

Θέμα 1

[18] Απαντήστε σωστό ή λάθος στις παρακάτω προτάσεις αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

- (i) Ο αριθμός 25.375 στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ο 11001.01 στο δυαδικό.
 (ii) Σ' έναν υποθετικό Η/Υ με σύνολο αριθμών μηχανής $M(\beta, t, L, U) \equiv M(2, 16, -30, 30)$ και που κάνει χρήση αποκοπής, ισχύει $fl(1 + 2^{-16}) > 1$.
 (iii) Αν η μέθοδος διχοτόμησης μπορεί εφαρμοστεί στο $[1, 4]$ τότε χρειάζονται 12 βήματά της για να προσεγγίσει τη ρίζα με ακρίβεια 10^{-3} .
 (iv) Για n διακριτά δεδομένα $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ το πολυώνυμο παρεμβολής n -βαθμού σε αυτά είναι μοναδικό.
 (v) Αν ο κανόνας ολοκλήρωσης $\int_0^1 f(x) \approx c_0 f(0) + c_1 f(1)$ είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι πρώτου βαθμού, τότε $c_0 = c_1 = 1$.
 (vi) Για την clamped κυβική spline $S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + ax + x^2 - x^3 & x \in [0, 1] \\ s_1(x) = 1 + b(x-1) - 2(x-1)^2 + (x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$ ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες $S'(0) = 0$ και $S'(2) = -2$.

Θέμα 2

- (α) [10] Έστω η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = -Ax_n^2 + 2x_n$, $A > 0$. Υπολογίστε κατάλληλο διάστημα $[a, b]$ όπου η μέθοδος συγκλίνει για κάθε x_0 στο μη-μηδενικό σταθερό σημείο. Ποιά η τάξη σύγκλισης της μεθόδου;
 (β) [10] Εφαρμόστε τη μέθοδο *Newton-Raphson* στη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}, & x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$. Σε ποιές περιπτώσεις συγκλίνει η μέθοδος, αν συγκλίνει, και αν συγκλίνει ποιά είναι η τάξη σύγκλισης της;

Θέμα 3

Έστω τα εξής δεδομένα

x	-0.5	0	0.25	0.5	0.75
$y = f(x)$	0.0300	0.2690	0.5622	0.8176	0.9400

- (α) [12] Υπολογίστε το *πολυώνυμο παρεμβολής* στα 4 τελευταία δεδομένα με χρήση διαιρεμένων διαφορών.
 (β) [12] Προσαρμόστε σε όλα τα δεδομένα την συνάρτηση $y = \frac{1}{1 + e^{-(ax+b)}}$, η οποία για $0 < y < 1$ χρησιμοποιείται ευρήτατα στη μηχανική μάθηση (machine learning).

Θέμα 4

(α) Η κατανομή του συνολικού εισοδήματος του πληθυσμού μιας χώρας δίνεται στον παρακάτω πίνακα όπου συσχετίζεται το αθροιστικό ποσοστό του πληθυσμού, $x(\%)$, με το αθροιστικό εισόδημα $L(x)(\%)$ που του αντιστοιχεί

$x(\%)$	0	10	20	40	60	80	90	100
$L(x)(\%)$	0	0.3	7.5	20	37	60	75	100

- (i) [12] Ο δείκτης ανισότητας κατανομής εισοδήματος Gini ορίζεται ως $G = 1 - 2 \cdot 10^{-4} \int_0^{100} L(x) dx$ και κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1 (0 για απόλυτως ίση κατανομή). Με βάση τα δεδομένα υπολογίστε την τιμή του G για τη συγκεκριμένη χώρα με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια (αιτιολογώντας τις επιλογές σας).
 (ii) [5] Προσεγγίστε, με βάση τα δεδομένα, την $L'(90)$ και την $L''(90)$ με δεύτερης τάξης ακρίβειας προσεγγίσεις.
 (β) [12] Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \int_0^4 (x^2 y) dy dx$ με χρήση του κανόνα *Gauss-Legendre* 2-σημείων.

Θέμα 5

[14] Για το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) $y' = ty^2$, $y(0) = 1$ εφαρμόστε την παρακάτω *Runge-Kutta* μέθοδο 3 σταδίων με βήμα $h = 0.5$ για να προσεγγίσετε την τιμή $y(1)$.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \end{array} \quad \begin{cases} k^{n,i} = f\left(t^{n,i}, y^n + h \sum_{j=1}^3 a_{ij} k^{n,j}\right), & i = 1, \dots, 3, \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^3 b_i k^{n,i} \end{cases}$$

Στους υπολογισμούς σας χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά ψηφία
 Στο γραπτό σας να εμφανίζεται αναλυτικά όλη η δουλειά σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(i) Λάθος, είναι ο 11001.011.

(ii) Λάθος, γιατί $fl(1) = (0.10 \dots 0)_2 \cdot 2^1$ και $fl(2^{-16}) = (0.10 \dots 0)_2 \cdot 2^{-15}$ όμως $fl(fl(1) + fl(2^{-16})) = (0.10 \dots 01)_2 \cdot 2^1 = (0.10 \dots 0)_2 \cdot 2^1 = 1$. Σωστή αιτιολόγηση είναι επίσης ότι το μηδεν της μηχανής είναι $eps = \frac{1}{2}\beta^{1-t} = 2^{-16}$ όπου $1 + eps = 1$.

(iii) Σωστό, έχουμε $|x_n - x^*| \leq \frac{4-1}{2^n} \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{3}{2^n} \leq 10^{-3} \Rightarrow n \geq \frac{\ln(3 \cdot 10^3)}{\ln(2)} \approx 11.55$, στρογγυλεύοντας $n = 12$.

(iv) Λάθος, το πολυώνυμο n βαθμού, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, έχει $n + 1$ αγνώστους συντελεστές και εφόσον δίνονται n δεδομένα (σημεία παρεμβολής) ένας άγνωστος θα είναι ελεύθερη μεταβλητή. Άρα υπάρχουν απείρα n βαθμού πολυώνυμα.

(v) Λάθος, τα βάρη πρέπει να είναι $c_0 = c_1 = \frac{1}{2}$ κανόνας τραπεζίου. Σωστή αιτιολόγηση είναι η απόδειξη ότι $c_0 = c_1 = \frac{1}{2}$ με ολοκλήρωση για $f(x)$ να είναι 1 και x (απροσδιόριστοι συντελεστές).

(vi) Σωστό, από $s_0(1) = s_1(1) \Rightarrow 1 + a + 1 - 1 = 1 \Rightarrow a = 0$ και από $s'_0(1) = s'_1(1) \Rightarrow a + 2 - 3 = b \Rightarrow b = -1$. Άρα $s'_0(0) = 0$ και $s'_1(2) = b - 1 = -2$.

Θέμα 2

(α) Το σταθερό σημείο είναι το $x^* = 1/A$. Ψαχνουμε κλειστό διάστημα που περιέχει το $1/A$ και να ισχύει σε αυτό το Θ . Συστολής. Βρίσκουμε πρώτα σε ποιο διάστημα η $\phi(x) = 2x - Ax^2$ είναι συστολή,

$$|\phi'(x)| < 1 \Rightarrow |2 - 2Ax| < 1 \Rightarrow -3 < -2Ax < -1 \Rightarrow \frac{1}{2A} < x < \frac{3}{2A}, \text{ και } x^* = 1/A \in \left(\frac{1}{2A}, \frac{3}{2A}\right)$$

Βλέπουμε επίσης ότι $\phi(x) = 2 - 2Ax = 0$ στο $x = 1/A$ (ακρότατο) και ότι $\phi'(x) > 0$ για $x > \frac{1}{A}$, άρα ϕ αυξουσα στο $(\frac{1}{A}, \frac{3}{2A})$ και αρα φθίνουσα στο $(\frac{1}{2A}, \frac{1}{A})$. Υπολογίζοντας τα $\phi(1/2A) = 3/4A$ και $\phi(3/2A) = 3/4A$ έχουμε

$$1/2A \leq \phi(x) \leq 3/2A \quad (\text{πεδίο τιμών υποσύνολο του πεδίου ορισμού})$$

Συνεπώς, για οποιο κλειστο διάστημα $[a, b] \subset (\frac{1}{2A}, \frac{3}{2A})$ που περιέχει το $1/A$ η μέθοδος συγκλίνει στο $x^* = 1/A$ για κάθε $x_0 \in [a, b]$ και εφόσον $\phi'(x^*) = \phi'(1/A) = 0$ συγκλίνει με τάξη μεγαλύτερη του ένα.

(β) Για $x_0 > 0$ η μέθοδος δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{2/3}}{\frac{2}{3x_n^{1/3}}} = x_n - \frac{3}{2}x_n = -\frac{1}{2}x_n \quad \text{φθίνουσα ακολουθεία που } \rightarrow x^* = 0.$$

Εφόσον η ρίζα είναι το 0 έχουμε

$$|x_{n+1} - 0| = \frac{1}{2}|x_n - 0| \Rightarrow |\epsilon_{n+1}| = \frac{1}{2}|\epsilon_n|$$

δηλ. ορισμός γραμμικής συγκλισης. Επίσης σωστή αιτιολόγηση είναι ότι $f'(0) = 0$ (ρίζα με πολλαπλότητα). Για $x_0 < 0$ η μέθοδος δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-\sqrt{-x_n}}{\frac{-1}{2\sqrt{-x_n}}} = -x_n \quad \text{η ακολουθεία ταλαντώνεται και άρα δεν συγκλίνει.}$$

Θέμα 3

(α) Το πολυώνυμο παρεμβολής εδώ θα είναι το πολύ 3ου βαθμού ($p_3 \in \mathbf{P}_3$) και στη μορφή Newton $p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$. Ο πίνακας διαφορών είναι:

x_i	$y_i = \Delta^{(0)}$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
0	0.269 ↘			
		1.1728 ↘		
0.25	0.5622 ↗		-0.3024 ↘	
		1.0216 ↗		-1.0547
0.5	0.8176		-1.064 ↗	
		0.4896		
0.75	0.940			

Άρα $a_0 = 0.269$, $a_1 = 1.1728$, $a_2 = -0.3024$ και $a_3 = -1.0547$.

(β) Το δοσμένο μοντέλο μπορεί να γραμμικοποιηθεί ως εξής

$$\frac{1}{y} = 1 + e^{-(ax+b)} \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = e^{-(ax+b)} \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = ax + b \Rightarrow Y = ax + b$$

Με βάση τα δεδομένα

i	x_i	x_i^2	$Y_i = \ln(y_i/(1-y_i))$	$x_i Y_i$
1	-0.5		-3.476	
2	0		-0.9997	
3	0.25		0.2501	
4	0.5		1.500	
5	0.75		2.7515	
$\Sigma =$	1.0	1.1250	0.0260	4.6143

και έχουμε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 1.1250 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6143 \\ 0.0260 \end{bmatrix}$$

το οποίο δίνει $a \approx 4.9828$ και $b \approx -0.9914$.

Θέμα 4

(α) (i) Με βάση τα δεδομένα θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα στο δείκτη G . Έχουμε $N = 7$ υποδιαστήματα κατά x που όμως δεν είναι όλα ίσα. Από το 0 έως το 20 έχουμε 2 ίσα υποδιαστήματα και το ίδιο ισχύει και από το 80-100, άρα εδώ θα εφαρμοστεί ο κανόνας ολοκλήρωσης Simpson 1/3. Στα υπολοιπα ο Simpson 3/8. Άρα

$$\int_0^{100} L(x)dx = \int_0^{20} L(x)dx + \int_{20}^{80} L(x)dx + \int_{80}^{100} L(x)dx \approx Q_{1/3}^S + Q_{3/8}^S + Q_{1/3}^S = 65 + 1788.75 + 1533.33 = 3387.083$$

Άρα $G = 1 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot 3387.083 = 0.3226$.

$$(ii) L'(90) \approx \frac{L(100) - L(80)}{20} = (100 - 60)/20 = 20 \text{ και}$$

$$L''(90) \approx \frac{L(100) - 2L(90) + L(80)}{10^2} = (100 - 150 + 60)/100 = 0.1$$

(β) Προσεγγίζουμε πρώτα το $\int_0^4 (x^2 y) dy = x^2 \int_0^4 y dy$. Κανοντας αλλαγή μεταβλητής $y = 2t + 2$ έχουμε

$$x^2 \int_0^4 y dy = x^2 \int_{-1}^1 (2t+2) 2dt \approx 2x^2 [(-2/\sqrt{3} + 2) + (2/\sqrt{3} + 2)] = 8x^2$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\int_{-1}^1 8x^2 dx \approx 8[(-1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2] = \frac{16}{3}.$$

Θέμα 5

Με $f(t, y) = ty^2$ και βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$ έχουμε, για $n = 0$ (πρώτο βήμα), $t^0 = 0$ και $t^{0,i} = t^0 + h\tau_i$ έχουμε

$$k^{0,1} = hf(t^{0,1}, y_0) = 0.5f(0, 1) = 0.5 \cdot 0 = 0$$

$$k^{0,2} = hf(t^{0,2}, y_0 + \frac{1}{2}k^{0,1}) = 0.5f(0.25, 1) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$$

$$k^{0,3} = hf(t^{0,3}, y_0 - k^{0,1} + 2k^{0,2}) = 0.5f(0.5, 0.125) = 0.5 \cdot 0.7812 = 0.3906$$

$$y(0.5) \approx y^1 = 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0.125 + \frac{1}{6} \cdot 0.3906 = 1.1485$$

Το δεύτερο βήμα $n = 1$ $t^1 = 0.5$ και $t^{1,i} = t^1 + h\tau_i$ έχουμε

$$k^{1,1} = hf(t^{1,1}, y_1) = 0.5f(0.5, 1.1485) = 0.5 \cdot 0.6595 = 0.3297$$

$$k^{1,2} = hf(t^{1,2}, y_1 + \frac{1}{2}k^{1,1}) = 0.5f(0.75, 1.3133) = 0.5 \cdot 1.2936 = 0.6468$$

$$k^{1,3} = hf(t^{1,3}, y_1 - k^{1,1} + 2k^{1,2}) = 0.5f(1, 2.1123) = 0.5 \cdot 4.4617 = 2.2309$$

$$y(1) \approx y^2 = 1.1484 + \frac{1}{6} \cdot 0.3297 + \frac{2}{3} \cdot 0.6468 + \frac{1}{6} \cdot 2.2309 = 2.0064$$