

Θέμα 1

(α)[12] Έστω $f(x) = 3(x+1)(x-1/2)(x-1)$. Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης στο διάστημα $[-2, 1.5]$ ποιά ρίζα της f θα προσεγγίσουμε; Ποιά ρίζα θα προσεγγίσουμε αν ξεκινήσουμε από το $[-1.25, 2.5]$;

(β)[12] Έστω η $\phi(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$. Διερευνήστε αν έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $[-1, 1]$ και αν ναι, βρείτε ποιό είναι αυτό. Έχει η ϕ σταθερό σημείο σε κάποιο άλλο διάστημα;

(γ)[6] Η συνάρτηση $g(x) = \sin(x) - \frac{1}{10} \ln(x)$ έχει μια ρίζα στο διάστημα $[3, 4]$. Εφαρμόστε 2 βήματα της μεθόδου της τέμνουσας με $x_0 = 3$ και $x_1 = 4$ για την προσέγγιση της ρίζας.

Θέμα 2

(α) Δίνονται τα δεδομένα που αποτελούν μετρήσεις μίας ποσότητας y στο χρόνο t :

t	0	1	1.5	2
y	1	3	5.5	9

(i)[9] Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής στα δεδομένα (κάνοντας μέχρι τέλος τις πράξεις) και σχολιάστε το αποτέλεσμα σας.

(ii)[14] Υπολογίστε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει καλύτερα τα δεδομένα (να φανεί αναλυτικά η διαδικασία και το αποτέλεσμα σας).

(β)[8] Βρείτε τη παράμετρο c ώστε η συνάρτηση $S(x) = \begin{cases} 4 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{4}x^3, & x \in [0, 1] \\ 2 - \frac{1}{2}(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{3}{4}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$ να είναι κυβική spline. Είναι φυσική κυβική spline;

Θέμα 3

(α)[12] Υπολογίστε το πλήθος των υποδιαστημάτων που χρειάζονται για την προσέγγιση του $I = \int_1^3 ((x+2)^4 + e^x) dx$ με ακρίβεια 10^{-1} με τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 και για τα υποδιαστήματα που βρήκατε προσεγγίστε το ολοκλήρωμα. (Δίνεται τύπος του σφάλματος για το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 $R_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$.)

(β)[12] Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x+2} dx$ χωρίζοντας το διάστημα ολοκλήρωσης σε δύο ίσα υποδιαστήματα και εφαρμόζοντας τον κανόνα ολοκλήρωσης Gauss-Legendre δύο σημείων στο κάθε ένα.

Θέμα 4

(α)[12] Για το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων $\begin{cases} x' = -2tx + 3y^2 \\ y' = -3x^2(1-y) \end{cases}$, με αρχικές συνθήκες $x(0) = -1$ και $y(0) = 2$ εφαρμόστε τη μέθοδο του Euler βε βήμα 0.1 για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των $x(0.2)$ και $y(0.2)$. Περιγράψτε πως θα εφαρμοζόταν η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler για το δοσμένο πρόβλημα.

(β)[8] Για τη διαφορική εξίσωση $y' = \frac{y+t}{y-t}$, $y(0) = 1$ εφαρμόστε την Runge-Kutta μέθοδο $y^{n+1} = y^n + \frac{1}{3}(2k_1 + k_2)$, με $k_1 = hf(t^n, y^n)$ και $k_2 = hf(t^n + \frac{3}{2}h, y^n + \frac{3}{2}k_1)$ για την προσέγγιση του $y(0.4)$ όταν $h = 0.2$.

Στο γραπτό σας να εμφανίζεται αναλυτικά όλη η δουλειά σας.

Η ακρίβεια και πληρότητα των διατυπώσεών σας, υπολογισμών και των τελικών αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Για το πρώτο διάστημα συγκλίνει στο $x^* = 1$ και το δεύτερο στο $x^* = -1$.

(β) Με βάση το Θ. συστολής για τη δοσμένη $\phi(x)$ υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $[-1, 1]$. Από το ορισμό του σταθερού σημείου $x^* = \phi(x^*)$ έχουμε $(x^*)^2 - 3x^* - 1 = 0$ και άρα $x_{1,2}^* = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ όπου το $x_2^* = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \in [-1, 1]$. Το δεύτερο σταθερό σημείο $x_2^* \in [3, 4]$.

(γ) Έχουμε $x_2 = 3.0337$ και $x_3 = 3.0301$.

Θέμα 2

(α) Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $P(t) = 2t^2 + 1$. Παρόλο που περιμέναμε το πολυώνυμο παρεμβολής να είναι 3ου βαθμού, τα δεδομένα ακολουθούν (είναι τιμές) ενός πολυώνυμο 2ου βαθμού και η παρεμβολή το υπολογίζει ακριβώς!

Το βέλτιστο πολυώνυμο της $p_2(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ είναι $p_2(t) = 2t^2 + 1$.

(β) Με βάση τις συνθήκες της κυβικής spline το $c = 9/4$ και ναι είναι φυσική κυβική spline.

Θέμα 3

(α) Θέλουμε $|R_S| = \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right|_{\infty} = \max_{x \in [1,3]} \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right| < 10^{-1}$, που δίνει $n > 2.9754$. Άρα θέλουμε $n = 4$ υποδιαστήματα (ακέραιος και άρτιος αριθμός) στο $[1, 3]$ άρα 5 σημεία (κόμβους) για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο (με $h = (3 - 1)/4 = 0.5$).

Οι κόμβοι είναι $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$ και $x_4 = 3$, και ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 μας δίνει $I(f) \approx 593.79$.

(β) $I = \int_0^{0.5} \frac{\sin(x)}{x+2} dx + \int_{0.5}^1 \frac{\sin(x)}{x+2} dx \approx I_1 + I_2 = 0.052637 + 0.12198 = 0.17461$.

Θέμα 4

(α) Έχουμε $x(0.1) = 0.2, y(0.1) = 2.3$ και $x(0.2) \approx 1.7830, y(0.2) \approx 2.3156$.

Για την πεπλεγμένη βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 32-33.

(β) Έχουμε $y(0.2) = 1.24$ και $y(0.4) \approx 1.54897$.