)



Θέμα 3

(α) Τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = -1, x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ αρα $f(x_0) = 0, f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 0$. Το πολυώνυμο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

$$P_2(x) = L_0\cdot f(x_0) + L_1\cdot f(x_1) + L_2\cdot f(x_2) = L_1\cdot 1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(-1)} = 1-x^2$$

(β) Από το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής στο $[0,1]$ (γραμμική λόγω της spline S στη περιπτωσή μας) στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 1-2 ή ΔΙΑΛΕΞΗ 10 σελ. 10) έχουμε

$$\max_{x\in[0,1]}|P_2 - S| = \frac{1}{2!}\max_{x\in[0,1]}|(x-x_1)(x-x_2)|\max_{x\in[0,1]}|P_2''| = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|x(x-1)|\cdot 2 = \max_{x\in[0,1]}|x(x-1)| = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(γ) Ψάχνουμε το βέλτιστο πολυώνυμο $p_2(v) = a_1 v + a_2 v^2$, θέλουμε δηλ. να βρούμε τους συντελεστές a_1, a_2, ε.ω. η συνάρτηση $E(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{4} \left[F_i - (a_1 v_i + a_2 v_i^2)\right]^2$ να ελαχιστοποιείται. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται οι 2 συνθήκες

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^{4} v_i^j \left(F_i - a_1 v_i - a_2 v_i^2\right) = 0, \quad j = 1, 2$$

Αρα το σύστημα κανονικών εξισώσεων είναι τοτε:

$$a_1 \sum_{i=1}^{4} v_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{4} v_i^3 = \sum_{i=1}^{4} v_i F_i \qquad (1)$$

$$a_1 \sum_{i=1}^{4} v_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{4} v_i^4 = \sum_{i=1}^{4} v_i^2 F_i \qquad (2)$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	v_i	F_i	v_i^2	v_i^3	v_i^4	$v_i F_i$	$v_i^2 F_i$
1	10	20	100	1000	10000	200	2000
2	20	60	400	8000	64000	1200	24000
3	30	120	900	27000	810000	3600	108000
4	40	200	1600	6400	2560000	8000	320000
$\sum =$	-	-	**3000**	**100000**	**3540000**	**13000**	**454000**

Η λύση του συστήματος κανονικών εξισώσεων (1)-(2) δίνει $a_1 = 1, a_2 = 0.1$, άρα το $p_2(v) = v + 0.1v^2$.
(βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 12 σελ. 16-17 και σελ. 17-18, όπου $a_0 = 0$)

Θέμα 4

(α) Στην ουσία θέλουμε να προσεγγίσουμε το $\int_1^{10} u dt$ =(απόσταση) και εφαρμόζουμε τους 3 τύπους βλέποντας ποιοί από τους κόμβους που έχουμε μπορούν να ομαδοποιηθούν άρα, από $t = 1$ μεχρι $t = 2$ με $h = 1$ Τραπεζιο, απο $t = 2$ μεχρι $t = 4.5$ με $h = 1.25$ Simpson 1/3, απο $t = 4.5$ μεχρι $t = 6$ με $h = 1.5$ Τραπεζιο, απο $t = 6$ μεχρι $t = 9$ με $h = 1$ Simpson 3/8 και απο $t = 9$ μεχρι $t = 10$ με $h = 0.5$ Simpson 1/3. Δηλ.

$$\int_1^{10} u dt = \int_1^{2} u dt + \int_2^{4.5} u dt + \int_{4.5}^{6} u dt + \int_6^{9} u dt + \int_9^{10} u dt$$

Προσοχή: πριν εφαρμόσουμε τους τύπους πρεπει η μονάδα μέτρησης του χρόνου να είναι ίδια γιατι ο χρόνος δίνεται σε λεπτά της ώρας και η ταχύτητα σε μέτρα/δευτερόλεπτο. Συνεπώς, πρέπει να μετατρέψουμε είτε την ταχύτητα είτε το χρόνο πολλαπλασιάζοντας με το 60. Αρα,

$$\int_1^{2} u dt \approx \frac{1 \cdot 60}{2}[5 + 6] = 330m$$

$$\int_2^{4.5} u dt \approx \frac{1.25 \cdot 60}{3}[6 + 4 \cdot 5.5 + 7] = 875m$$

$$\int_{4.5}^{6} u dt \approx \frac{1.5 \cdot 60}{2}[7 + 8.5] = 697.50m$$

$$\int_6^{9} u dt \approx \frac{3 \cdot 1 \cdot 60}{8}[8.5 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 7] = 1293.750m$$

$$\int_9^{10} u dt \approx \frac{0.5 \cdot 60}{3}[7 + 4 \cdot 7 + 5] = 400m$$

Άρα συνολικά $\int_1^{10} u dt \approx 3596.26m.$

(β) Βλέπε ΔΙΑΛΕΞΗ 16 σελ. 5 και σελ. 7.

Θέμα 5

(α) Βλέπε ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελίδες 6 και 23 και ΔΙΑΛΕΞΗ 18 σελ 5.

(β) Πρέπει να κάνου 3 βήματα της μεθόδου για να προσεγγίσουμε το $y(3)$, αρχίζοντας από το $t^0 = 0$

Για $n = 0$

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}^1 &= y^0 + hf(t^0, y^0) = y^0 + h\left[\frac{t^0 - y^0}{2}\right] = 1 + 1\left[\frac{0-1}{2}\right] = 0.5 \qquad \text{(Euler)} \\
y^1 &= y^0 + \frac{h}{2}\left[f(t^0, y^0) + f(t^1, \widetilde{y}^1)\right] = 1 + \frac{h}{2}\left[\frac{t^0 - y^0}{2} + \frac{t^1 - \widetilde{y}^1}{2}\right] = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{0-1}{2} + \frac{1-0.5}{2}\right] = 0.875
\end{aligned}$$

Για $n = 1$

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}^2 &= y^1 + hf(t^1, y^1) = y^1 + h\left[\frac{t^1 - y^1}{2}\right] = 0.875 + 1\left[\frac{1-0.875}{2}\right] = 0.9375 \qquad \text{(Euler)} \\
y^2 &= y^1 + \frac{h}{2}\left[f(t^1, y^1) + f(t^2, \widetilde{y}^2)\right] = 0.875 + \frac{h}{2}\left[\frac{t^1 - y^1}{2} + \frac{t^2 - \widetilde{y}^2}{2}\right] = 0.875 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-0.875}{2} + \frac{2-0.9375}{2}\right] = 1.171875
\end{aligned}$$

Για $n = 2$

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}^3 &= y^2 + hf(t^2, y^2) = y^2 + h\left[\frac{t^2 - y^2}{2}\right] = 1.17185 + 1\left[\frac{2-1.17185}{2}\right] = 1.085925 \qquad \text{(Euler)} \\
y^3 &= y^2 + \frac{h}{2}\left[f(t^2, y^2) + f(t^3, \widetilde{y}^3)\right] = 1.17185 + \frac{h}{2}\left[\frac{t^2 - y^2}{2} + \frac{t^3 - \widetilde{y}^3}{2}\right] = \cdots = 1.1732422 \approx y(3)
\end{aligned}$$