

Θέμα 1

Έστω η εξίσωση $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$.

(α) [8] Κάντε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση και δείξτε (και θεωρητικά) ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες, $-\rho, 0$ και ρ , στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και μάλιστα $\rho \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

(β) [10] Υπολογίστε τις 3 πρώτες προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης με αρχικό διάστημα το $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. Πόσο πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση από την ρ ;

(γ) [10] Θεωρείστε την ακολουθία $(x_n)_{n=0,1,\dots}$ με $x_{n+1} = \phi(x_n)$ με $\phi(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$. Δείξτε ότι η $x_n \rightarrow \rho$, για κάθε $x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Θέμα 2

Τα παρακάτω δεδομένα αποτελούν μετρήσεις μίας ποσότητας y στο χρόνο t

t	10	20	30	40
y	20	60	120	200

(α) [9] Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange που παρεμβάλει στα παραπάνω δεδομένα.

(β) [15] Γνωρίζοντας ότι τα παραπάνω δεδομένα μπορούν να προσομοιωθούν από το ακόλουθο μοντέλο $y = at + bt^2$ υπολογίστε τις τιμές των a και b (δείχνοντας αναλυτικά τη μεθοδολογία και τον τρόπο υπολογισμού τους).

Θέμα 3

(α) [12] Υπολογίστε το πλήθος των κόμβων που χρειάζονται για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(f) = \int_1^2 x \ln(x) dx$ με ακρίβεια 10^{-4} χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 και για τα σημεία (κόμβους) που βρήκατε προσεγγίστε το ολοκλήρωμα. (Δίνεται ότι ο τύπος του σφάλματος για το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 είναι $R_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$.)

(β) [14] Θεωρείστε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, 1]$ ο οποίος παράγεται ως εξής: $\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 P(x) dx$, όπου $P(x)$ το γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλει την $f(x)$ στο $x_0 = 0$ και $x_1 = 3/4$. Υπολογίστε αυτόν το κανόνα στη συνήθη μορφή, $Q_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$, και μετασχηματίστε τον για να κατασκευάσετε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x) dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$.

Θέμα 4

(α)[10] Για το Π.Α.Τ. $y' = -5y$, $y(0) = 1$, θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή $y(2)$ με βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$. Εξηγείστε ποιά από τις δύο μεθόδους, την (άμεση) Euler ή την πεπλεγμένη Euler πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, και επιλέξτε την για να δώσετε μια προσέγγιση της $y(2)$.

(β)[12] Για το Π.Α.Τ. του (α) ερωτήματος και με το ίδιο βήμα $h = 0.5$ εφαρμόστε την μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης του Heun: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, \tilde{y}^{n+1})]$, για την προσέγγιση του $y(2)$. Σχολιάστε και εξηγείστε το αποτέλεσμα σας και σε σχέση με αυτό που πήρατε από το (α) ερώτημα αλλά και με την αναλυτική λύση του Π.Α.Τ.

Στο γραπτό σας να εμφανίζεται αναλυτικά όλη η δουλειά σας, διαφορετικά δεν θα βαθμολογηθεί. Η ακρίβεια και πληρότητα των διατυπώσεων, υπολογισμών και των τελικών αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Προφανώς $f(0) = 0$. Ακόμη, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ και $f(\pi) = \frac{\pi}{2} > 0$ άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\frac{\pi}{3}, \pi)$. Ακόμη, $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x)$ και $f''(x) = \sin(x) > 0$ για $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$, άρα $f'(x) > \frac{1}{2} - \cos(\frac{\pi}{3}) = 0$ για $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ και η f είναι γνήσια αύξουσα. Επομένως η ρίζα στο διάστημα $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$, έστω ρ , είναι μοναδική. Από το γεγονός ότι $f(-x) = -\frac{x}{2} - \sin(-x) = -f(x)$ προκύπτει ότι $-\rho$ είναι επίσης ρίζα και μάλιστα μοναδική στο διάστημα $(-\pi, -\frac{\pi}{3})$. Το ότι δεν υπάρχει άλλη ρίζα προκύπτει από τις ανισότητες $\frac{x}{2} - 1 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 1$, οι οποίες μας λένε ότι $f(x) > 0$ για $x > 2$ και $f(x) < 0$ για $x < -2$.

(β) Η πρώτη προσέγγιση της ρ είναι η $x_1 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \pi) = \frac{2\pi}{3}$. Έχουμε ότι $f(x_1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, άρα $\rho \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. Η δεύτερη προσέγγιση είναι η $x_2 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}$ και έχουμε $f(x_2) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$ άρα $\rho \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$. Η τρίτη προσέγγιση $x_3 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{7\pi}{12}$. Η απόσταση της x_3 από τη ρ δίνεται από

$$|x_3 - \rho| \leq \frac{b - a}{2^n} = \frac{\pi - \pi/3}{2^3} = \frac{\pi}{12} \approx 0.2618.$$

(γ) Δείχνουμε ότι η $\phi(x)$ ικανοποιεί στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ το θεώρημα συστολής. Κατ' αρχήν $\phi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} + 1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $\phi(\pi) = \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ακόμη $\phi'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$ η οποία μηδενίζεται για $x = \frac{2\pi}{3}$ και έχουμε $\phi(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, άρα η ϕ απεικονίζει το διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ στον εαυτό του.

Το $\max_{x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]} |\phi'(x)| = \max_{x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]} |\frac{1}{2} + \cos(x)| = \frac{1}{2}$ (εφόσον $\cos(x) \in [-1, 0]$ για $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$). Συνεπώς με βάση το θεώρημα η ακολουθία συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο x^* στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ το οποίο είναι ρίζα της $f(x)$ άρα αναγκαστικά $x^* = \rho$.

Θέμα 2

(α) $P_2(t) = 0.1t^2 + t$.

(β) Ψάχνουμε το βέλτιστο πολυώνυμο $p_2(t) = at + bt^2$, θέλουμε δηλ. να βρούμε τους συντελεστές a, b , ε.ω. η συνάρτηση $E(a, b) = \sum_{i=1}^4 [y_i - (at_i + bt_i^2)]^2$ να ελαχιστοποιείται. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται οι 2 συνθήκες

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^4 t_i (y_i - at_i - bt_i^2) = 0, \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^4 t_i^2 (y_i - at_i - bt_i^2) = 0,$$

Από όπου παίρνουμε το σύστημα κανονικών εξισώσεων:

$$a \sum_{i=1}^4 t_i^2 + b \sum_{i=1}^4 t_i^3 = \sum_{i=1}^4 t_i y_i \quad (1)$$

$$a \sum_{i=1}^4 t_i^3 + b \sum_{i=1}^4 t_i^4 = \sum_{i=1}^4 t_i^2 y_i \quad (2)$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	t_i	y_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	$t_i y_i$	$t_i^2 y_i$
1	10	20	100	1000	10000	200	2000
2	20	60	400	8000	64000	1200	24000
3	30	120	900	27000	810000	3600	108000
4	40	200	1600	6400	2560000	8000	320000
$\sum =$	-	-	3000	100000	3540000	13000	454000

Η λύση του συστήματος κανονικών εξισώσεων (1)-(2) δίνει $a = 1, b = 0.1$, άρα το $p_2(t) = t + 0.1t^2$.

Θέμα 3

(α) Θέλουμε $|R_S| = \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right|_\infty = \max_{x \in [1,2]} \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right| < 10^{-4}$, όπου $f^{(4)}(x) = 2/x^3$ (τέταρτη παράγωγος της $f(x) = x \ln(x)$) και $\max_{x \in [1,2]} |2/x^3| = 2$, συνεπώς

$$\frac{1}{180} \cdot h^4 \cdot 2 < 10^{-4} \Rightarrow h^4 < \frac{180 \cdot 10^{-4}}{2} \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} < 0.308 \Rightarrow n > 3.2466$$

Άρα θέλουμε $n = 4$ υποδιαστήματα (ακέραιος και άρτιος αριθμός) στο $[1, 2]$ άρα 5 σημεία (κόμβους) για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο (με $h = (2-1)/4 = 0.25$).

Οι κόμβοι είναι $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75$ και $x_4 = 2$, άρα ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 μας δίνει

$$I(f) \approx \frac{h}{3} [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)] = \dots = 0.636309.$$

(β) Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $P(x) = f(0) + \frac{f(3/4)-f(0)}{3/4-0}x = f(0)(1-\frac{4}{3}x) + \frac{4}{3}f(3/4)x$ (μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους). Βρίσκουμε τον κανόνα ολοκλήρωσης (ολοκληρώνοντας το $P(x)$) ως

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(3/4)$$

άρα $w_0 = 1/3, w_1 = 2/3, x_0 = 0, x_1 = 3/4$. (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 14, σελ 3-4 & 13)

Για να κατασκευάσουμε τον απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x)dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$, χρειαζόμαστε την αλλαγή μεταβλητής (όπως στους τύπους Gauss ΔΙΑΛΕΞΗ 16 σελ. 2) από το $[0, 1]$ στο $[a, b]$. Άρα, αν $t \in [0, 1]$ και $x \in [a, b]$ από $x = mt + c$ (γραμμικός μετασχηματισμός από το ένα διάστημα στο άλλο, για $t = 0$ το $x = a$ και για $t = 1$ το $x = b$) έχουμε $m = b - a, c = a$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= (b-a) \int_0^1 f((b-a)t + a)dt \approx (b-a) \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{3}{4}(b-a) + a\right) \right) \\ &\approx (b-a) \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right) \right) \end{aligned}$$

Θέμα 4

(α) Για να χρησιμοποιήσουμε την (άμεση) μέθοδο Euler πρέπει να επιλέξουμε βήμα h έτσι ώστε οι υπολογισμοί μας να είναι ευσταθείς. Για το δοσμένο Π.Α.Τ. η συνθήκη ευστάθειας δίνει ότι $|1-5 \cdot h| < 1 \Rightarrow h < -2/-5 = 0.4$. Συνεπώς η άμεση Euler δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με $h = 0.5$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 15-16 και σελ. 23-24). Η πεπλεγμένη Euler είναι πάντα ευσταθής και δίνει

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) = y^n + 0.5 \cdot (-5y^{n+1}) \Rightarrow y^{n+1} = y^n - 2.5y^{n+1} \Rightarrow (1+2.5)y^{n+1} = y^n$$

άρα (για να αποφύγουμε τον υπολογισμό των ενδιάμεσων βημάτων)

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{3.5} \Rightarrow y^{n+1} = y^0 \left(\frac{1}{3.5} \right)^{n+1} \Rightarrow y^4 = \left(\frac{1}{3.5} \right)^4 \cdot 1 = 0.00666389 \approx y(2).$$

(β) Η μέθοδος Heun (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 18 σελ. 6) δίνει

$$\begin{aligned} \tilde{y}^1 &= y^0 + hf(y^0) = 1 - 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = -1.5 \quad (\text{άμεση Euler για πρόβλεψη}) \\ y^1 &= 1 + \frac{0.5}{2} [-5y^0 - 5 \cdot \tilde{y}^1] = 1.625 \quad (\text{διόρθωση}) \\ &\vdots \\ y^2 &= 2.6406 \\ y^3 &= 4.2910 \\ y^4 &= 6.9729 \end{aligned}$$

Η μέθοδος προφανώς αποκλίνει από τη σωστή συμπεριφορά (δηλ. από το ότι η πραγματική λύση $y(t) = e^{-5t} \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$) και αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος είναι ασταθής για την δοσμένη επιλογή του h . Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler, αν και μικρότερης τάξης ακρίβειας, έχει τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά στη προσέγγιση της πραγματικής λύσης ($y(2) = e^{-10} = 0.0000454$).