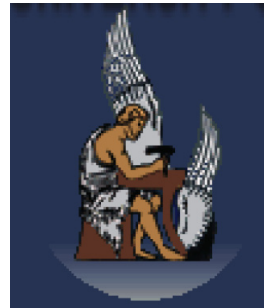


# Αριθμητική Ανάλυση

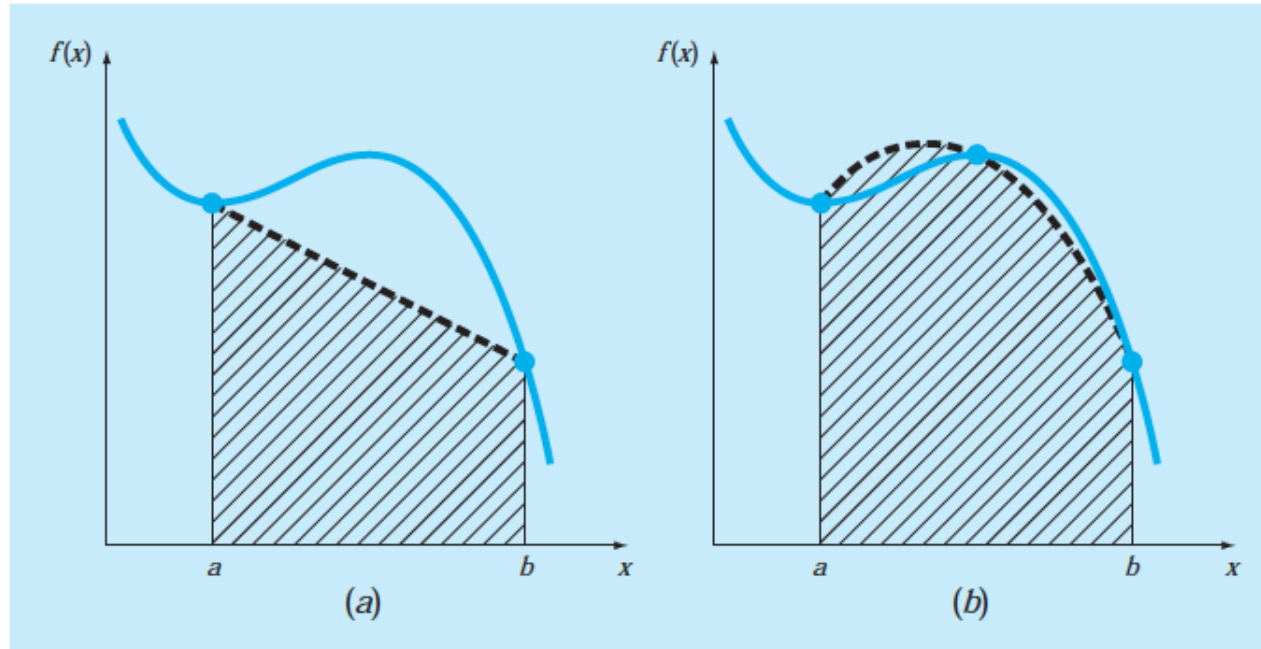
Αργύρης Δελής

Διάλεξη 15η

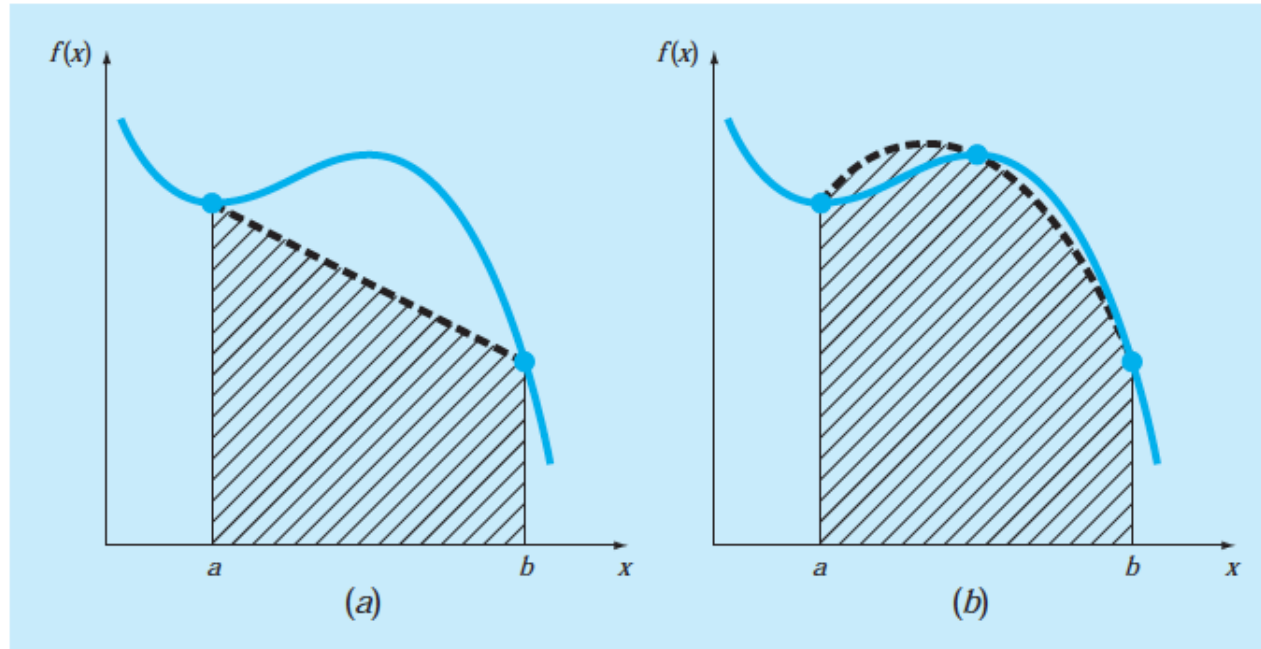


**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης  
Πολυτεχνείο Κρήτης**

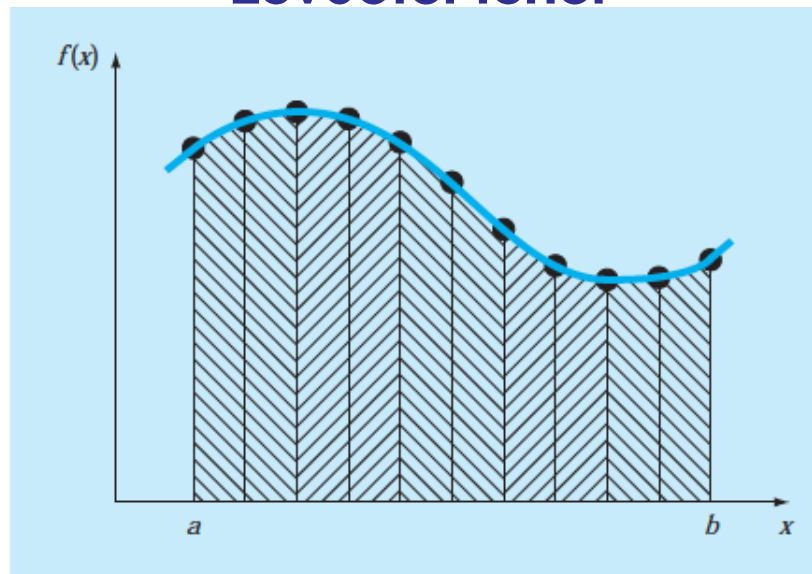
# Οι απλοί τύποι του Τραπεζίου και του Simpson 1/3



# Οι απλοί τύποι του Τραπεζίου και του Simpson 1/3



## Σύνθετοι τύποι

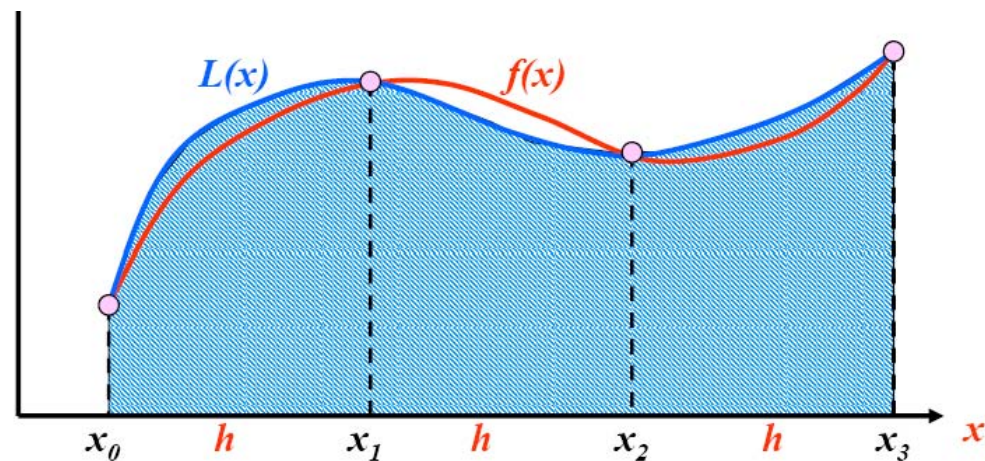


## Ο (απλός) τύπος του Simpson 3/8

Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο **3ου βαθμού** στα σημεία  $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b + 3h, x_3 = b$  με  $h = (b - a)/3$  τότε

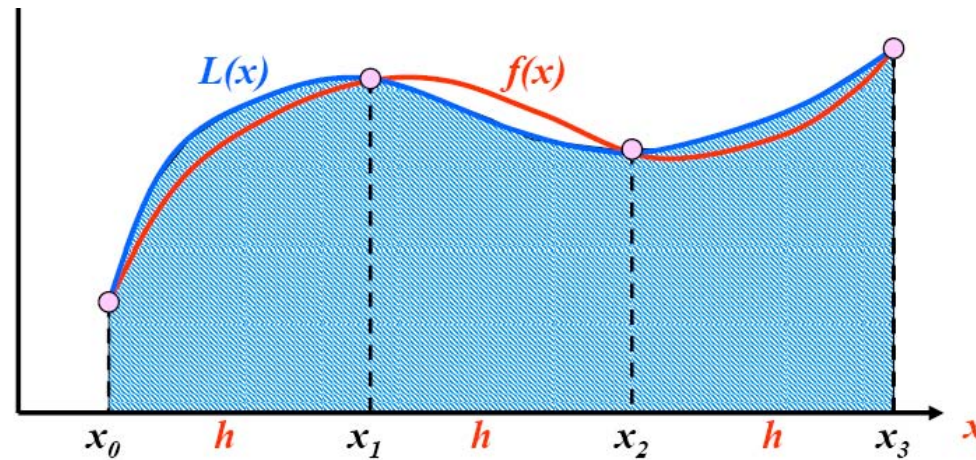
## Ο (απλός) τύπος του Simpson 3/8

Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο **3ου βαθμού** στα σημεία  $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b + 3h, x_3 = b$  με  $h = (b - a)/3$  τότε



## Ο (απλός) τύπος του Simpson 3/8

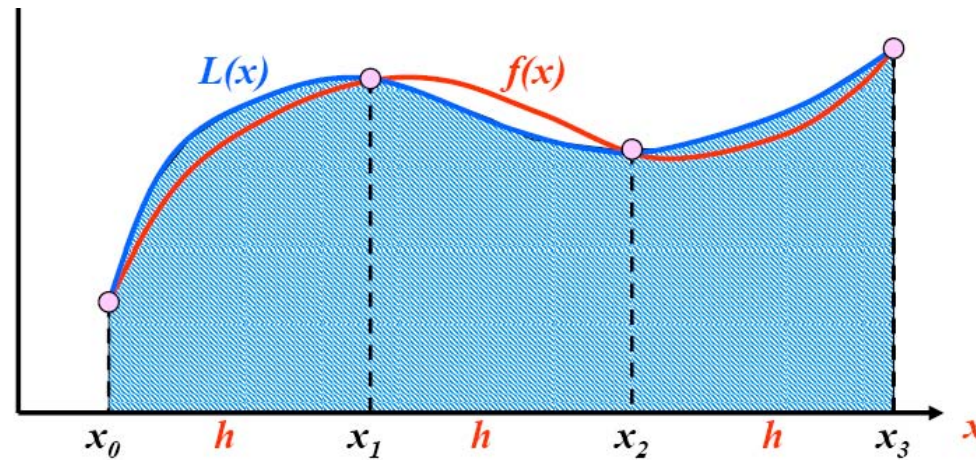
Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο **3ου βαθμού** στα σημεία  $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b + 3h, x_3 = b$  με  $h = (b - a)/3$  τότε



$$\text{Τότε } I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_3(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^3 f(x_i) L_i(x) dx$$

## Ο (απλός) τύπος του Simpson 3/8

Αν παρεμβάλουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση μέ το πολυώνυμο **3ου βαθμού** στα σημεία  $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b + 3h, x_3 = b$  με  $h = (b - a)/3$  τότε



$$\text{Τότε } I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_3(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^3 f(x_i)L_i(x)dx$$

Συνεπώς ο απλός τύπος του Simpson 3/8 γράφεται

$$Q_{3/8}(f) = \frac{3h}{8} \left[ f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$



Σφάλμα στην αριθμητική ολοκλήρωση με τον απλό τύπος του Simpson 3/8  
Για παρεμβολή με πολυώνυμο 3ου βαθμού και από το σφάλμα πολυωνυμικής  
παρεμβολής έχουμε

$$R_{3/8}(f) = -\frac{1}{4!} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x_3 - x) f^{(4)}(\xi)$$

Με χρήση του **θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής του διαφορικού λογισμού**

$$R_{3/8}(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

Από τον τύπο του σφάλματος μπορούμε επίσης να βγάλουμε το συμπέρασμα  
ότι ο τύπος του Simpson 3/8 είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού  $\leq 3$ .



**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$  με τους τύπους του Simpson 1/3 και 3/8 και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 xe^{2x} dx$  με τους τύπους του Simpson 1/3 και 3/8 και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

Με το τύπο Simpson 1/3

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 xe^{2x} dx \approx \frac{h}{3} [f(0) + 4f(2) + f(4)] \\ &= \frac{2}{3} [0 + 4(2e^4) + 4e^8] = 8240.411 \\ \varepsilon &= \frac{5216.926 - 8240.411}{5216.926} = -57.96\% \end{aligned}$$

**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 xe^{2x} dx$  με τους τύπους του Simpson 1/3 και 3/8 και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

Με το τύπο Simpson 1/3

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 xe^{2x} dx \approx \frac{h}{3} [f(0) + 4f(2) + f(4)] \\ &= \frac{2}{3} [0 + 4(2e^4) + 4e^8] = 8240.411 \\ \varepsilon &= \frac{5216.926 - 8240.411}{5216.926} = -57.96\% \end{aligned}$$

Με το τύπο Simpson 3/8

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 xe^{2x} dx \approx \frac{3h}{8} \left[ f(0) + 3f\left(\frac{4}{3}\right) + 3f\left(\frac{8}{3}\right) + f(4) \right] \\ &= \frac{3(4/3)}{8} [0 + 3(19.18922) + 3(552.33933) + 11923.832] = 6819.209 \\ \varepsilon &= \frac{5216.926 - 6819.209}{5216.926} = -30.71\% \end{aligned}$$

**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 xe^{2x} dx$  με τους τύπους του Simpson 1/3 και 3/8 και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

Με το τύπο Simpson 1/3

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 xe^{2x} dx \approx \frac{h}{3} [f(0) + 4f(2) + f(4)] \\ &= \frac{2}{3} [0 + 4(2e^4) + 4e^8] = 8240.411 \\ \varepsilon &= \frac{5216.926 - 8240.411}{5216.926} = -57.96\% \end{aligned}$$

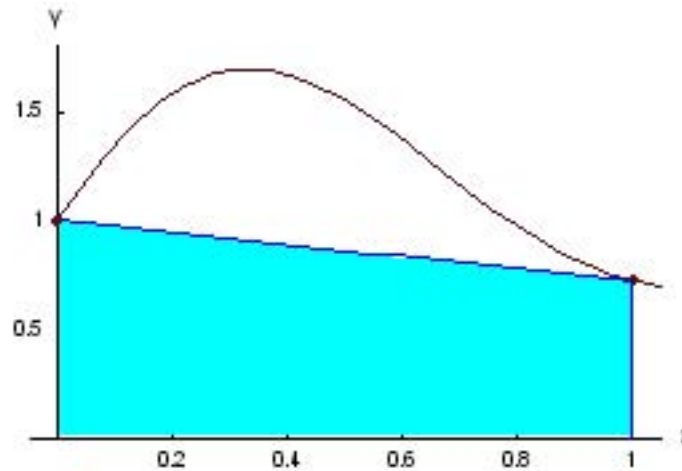
Με το τύπο Simpson 3/8

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 xe^{2x} dx \approx \frac{3h}{8} \left[ f(0) + 3f\left(\frac{4}{3}\right) + 3f\left(\frac{8}{3}\right) + f(4) \right] \\ &= \frac{3(4/3)}{8} [0 + 3(19.18922) + 3(552.33933) + 11923.832] = 6819.209 \\ \varepsilon &= \frac{5216.926 - 6819.209}{5216.926} = -30.71\% \end{aligned}$$

**Άσκηση** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^1 (1 + e^{-x} \sin(4x)) dx$  με τους τύπους του απλούς τύπους του τραπεζίου και Simpson 1/3 και 3/8.

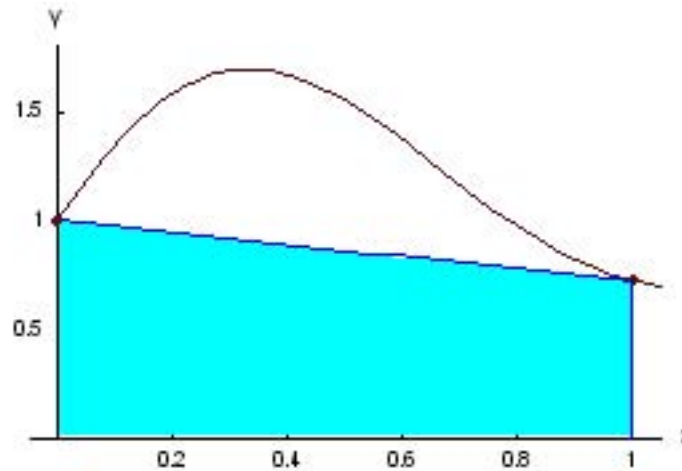
**Άσκηση** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^1 (1 + e^{-x} \sin(4x)) dx$  με τους τύπους του απλούς τύπους του τραπεζίου και Simpson 1/3 και 3/8.

**Λύση** Με το τύπο τραπεζίου

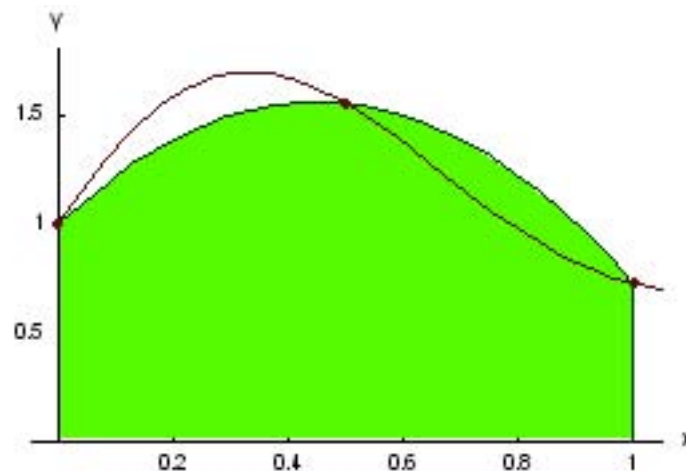


**Άσκηση** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^1 (1 + e^{-x} \sin(4x)) dx$  με τους τύπους του απλού τύπου του τραπεζίου και Simpson 1/3 και 3/8.

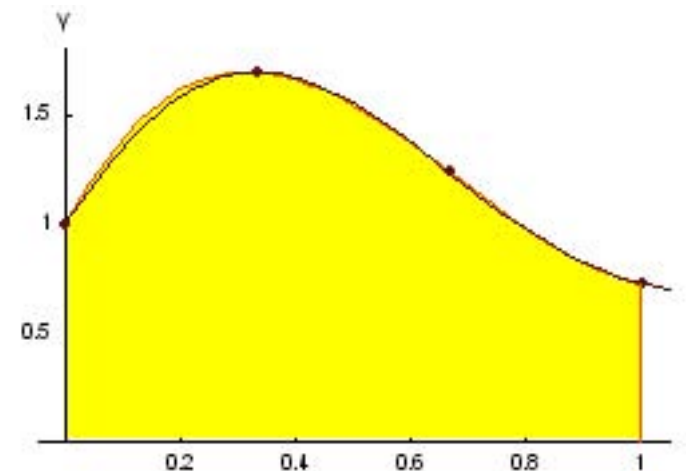
**Λύση** Με το τύπο τραπεζίου



Με τους τύπους Simpson 1/3



Simpson 3/8

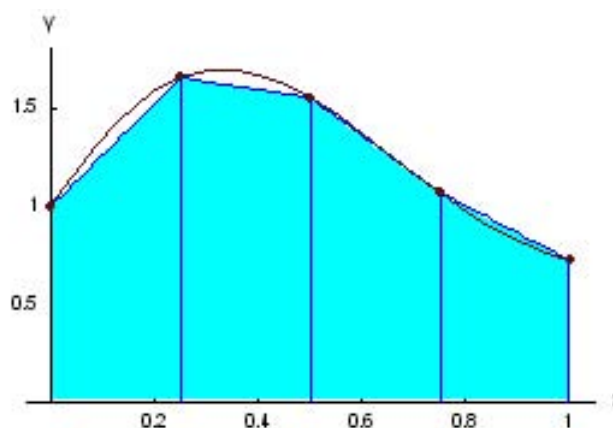




Για σωστότερη (και πιο δίκαιη) σύγκριση μεταξύ των μεθόδων, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων με βάση (το πλήθος) του αριθμού υπολογισμών τιμών της συνάρτησης που χρειάζονται για κάθε μέθοδο. Στο παράδειγμα με  $h = .25$  (και χρήση σύνθετων τύπων) έχουμε

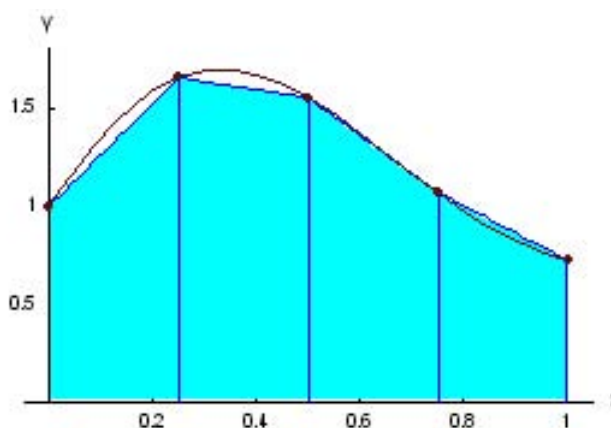
Για σωστότερη (και πιο δίκαιη) σύγκριση μεταξύ των μεθόδων, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων με βάση (το πλήθος) του αριθμού υπολογισμών τιμών της συνάρτησης που χρειάζονται για κάθε μέθοδο. Στο παράδειγμα με  $h = .25$  (και χρήση σύνθετων τύπων) έχουμε

Με το σύνθετο τύπο τραπεζίου

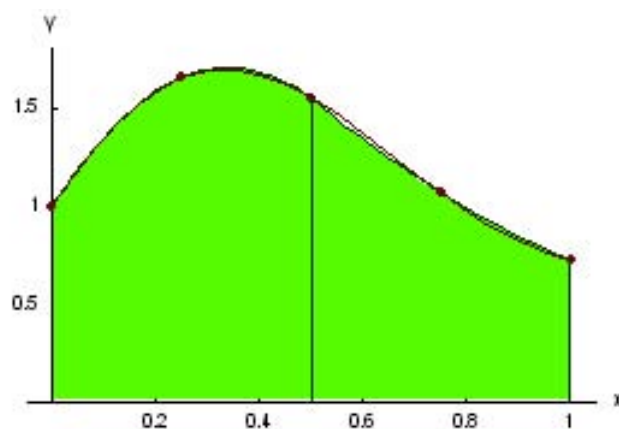


Για σωστότερη (και πιο δίκαιη) σύγκριση μεταξύ των μεθόδων, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων με βάση (το πλήθος) του αριθμού υπολογισμών τιμών της συνάρτησης που χρειάζονται για κάθε μέθοδο. Στο παράδειγμα με  $h = .25$  (και χρήση σύνθετων τύπων) έχουμε

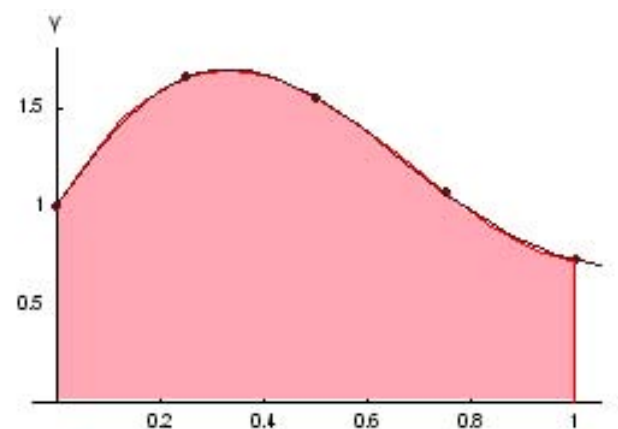
Με το σύνθετο τύπο τραπεζίου



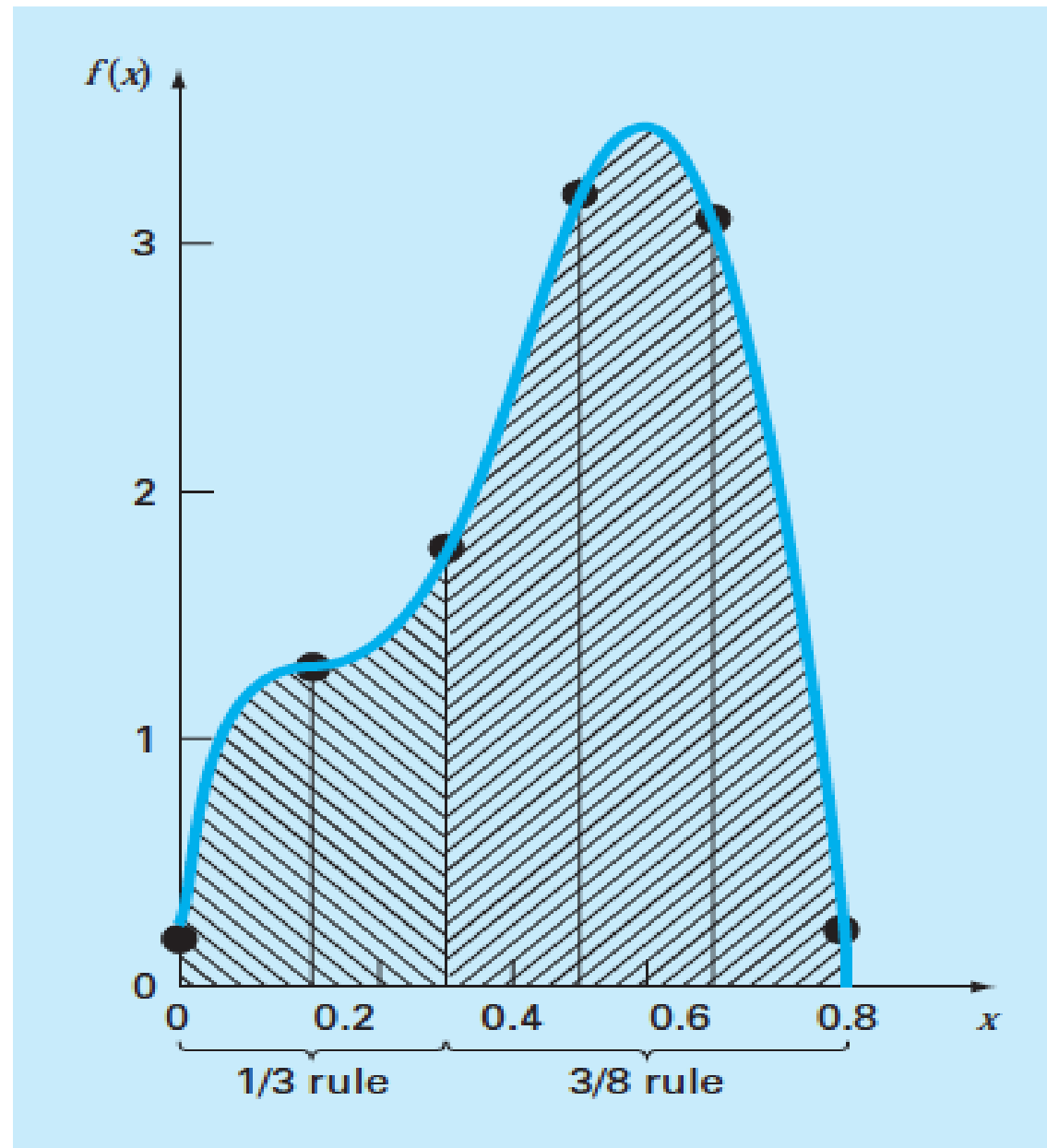
Με τους τύπους: Simpson 1/3 (σύνθετο)



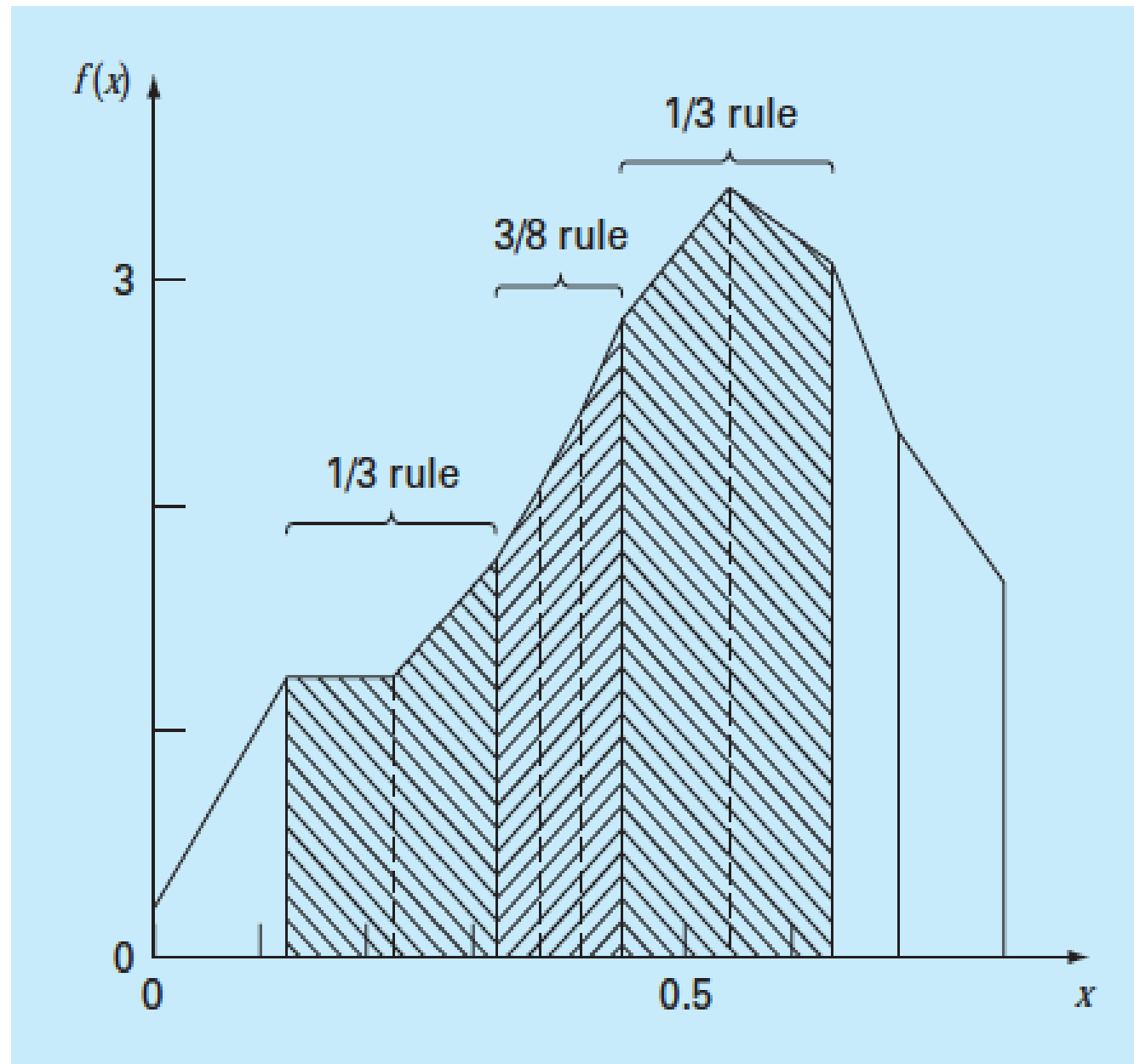
Simpson 3/8 (απλό)



# Συνδυασμός τύπων ολοκλήρωσης (συνάρτηση)



# Συνδυασμός τύπων ολοκλήρωσης (δεδομένα)



## Ανοιχτοί τύποι ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έαν τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης δεν περιλαμβάνονται στον υπολογισμό των τύπων δηλ. οι κόμβοι δίνονται ως

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_0 = a + h, \quad h = \frac{b - a}{n + 2}$$

Τότε ο γενικός ανοικτός τύπος Newton-Cotes δίνεται από

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \text{σφάλμα}$$

## Ανοιχτοί τύποι ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έαν τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης δεν περιλαμβάνονται στον υπολογισμό των τύπων δηλ. οι κόμβοι δίνονται ως

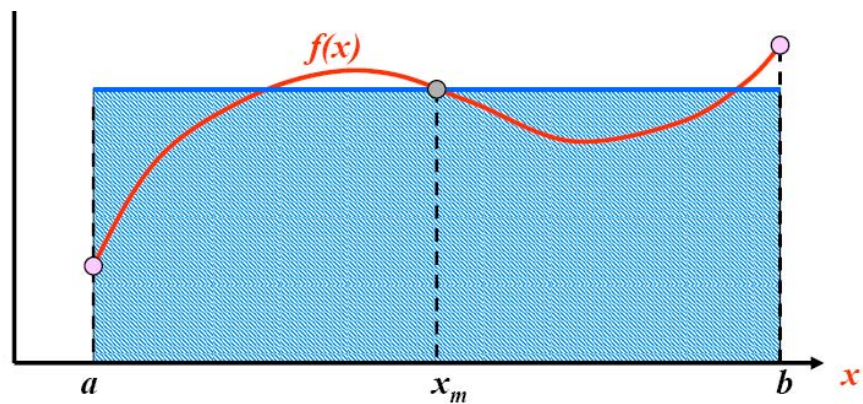
$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_0 = a + h, \quad h = \frac{b - a}{n + 2}$$

Τότε ο γενικός ανοικτός τύπος Newton-Cotes δίνεται από

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \text{σφάλμα}$$

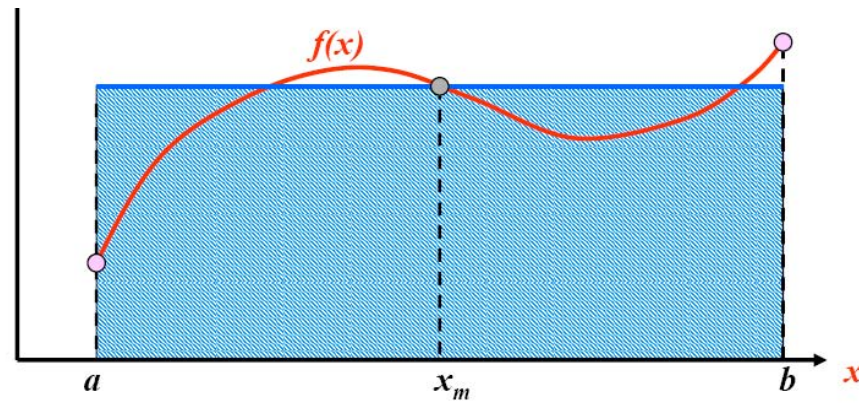
- Οι κλειστοί τύποι παράγουν γενικότερα καλύτερα αποτελέσματα από τους ανοιχτούς.
- Οι ανοιχτοί τύποι χρησιμοποιούνται κυρίως για την αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Ο κανόνας του μέσου (απλός),  $n = 0$



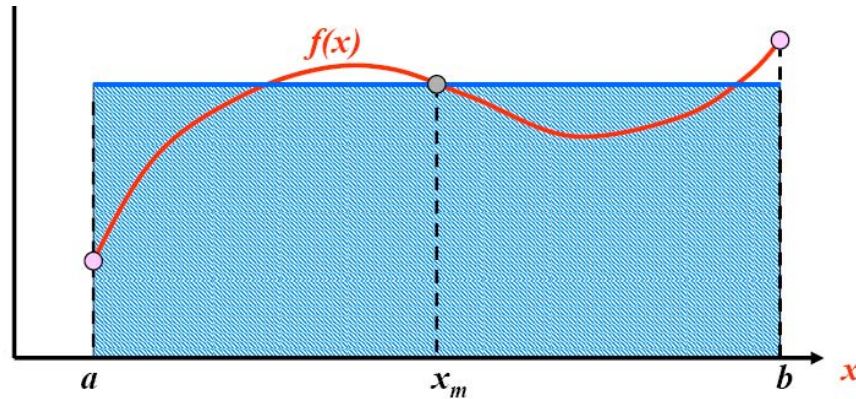


Ο κανόνας του μέσου (απλός),  $n = 0$



$$Q_m = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) = 2h f(x_0)$$

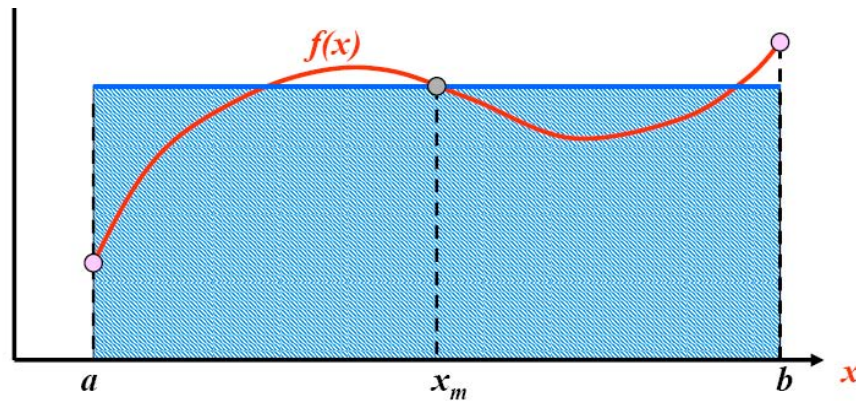
Ο κανόνας του μέσου (απλός),  $n = 0$



$$Q_m = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) = 2h f(x_0)$$

Τοπικό σφάλμα:  $R_m = -\frac{(b - a)^3}{24} f''(\xi) = -\frac{h^3}{3} f''(\xi)$

Ο κανόνας του μέσου (απλός),  $n = 0$



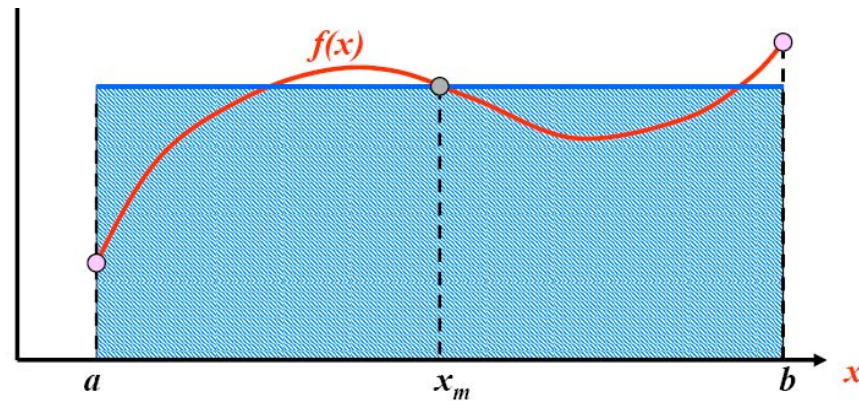
$$Q_m = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) = 2h f(x_0)$$

Τοπικό σφάλμα:  $R_m = -\frac{(b - a)^3}{24} f''(\xi) = -\frac{h^3}{3} f''(\xi)$

Ο κανόνας του μέσου (σύνθετος)

$$Q_{n+1}^m = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

Ο κανόνας του μέσου (απλός),  $n = 0$



$$Q_m = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) = 2h f(x_0)$$

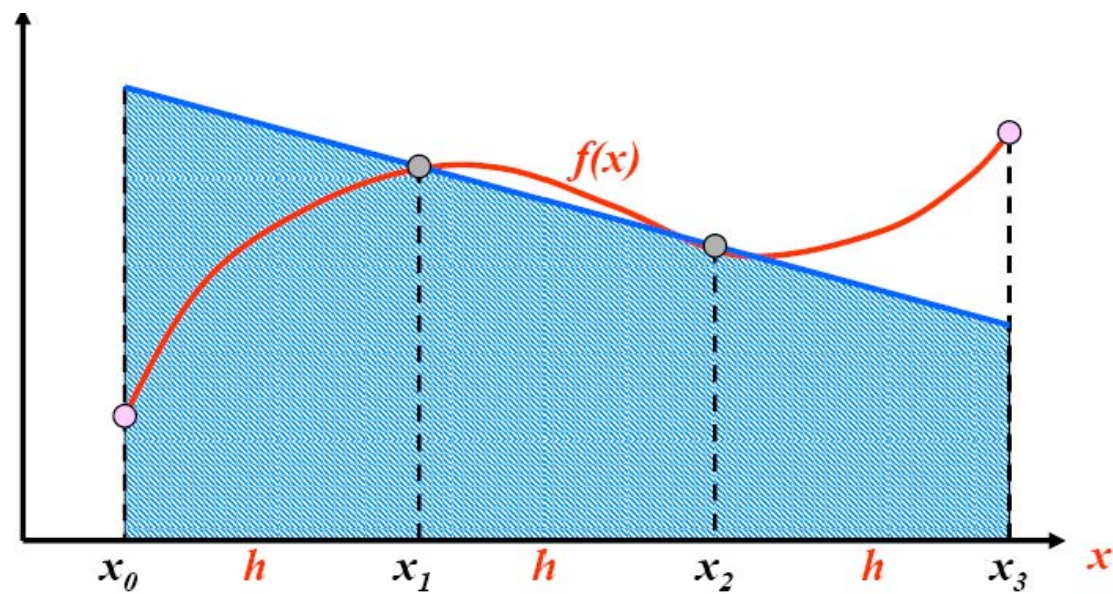
Τοπικό σφάλμα:  $R_m = -\frac{(b - a)^3}{24} f''(\xi) = -\frac{h^3}{3} f''(\xi)$

Ο κανόνας του μέσου (σύνθετος)

$$Q_{n+1}^m = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

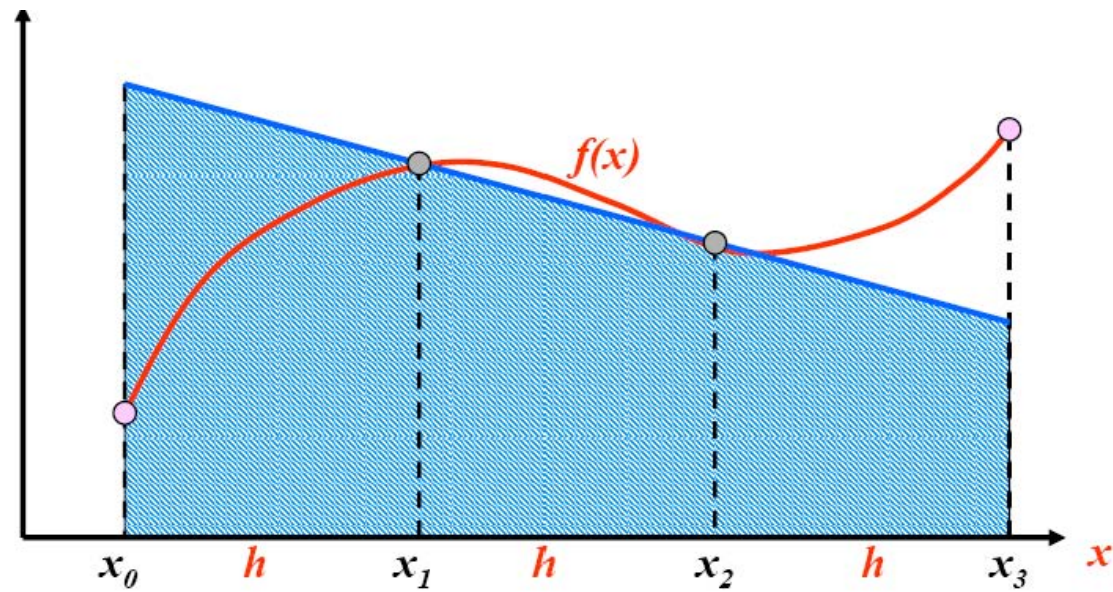
Ολικό σφάλμα:  $R_{n+1}^m = -\frac{(b - a)^3}{24} h^2 f''(\xi)$

Ο κανόνας του μέσου για  $n = 1$



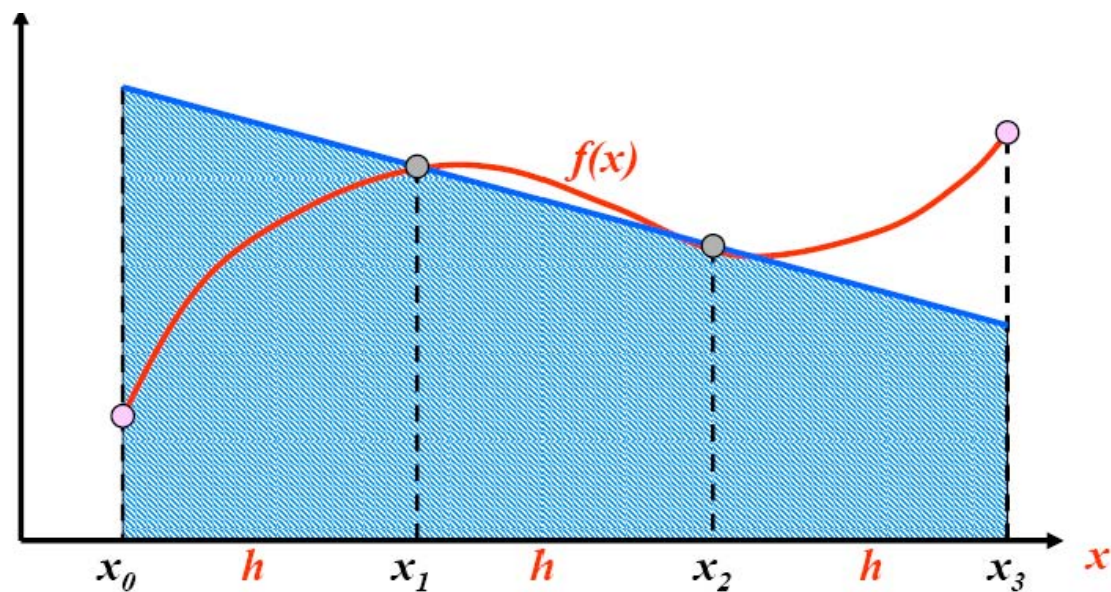


Ο κανόνας του μέσου για  $n = 1$



$$Q_1^m = \frac{(b-a)}{2} [f(x_1) + f(x_2)]$$

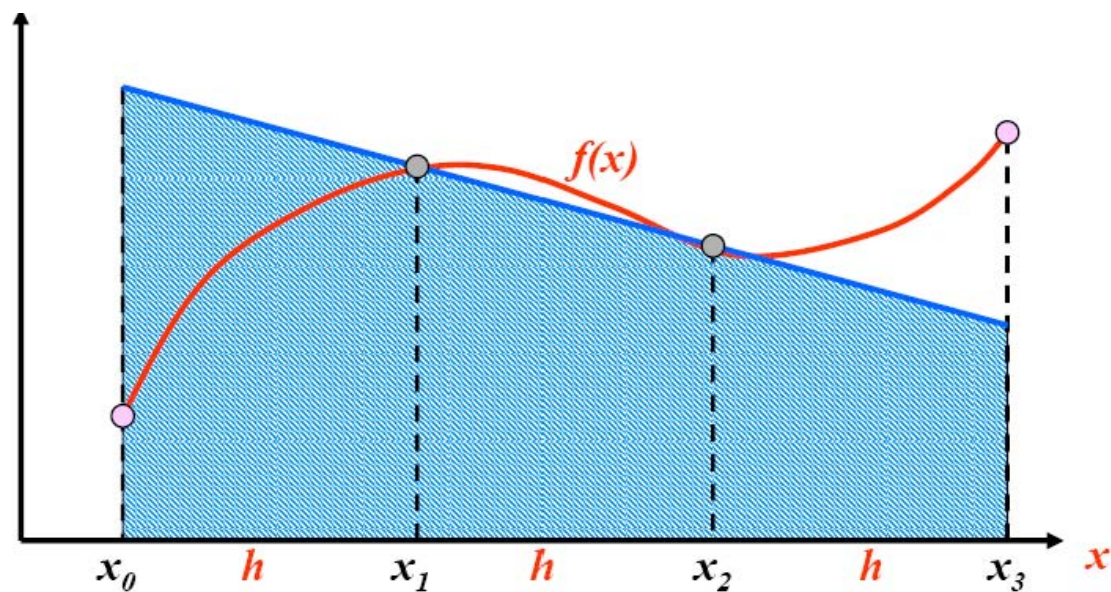
Ο κανόνας του μέσου για  $n = 1$



$$Q_1^m = \frac{(b-a)}{2} [f(x_1) + f(x_2)]$$

Τοπικό σφάλμα:  $R_1^m = -\frac{(b-a)^3}{108} f''(\xi)$

Ο κανόνας του μέσου για  $n = 1$

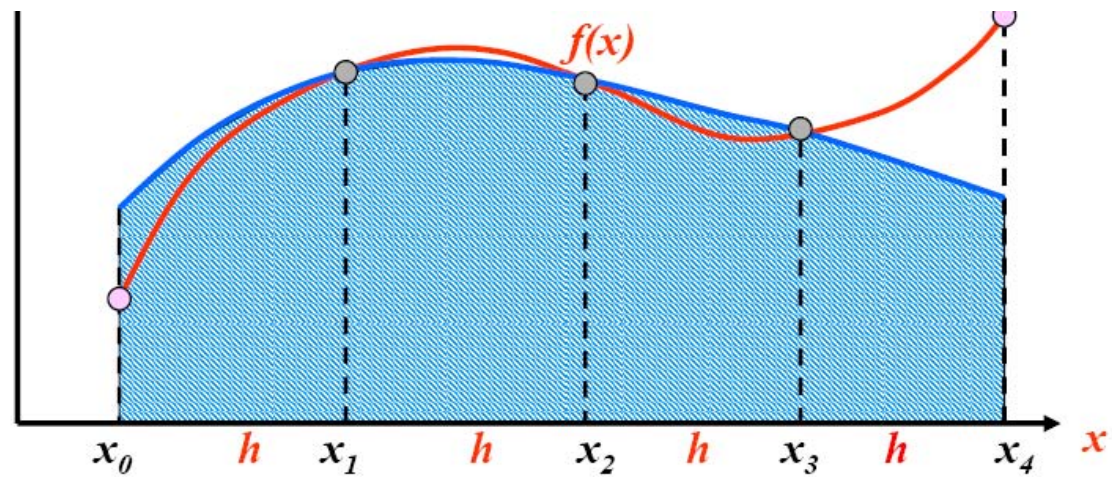


$$Q_1^m = \frac{(b-a)}{2} [f(x_1) + f(x_2)]$$

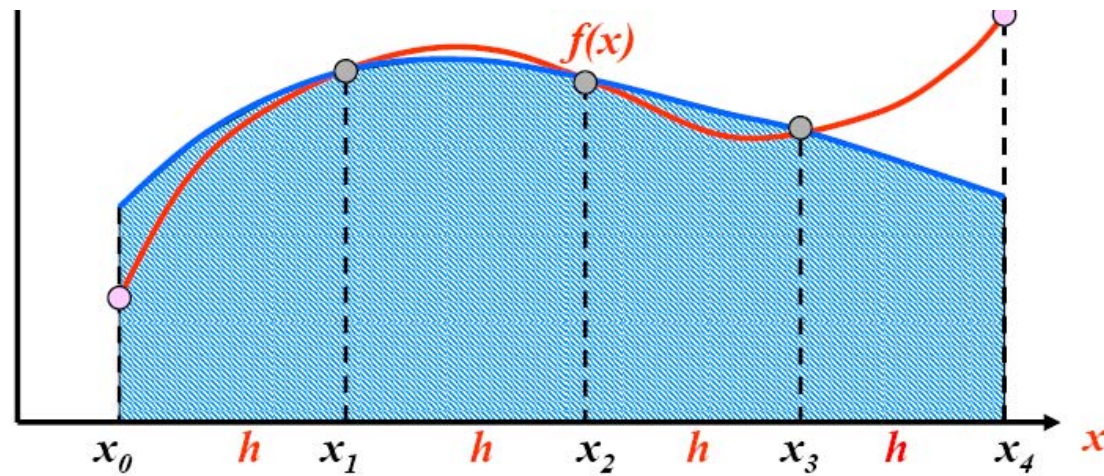
Τοπικό σφάλμα:  $R_1^m = -\frac{(b-a)^3}{108} f''(\xi)$



## Ο κανόνας του μέσου για $n = 2$ —Τύπος του Milne

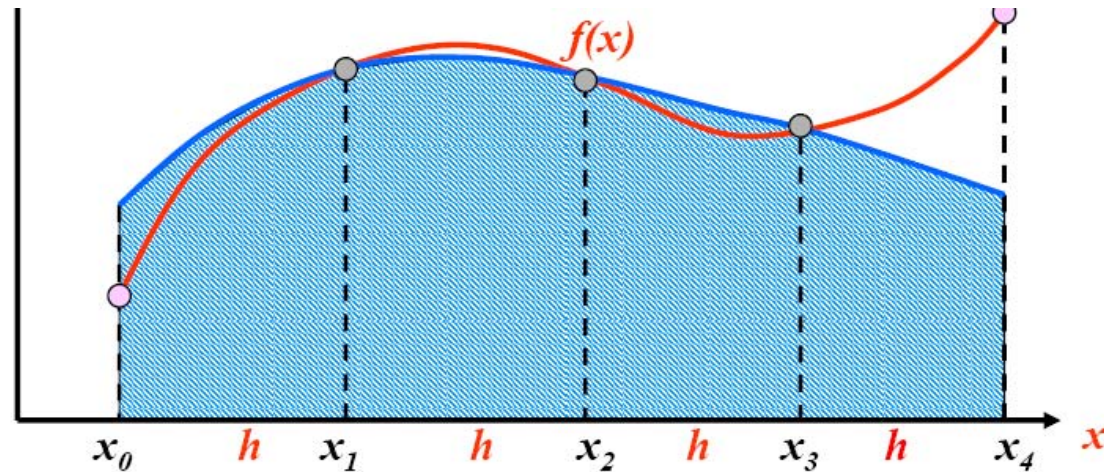


## Ο κανόνας του μέσου για $n = 2$ —Τύπος του Milne



$$Q_2^m = \frac{(b-a)}{3} [2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)]$$

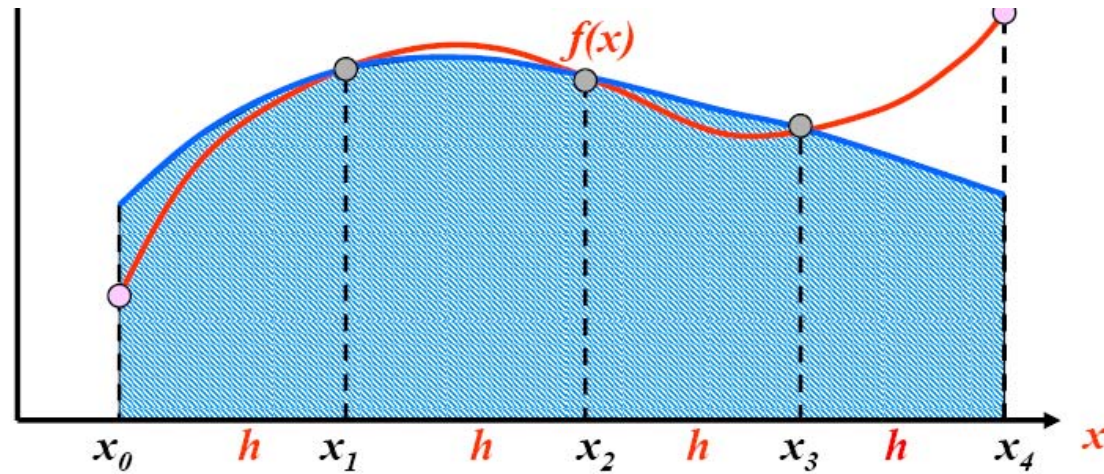
## Ο κανόνας του μέσου για $n = 2$ –Τύπος του Milne



$$Q_2^m = \frac{(b-a)}{3} [2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)]$$

Τοπικό σφάλμα:  $R_2^m = -\frac{7(b-a)^5}{23040} f^{(4)}(\xi)$

## Ο κανόνας του μέσου για $n = 2$ –Τύπος του Milne



$$Q_2^m = \frac{(b-a)}{3} [2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)]$$

Τοπικό σφάλμα:  $R_2^m = -\frac{7(b-a)^5}{23040} f^{(4)}(\xi)$

# Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Έστω ότι ολοκλήρωμα  $I(f)$  προσεγγίζεται με τύπο ολοκλήρωσης  $Q_{n+1}$

$$I(f) \approx Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Όπου  $x_i$  **κόμβοι** στο  $[a, b]$  και  $w_i$  **τα βάρη** ( $\in \mathbf{R}$ ).



# Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Έστω ότι ολοκλήρωμα  $I(f)$  προσεγγίζεται με τύπο ολοκλήρωσης  $Q_{n+1}$

$$I(f) \approx Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Όπου  $x_i$  **κόμβοι** στο  $[a, b]$  και  $w_i$  **τα βάρη** ( $\in \mathbb{R}$ ).

Ζητάμε να προσδιορίσουμε τα βάρη ώστε ο τύπος  $Q_{n+1}$  να είναι **ακριβής για όλα τα πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού**.

Δηλ. αν  $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$  τότε,  $\forall$  πολυώνυμο βαθμού  $\leq n$ .

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - Q_{n+1}(f) = 0,$$

# Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Έστω ότι ολοκλήρωμα  $I(f)$  προσεγγίζεται με τύπο ολοκλήρωσης  $Q_{n+1}$

$$I(f) \approx Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Όπου  $x_i$  **κόμβοι** στο  $[a, b]$  και  $w_i$  **τα βάρη** ( $\in \mathbb{R}$ ).

Ζητάμε να προσδιορίσουμε τα βάρη ώστε ο τύπος  $Q_{n+1}$  να είναι **ακριβής για όλα τα πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού**.

Δηλ. αν  $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$  τότε,  $\forall$  πολυώνυμο βαθμού  $\leq n$ .

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - Q_{n+1}(f) = 0,$$

Αν χρησιμοποιήσουμε σαν βάση των πολυώνυμων τις συναρτήσεις

$\phi_j(x) = x^j, j = 0, 1, \dots, n$  από τη παραπάνω σχέση έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\sum_{i=0}^n w_i x_i^j = \int_a^b x^j dx, \quad j = 0, \dots, n \quad (2)$$

## . . . Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Για  $n = 0$  απαιτούμε ο τύπος να είναι ακριβής για σταθερές συναρτήσεις, τότε

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_0 f(x_0)$$

με  $x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$ , αντικαθιστούμε στη (4)

$$w_0 \cdot 1 = \int_a^b 1dx \quad \Rightarrow \quad w_0 = b - a = h$$

οπότε παράγεται ο (αριστερός) τύπος του ορθογωνίου

$$Q^o = (b - a)f(a) = hf(x_0)$$



## . . . Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Για  $n = 1$  απαιτούμε ο τύπος να είναι ακριβής για συναρτήσεις μέχρι πρώτου βαθμού, τότε

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

Από την (4) έχουμε για  $j = 0, 1$

$$w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 = \int_a^b 1dx \Rightarrow w_0 + w_1 = (b - a)$$

$$w_0 x_0 + w_1 x_1 = \int_a^b xdx \Rightarrow w_0 x_0 + w_1 x_1 = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Συνεπώς βρίσκουμε  $w_0 = w_1 = \frac{b-a}{2}$  και άρα τον **τύπο του τραπεζίου**

$$Q_2 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

που είναι ακριβής για γραμμικά πολυώνυμα.

**Άσκηση** Με την μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών υπολογίστε το σφάλμα για τον απλό τύπο του τραπεζίου.

**Άσκηση** Με την μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών υπολογίστε το σφάλμα για τον απλό τύπο του τραπεζίου.

**Λύση** Για να βρούμε το σφάλμα έχουμε να υπολογίσουμε τη σταθερά  $C$  για

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] + Cf^{(2)}(\xi)$$

Η σταθερά  $C$  υπολογίζεται από την απαίτηση η παραπάνω σχέση να ισχύει για  $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2 dx &= \frac{h}{2}(a^2 + b^2) + 2C \quad \Rightarrow \\ \frac{b^3 - a^3}{3} &= \frac{h}{2}(a^2 + b^2) + 2C \quad \Rightarrow \\ C &= -\frac{h^3}{12}.\end{aligned}$$

# Η ΜΕΘΟΔΟΣ ROMBERG

Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται για να δώσει αποτελέσματα υψηλής ακρίβειας χρησιμοποιώντας τύπους χαμηλής τάξης σφάλματος (βασισμένη στη μέθοδος παρεκβολής (extrapolation) Richardson).

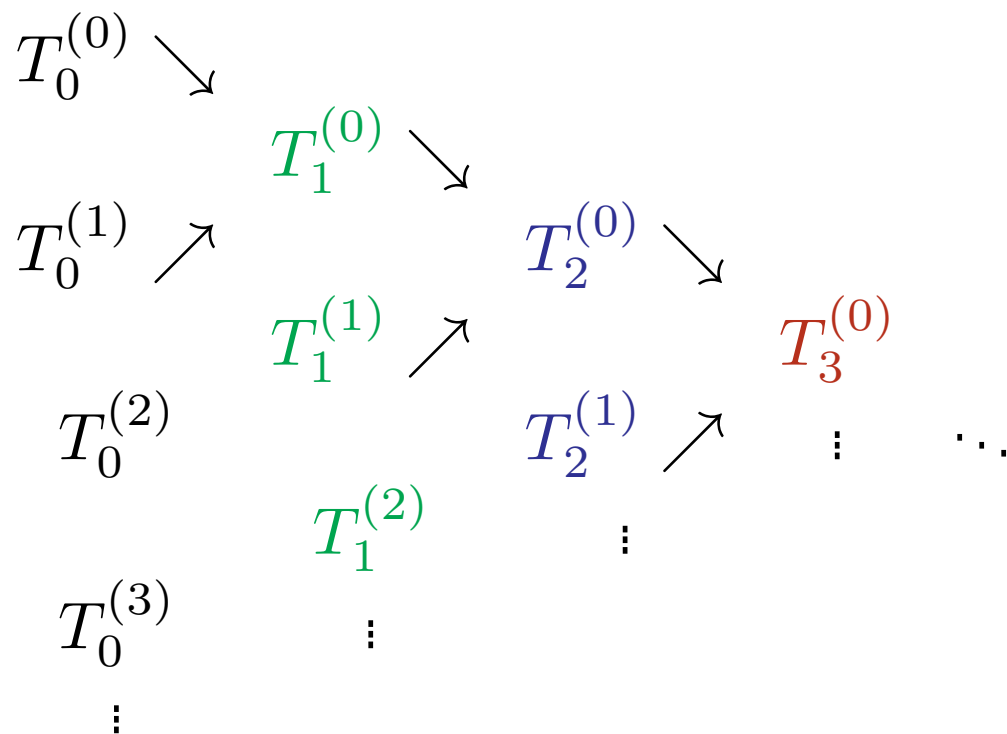
Ξεκινώντας από τον τύπο του τραπεζίου  $T_0^{(k)}$  με βήμα  $h/2^k$ ,  $h = b - a$  και με βάση τον ακόλουθο αλγόριθμο

$$T_j^{(k)} = \frac{2^{2j} T_{j-1}^{(k+1)} - T_{j-1}^{(k)}}{2^{2j} - 1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

οδηγούμαστε σε μεθόδους ακρίβειας  $O(h^{2(j+1)})$ ,  $j = 1, 2, \dots$

**Για  $j = 1$  κατασκευάζεται ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 με βήμα  $h/2^{k+1}$ .**

Ο τρόπος με τον οποίο οδηγούμαστε σε τύπου υψηλότερης τάξης φαίνεται σχηματικά στο πίνακα



**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$  με τη μέθοδο Romberg για προσέγγιση τάξης  $O(h^{10})$  και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$  με τη μέθοδο Romberg για προσέγγιση τάξης  $O(h^{10})$  και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

|                 | $O(h^2)$ | $O(h^4)$ | $O(h^6)$ | $O(h^8)$  | $O(h^{10})$ |
|-----------------|----------|----------|----------|-----------|-------------|
| $h = 4$         | 23847.7  | 8240.41  | 5499.68  | 5224.84   | 5216.95     |
| $h = 2$         | 12142.2  | 5670.98  | 5229.14  | 5217.01   |             |
| $h = 1$         | 7288.79  | 5256.75  | 5217.20  |           |             |
| $h = 0.5$       | 5764.76  | 5219.68  |          |           |             |
| $h = 0.25$      | 5355.95  |          |          |           |             |
| $\varepsilon =$ | -2.66%   | -0.0527% | -0.0053% | -0.00168% | -0.00050%   |

**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$  με τη μέθοδο Romberg για προσέγγιση τάξης  $O(h^{10})$  και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

|                 | $O(h^2)$ | $O(h^4)$ | $O(h^6)$ | $O(h^8)$  | $O(h^{10})$ |
|-----------------|----------|----------|----------|-----------|-------------|
| $h = 4$         | 23847.7  | 8240.41  | 5499.68  | 5224.84   | 5216.95     |
| $h = 2$         | 12142.2  | 5670.98  | 5229.14  | 5217.01   |             |
| $h = 1$         | 7288.79  | 5256.75  | 5217.20  |           |             |
| $h = 0.5$       | 5764.76  | 5219.68  |          |           |             |
| $h = 0.25$      | 5355.95  |          |          |           |             |
| $\varepsilon =$ | -2.66%   | -0.0527% | -0.0053% | -0.00168% | -0.00050%   |

Παρατηρούμε ότι για την ζητούμενη ακρίβεια αρκούν 17 υπολογισμοί της συνάρτησης.



**Παράδειγμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_0^4 x e^{2x} dx$  με τη μέθοδο Romberg για προσέγγιση τάξης  $O(h^{10})$  και υπολογίστε τα αντίστοιχα % σφάλματα.

|                 | $O(h^2)$ | $O(h^4)$ | $O(h^6)$ | $O(h^8)$  | $O(h^{10})$ |
|-----------------|----------|----------|----------|-----------|-------------|
| $h = 4$         | 23847.7  | 8240.41  | 5499.68  | 5224.84   | 5216.95     |
| $h = 2$         | 12142.2  | 5670.98  | 5229.14  | 5217.01   |             |
| $h = 1$         | 7288.79  | 5256.75  | 5217.20  |           |             |
| $h = 0.5$       | 5764.76  | 5219.68  |          |           |             |
| $h = 0.25$      | 5355.95  |          |          |           |             |
| $\varepsilon =$ | -2.66%   | -0.0527% | -0.0053% | -0.00168% | -0.00050%   |

Παρατηρούμε ότι για την ζητούμενη ακρίβεια αρκούν 17 υπολογισμοί της συνάρτησης.

**Άσκηση** Πόσα υποδιαστήματα  $n$  χρειάζονται ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου και ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 για να πετύχουν την ίδια τάξης ακρίβεια;