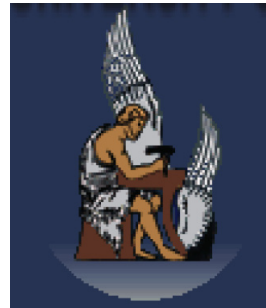


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 12η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Γραμμική Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων

Με τον όρο (βέλτιστη) γραμμική προσέγγιση εννοούμε την προσαρμογή ενός πολυωνύμου $p(x)$, βαθμού το πολύ ένα (**ευθεία παλινδρόμησης**), σε ένα πλήθος σημείων $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, δηλ. ψάχνουμε την

$$p(x) = ax + b$$

Γραμμική Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων

Με τον όρο (βέλτιστη) γραμμική προσέγγιση εννοούμε την προσαρμογή ενός πολυωνύμου $p(x)$, βαθμού το πολύ ένα (**ευθεία παλινδρόμησης**), σε ένα πλήθος σημείων (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, δηλ. ψάχνουμε την

$$p(x) = ax + b$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές a και b , ε.ω. η συνάρτηση E

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2, \quad \text{να ελαχιστοποιείται.}$$

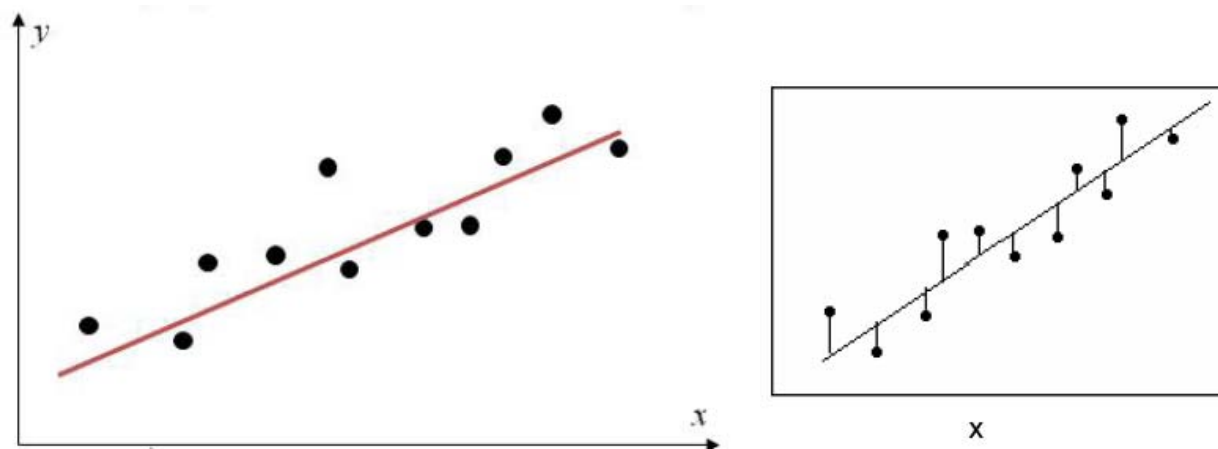
Γραμμική Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων

Με τον όρο (βέλτιστη) γραμμική προσέγγιση εννοούμε την προσαρμογή ενός πολυωνύμου $p(x)$, βαθμού το πολύ ένα (**ευθεία παλινδρόμησης**), σε ένα πλήθος σημείων $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, δηλ. ψάχνουμε την

$$p(x) = ax + b$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές a και b , ε.ω. η συνάρτηση E

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2, \quad \text{να ελαχιστοποιείται.}$$



Η ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται όταν

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i + b) \right] x_i = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i + b) \right] = 0$$

Η ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται όταν

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i + b) \right] x_i = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i + b) \right] = 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν τις εξισώσεις (**ΚΑΝΟΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**)

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

και σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα είναι

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)^2 \neq 0$$

Η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι

$$a = \frac{1}{\delta} \left[n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right]$$
$$b = \frac{1}{\delta} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

Υπάρχουν περιπτώσεις που τα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ δεν είναι εμφανώς διεσπαρμένα κατά τη διεύθυνση κάποιας ευθείας. Το ερώτημα είναι, κατά πόσο η επιλεγείσα προσαρμογή της γραμμικής προσέγγισης στα σημεία είναι ικανοποιητική ή όχι.

Υπάρχουν περιπτώσεις που τα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ δεν είναι εμφανώς διεσπαρμένα κατά τη διεύθυνση κάποιας ευθείας. Το ερώτημα είναι, κατά πόσο η επιλεγείσα προσαρμογή της γραμμικής προσέγγισης στα σημεία είναι ικανοποιητική ή όχι.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον **Συντελεστή Συσχέτισης** r και το r^2 **Συντελεστής Προσδιορισμού**.

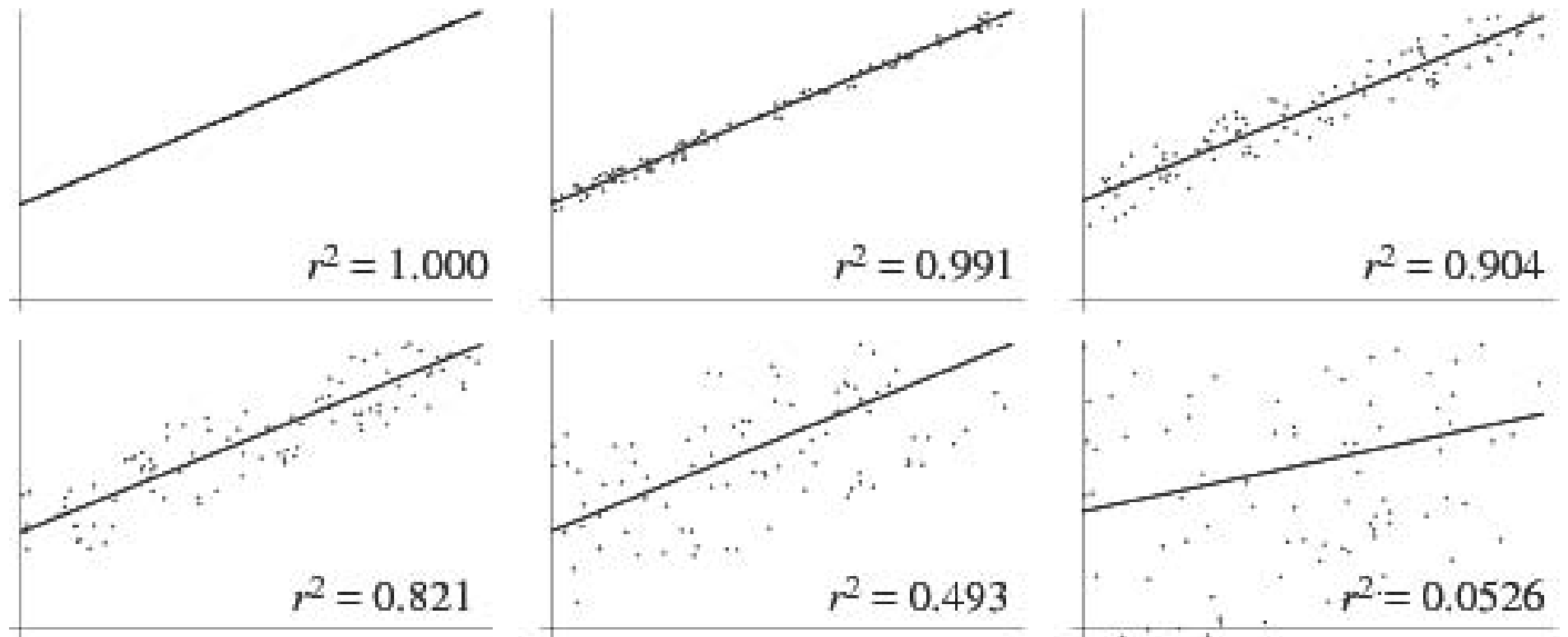
$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}}$$

Υπάρχουν περιπτώσεις που τα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ δεν είναι εμφανώς διεσπαρμένα κατά τη διεύθυνση κάποιας ευθείας. Το ερώτημα είναι, κατά πόσο η επιλεγείσα προσαρμογή της γραμμικής προσέγγισης στα σημεία είναι ικανοποιητική ή όχι.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον **Συντελεστή Συσχέτισης** r και το r^2 **Συντελεστής Προσδιορισμού**.

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}}$$

Ο συντελεστής r παίρνει τιμές από -1 μέχρι 1 (και το $r^2 \in [0, 1]$) Όσο πιο μικρή είναι η διασπορά των σημείων ακατέρωθεν της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων η τόσο η απόλυτη τιμή του συντελεστή τείνει προς τη μονάδα, άρα τόσο καλύτερη η προσέγγιση.



Ο Συντελεστής Συσχέτισης (ή Προσδιορισμού) μετρά την εξάρτηση μεταξύ των x_i και y_i . Όσο πιο μικρή είναι η διασπορά των σημείων εκατέρωθεν της ευθείας, τόσο η εξάρτηση είναι πιο ισχυρή.

Άσκηση Δίνονται τα σημεία $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$, $(6, 13)$. Να προσδιοριστεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, καθώς και ο συντελεστής συσχέτισης.

Άσκηση Δίνονται τα σημεία $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$, $(6, 13)$. Να προσδιοριστεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, καθώς και ο συντελεστής συσχέτισης.

Λύση Με τα παραπάνω δεδομένα σχηματίζουμε τον πίνακα

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	0	1	0	0
2	2	3	4	9	6
3	3	5	9	25	15
4	4	8	16	64	32
5	5	10	25	100	50
6	6	13	36	169	78
$\Sigma =$	21	39	91	367	181

Άσκηση Δίνονται τα σημεία $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$, $(6, 13)$. Να προσδιοριστεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, καθώς και ο συντελεστής συσχέτισης.

Λύση Με τα παραπάνω δεδομένα σχηματίζουμε τον πίνακα

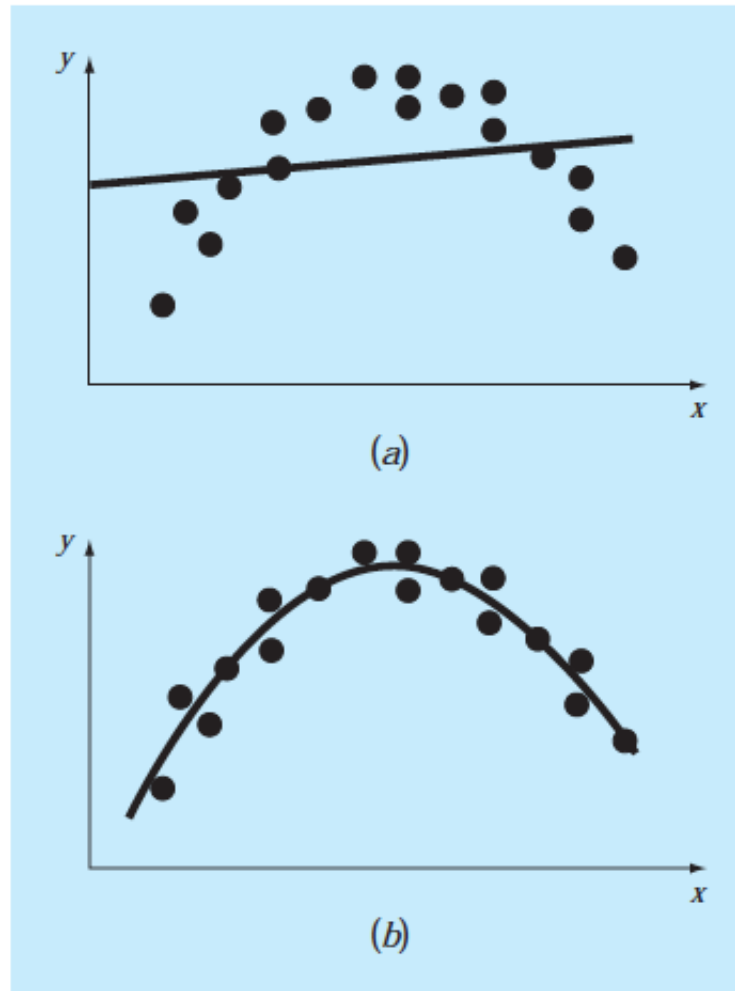
i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	0	1	0	0
2	2	3	4	9	6
3	3	5	9	25	15
4	4	8	16	64	32
5	5	10	25	100	50
6	6	13	36	169	78
$\Sigma =$	21	39	91	367	181

Λύνοντας τις κανονικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 181 \\ 39 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 2.543, \quad b = -2.4$$

και $r^2 = 0.998$ (πολύ ικανοποιητική προσαρμογή).

Μη-γραμμικές προσεγγίσεις



Προφανώς το γραμμικό μοντέλο (ευθεία) δεν μπορεί να περιγράψει τα δεδομένα!

Εκθετική Προσέγγιση

Για περιπτώσεις που τα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ σχετίζονται μεταξύ τους εκθετικά και όχι γραμμικά.

Εκθετική Προσέγγιση

Για περιπτώσεις που τα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ σχετίζονται μεταξύ τους εκθετικά και όχι γραμμικά.

Προσαρμογή (βέλτιστης) εκθετικής συνάρτησης, αν το μοντέλο, δηλ. η συνάρτηση προσαρμογής, είναι της μορφής

$$y = Ae^{Bx}$$

Εκθετική Προσέγγιση

Για περιπτώσεις που τα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ σχετίζονται μεταξύ τους εκθετικά και όχι γραμμικά.

Προσαρμογή (βέλτιστης) εκθετικής συνάρτησης, αν το μοντέλο, δηλ. η συνάρτηση προσαρμογής, είναι της μορφής

$$y = Ae^{Bx}$$

Λογαριθμίζοντας παίρνουμε τη γραμμική σχέση (ως προς x)

$$\ln y = \ln A + Bx = b + ax, \quad b = \ln A, \quad a = B$$

Με τη (γραμμική) μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, η εύρεση της βέλτιστης συνάρτησης, συνεπάγεται ελαχιστοποίηση της

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[\ln y_i - (\ln A + Bx_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left[\ln y_i - (b + ax_i) \right]^2$$

Η ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται όταν $\frac{\partial E}{\partial a} = 0$ και $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$

Οι κανονικές εξισώσεις (όμοια με πριν) είναι

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb &= \sum_{i=1}^n \ln y_i \end{aligned}$$

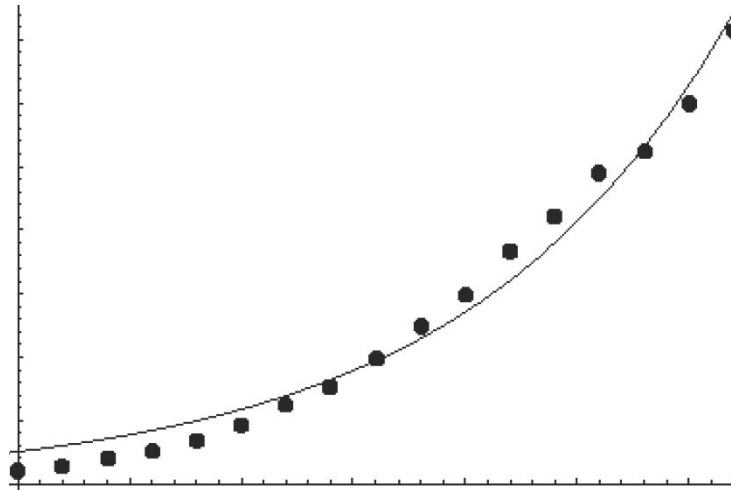
Λύνοντας ως προς a και b έχουμε $A = e^b$ και $B = a$

Οι κανονικές εξισώσεις (όμοια με πριν) είναι

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n \ln y_i$$

Λύνοντας ως προς a και b έχουμε $A = e^b$ και $B = a$



Άσκηση Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $y = Ae^{Bx}$ που προσεγγίζει τα παρακάτω δεδομένα και να υπολογιστεί η τιμή του y για $x = 0.3$.

$$(0, 9.532), (0.25, 7.983), (0.4, 4.826), (0.5, 5.503)$$

Άσκηση Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $y = Ae^{Bx}$ που προσεγγίζει τα παρακάτω δεδομένα και να υπολογιστεί η τιμή του y για $x = 0.3$.

$(0, 9.532), (0.25, 7.983), (0.4, 4.826), (0.5, 5.503)$

Λύση Με τα παραπάνω δεδομένα σχηματίζουμε τον πίνακα

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$
1	0.00	9.532	2.255	0.00	0.00
2	0.25	7.983	2.077	0.063	0.519
3	0.40	4.826	1.574	0.160	0.630
4	0.5	5.503	1.705	0.250	0.853
$\Sigma =$	1.15		7.611	0.473	2.002

Άσκηση Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $y = Ae^{Bx}$ που προσεγγίζει τα παρακάτω δεδομένα και να υπολογιστεί η τιμή του y για $x = 0.3$.

$$(0, 9.532), (0.25, 7.983), (0.4, 4.826), (0.5, 5.503)$$

Λύση Με τα παραπάνω δεδομένα σχηματίζουμε τον πίνακα

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$
1	0.00	9.532	2.255	0.00	0.00
2	0.25	7.983	2.077	0.063	0.519
3	0.40	4.826	1.574	0.160	0.630
4	0.5	5.503	1.705	0.250	0.853
$\Sigma =$	1.15		7.611	0.473	2.002

Από τις κανονικές εξισώσεις παίρνουμε

$$b = 2.821 \Rightarrow A = e^{2.821} \Rightarrow A = 9.787, \quad \text{και} \quad B = a = -1.316$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση προσαρμογής είναι $y = 9.787e^{-1.326x}$. Οπότε για $x = 0.3$

$$y(0.3) = 9.787e^{-1.326 \cdot 0.3} = 9.787e^{-0.395} = 6.595$$

Προσαρμογή συνάρτησης δύναμης

Έαν η συνάρτηση προσαρμογής είναι της μορφής

$$y = Ax^B$$

Προσαρμογή συνάρτησης δύναμης

Αν η συνάρτηση προσαρμογής είναι της μορφής

$$y = Ax^B$$

Λογαριθμίζοντας παίρνουμε

$$\ln y = \ln A + B \ln x = b + a\tilde{x}, \quad a = B, \quad b = \ln A$$

Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, η εύρεση της βέλτιστης συνάρτησης, συνεπάγεται ελαχιστοποίηση της

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[\ln y_i - (\ln A + B \ln x_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left[\ln y_i - (b + a\tilde{x}_i) \right]^2$$

Η ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται όταν $\frac{\partial E}{\partial a} = 0$ και $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$

Οι κανονικές εξισώσεις (όμοια με πριν) είναι

$$a \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 + b \sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n \ln x_i + bn = \sum_{i=1}^n \ln y_i$$

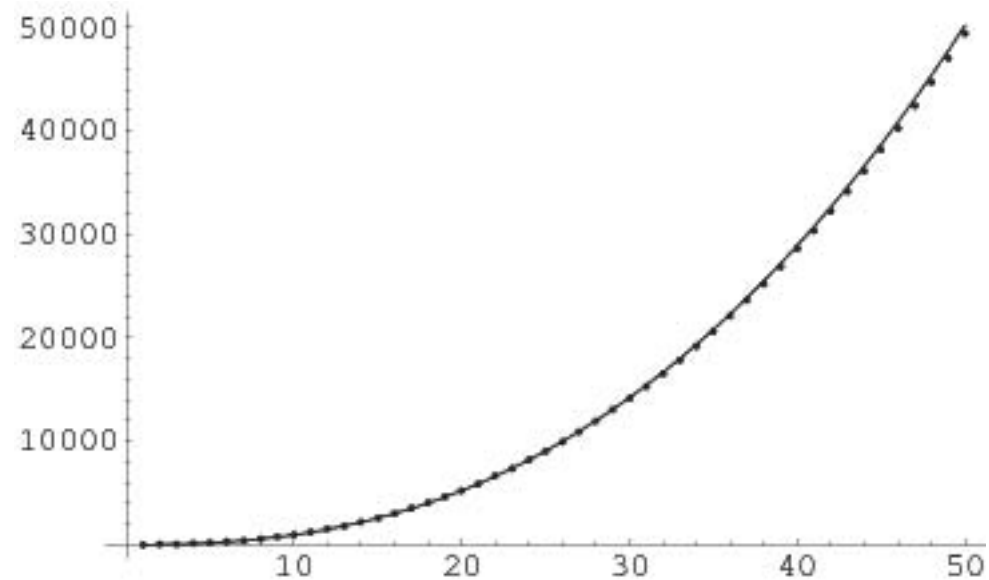
Λύνοντας ως προς a και b έχουμε $A = e^b$ και $B = a$

Οι κανονικές εξισώσεις (όμοια με πριν) είναι

$$a \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 + b \sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n \ln x_i + bn = \sum_{i=1}^n \ln y_i$$

Λύνοντας ως προς a και b έχουμε $A = e^b$ και $B = a$



Άσκηση Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $y = Ax^B$ που προσεγγίζει τα παρακάτω δεδομένα και να υπολογιστεί η τιμή του y για $x = 0.3$.

$$(1, 2.87), (2, 4.51), (4, 6.11), (10, 9.43)$$

Άσκηση Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $y = Ax^B$ που προσεγγίζει τα παρακάτω δεδομένα και να υπολογιστεί η τιμή του y για $x = 0.3$.

$(1, 2.87), (2, 4.51), (4, 6.11), (10, 9.43)$

Λύση Με τα παραπάνω δεδομένα σχηματίζουμε τον πίνακα

i	x_i	y_i	$\ln x_i$	$\ln y_i$	$\ln^2 x_i$	$\ln x_i \ln y_i$
1	1	2.87	0.000	1.054	0.000	0.000
2	2	4.51	0.693	1.506	0.480	1.044
3	4	6.11	1.386	1.810	1.922	2.509
4	10	9.43	2.303	2.244	5.302	5.167
$\Sigma =$			4.382	6.614	7.704	8.720

Άσκηση Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $y = Ax^B$ που προσεγγίζει τα παρακάτω δεδομένα και να υπολογιστεί η τιμή του y για $x = 0.3$.

$$(1, 2.87), (2, 4.51), (4, 6.11), (10, 9.43)$$

Λύση Με τα παραπάνω δεδομένα σχηματίζουμε τον πίνακα

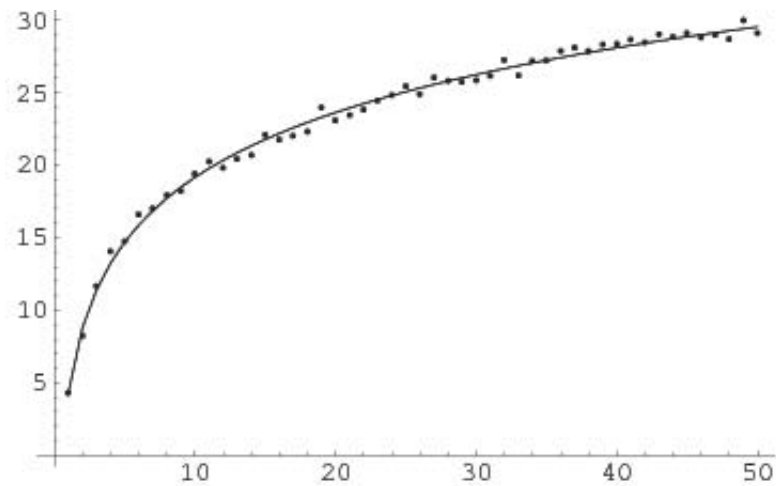
i	x_i	y_i	$\ln x_i$	$\ln y_i$	$\ln^2 x_i$	$\ln x_i \ln y_i$
1	1	2.87	0.000	1.054	0.000	0.000
2	2	4.51	0.693	1.506	0.480	1.044
3	4	6.11	1.386	1.810	1.922	2.509
4	10	9.43	2.303	2.244	5.302	5.167
$\Sigma =$			4.382	6.614	7.704	8.720

Από τις κανονικές εξισώσεις παίρνουμε

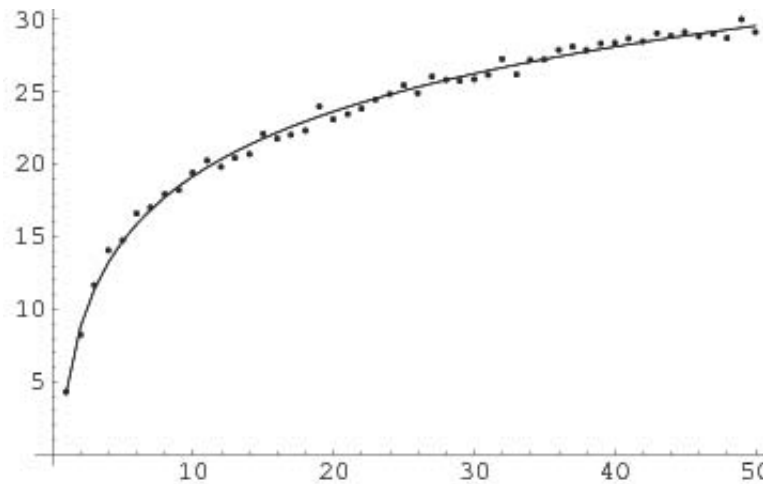
$$b = 1.098 \Rightarrow A = e^{1.098} \Rightarrow A = 2.997, \quad \text{και} \quad B = a = 0.508$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση προσαρμογής είναι $y = 2.997x^{0.508}$.

Προσαρμογή άλλων μή-γραμμικών συναρτήσεων



Προσαρμογή άλλων μή-γραμμικών συναρτήσεων



- Άν η συνάρτηση προσαρμογής είναι της μη γραμμικής μορφής

$$y = \frac{Ax}{B + x}$$

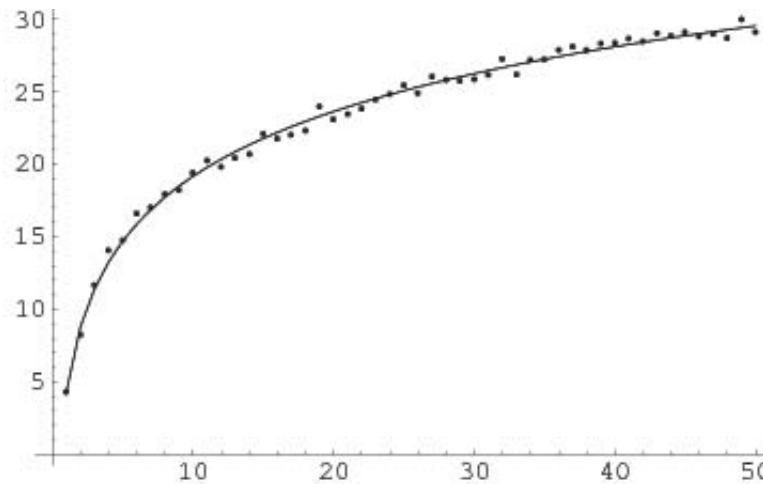
$\Rightarrow$

$$\frac{1}{y} = \frac{B}{A} \frac{1}{x} + \frac{1}{A}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{y} = a\tilde{x} + b$$

Προσαρμογή άλλων μή-γραμμικών συναρτήσεων



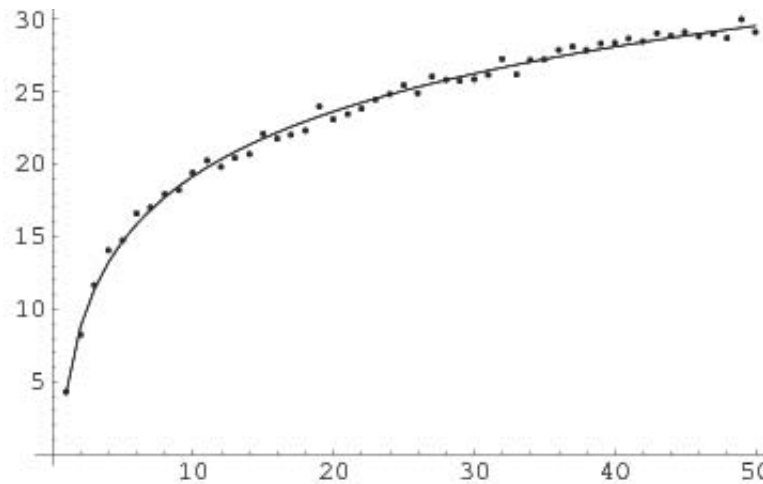
- Άν η συνάρτηση προσαρμογής είναι της μη γραμμικής μορφής

$$\boxed{y = \frac{Ax}{B + x}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{y} = \frac{B}{A} \frac{1}{x} + \frac{1}{A}} \Rightarrow \boxed{\tilde{y} = a\tilde{x} + b}$$

- Άν η συνάρτηση προσαρμογής είναι λογαριθμικής μορφής

$$\boxed{y = a + b \ln x} \Rightarrow \boxed{y = a + b\tilde{x}}$$

Προσαρμογή άλλων μή-γραμμικών συναρτήσεων



- Άν η συνάρτηση προσαρμογής είναι της μη γραμμικής μορφής

$$\boxed{y = \frac{Ax}{B + x}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{y} = \frac{B}{A} \frac{1}{x} + \frac{1}{A}} \Rightarrow \boxed{\tilde{y} = a\tilde{x} + b}$$

- Άν η συνάρτηση προσαρμογής είναι λογαριθμικής μορφής

$$\boxed{y = a + b \ln x} \Rightarrow \boxed{y = a + b\tilde{x}}$$

Σε κάθε περίπτωση εφαρμόζουμε **γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων** στην γραμμικοποιημένη μορφή.

Προσαρμογή άλλων μή-γραμμικών συναρτήσεων

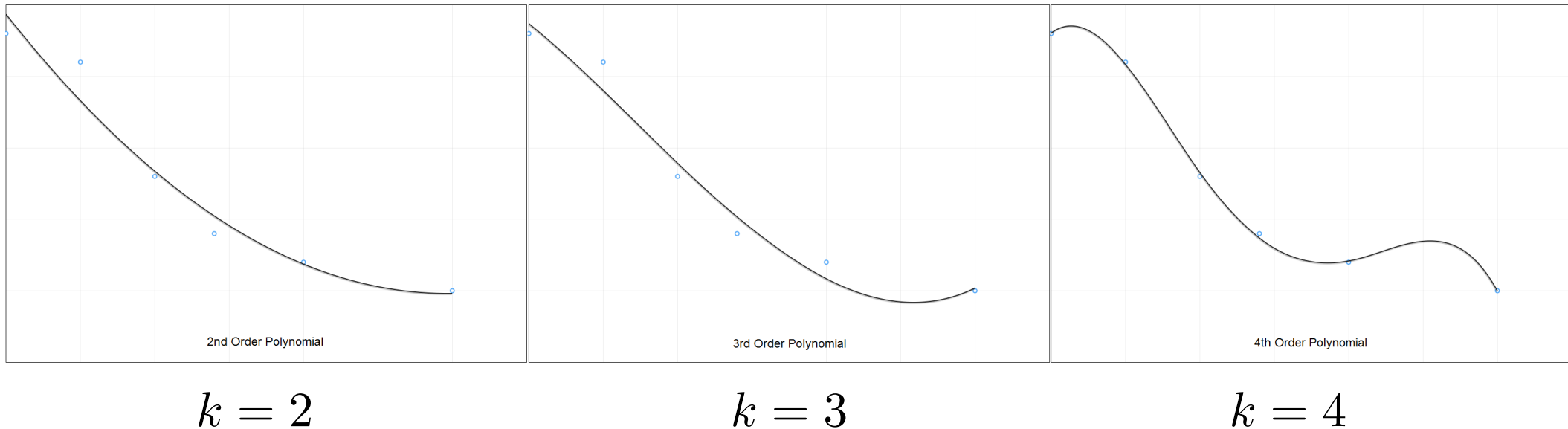
- $y = Ax B^x$
- $y = Ae^{B/x}$
- $y = Ax^{Bx}$
- $y = e^{Ax^2}$
- $y = Ax^{B/x}$
- $y = A \cos(Bx)$ ή $y = A \sin(Bx)$
- $y = Ae^{-Bx} + C$
- $y = \frac{A}{1+10^{B(C-x)}}$

Πολυωνυμική Προσέγγιση (Προσαρμογή)

Γενικεύοντας την ιδέα της γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων, προσαρμόζουμε στα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ ένα πολυώνυμο p , k -βαθμού (με $k \ll n$), με $p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$

Πολυωνυμική Προσέγγιση (Προσαρμογή)

Γενικεύοντας την ιδέα της γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων, προσαρμόζουμε στα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ ένα πολυώνυμο p , k -βαθμού (με $k \ll n$), με $p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$



Πολυωνυμική Προσέγγιση (Προσαρμογή)

Προσαρμόζουμε στα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ ένα πολυώνυμο p , k -βαθμού (με $k \ll n$), με $p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$

Πολυωνυμική Προσέγγιση (Προσαρμογή)

Προσαρμόζουμε στα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ ένα πολυώνυμο p , k -βαθμού (με $k \ll n$), με $p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $a_0, \dots, a_k$, ε.ω. η συνάρτηση E να ελαχιστοποιείται, όπου

$$E(a_0, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_kx_i^k) \right]^2,$$

Πολυωνυμική Προσέγγιση (Προσαρμογή)

Προσαρμόζουμε στα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ ένα πολυώνυμο p , k -βαθμού (με $k \ll n$), με $p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $a_0, \dots, a_k$, ε.ω. η συνάρτηση E να ελαχιστοποιείται, όπου

$$E(a_0, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_kx_i^k) \right]^2,$$

Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται οι $k + 1$ συνθήκες

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^j \left(y_i - a_0 - a_1x_i - \dots - a_kx_i^k \right) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

οι οποίες δίνουν ένα (συμμετρικό) γραμμικό $(k + 1) \times (k + 1)$ **σύστημα κανονικών εξισώσεων**.

Το σύστημα κανονικών εξισώσεων που προκύπτει είναι:

$$\sum_{m=0}^k a_m \sum_{i=1}^n x_i^{j+m} = \sum_{i=1}^n x_i^j y_i, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad \text{δηλαδή}$$

Το σύστημα κανονικών εξισώσεων που προκύπτει είναι:

$$\sum_{m=0}^k a_m \sum_{i=1}^n x_i^{j+m} = \sum_{i=1}^n x_i^j y_i, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad \text{δηλαδή}$$

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$$

⋮

⋮

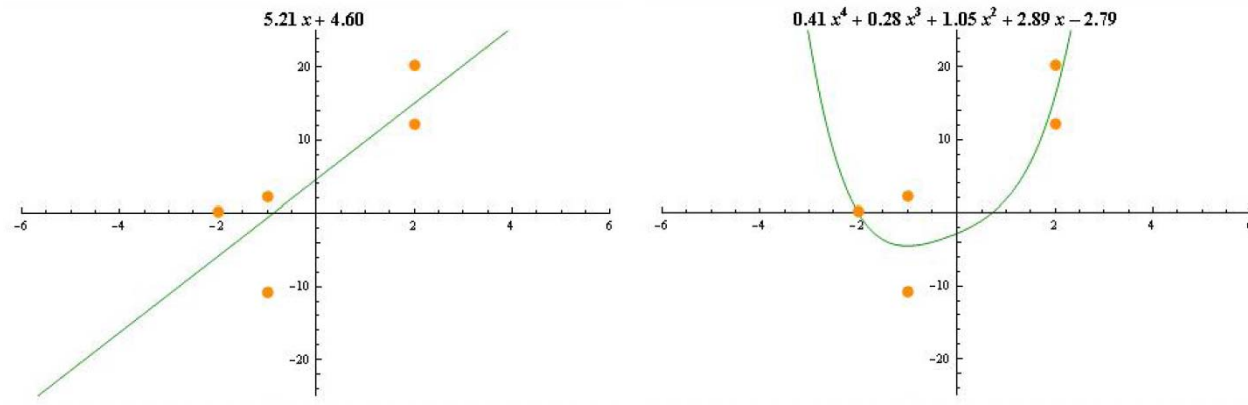
⋮

⋮

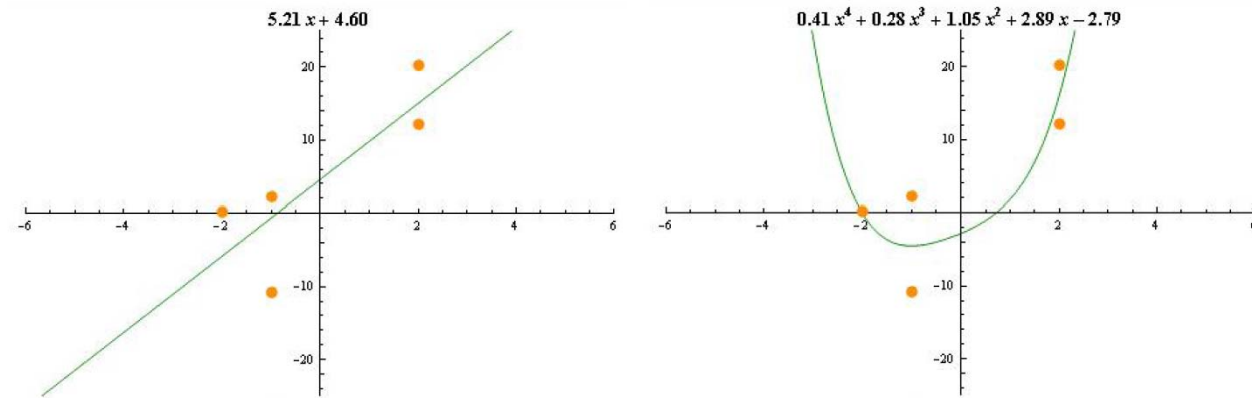
$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{2k} = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_0, \dots, a_k$

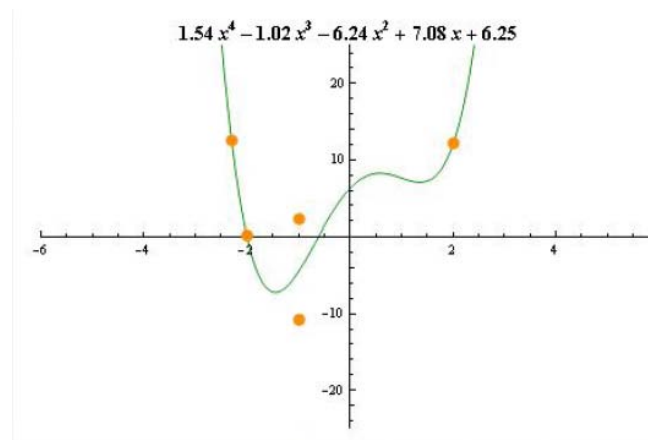
Γραμμική προσέγγιση και προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού 4 στα ίδια δεδομένα



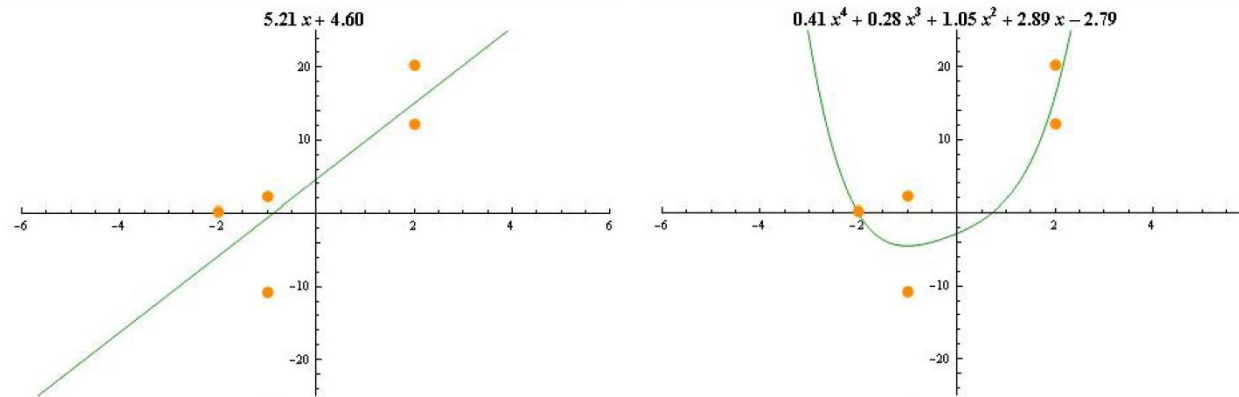
Γραμμική προσέγγιση και προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού 4 στα ίδια δεδομένα



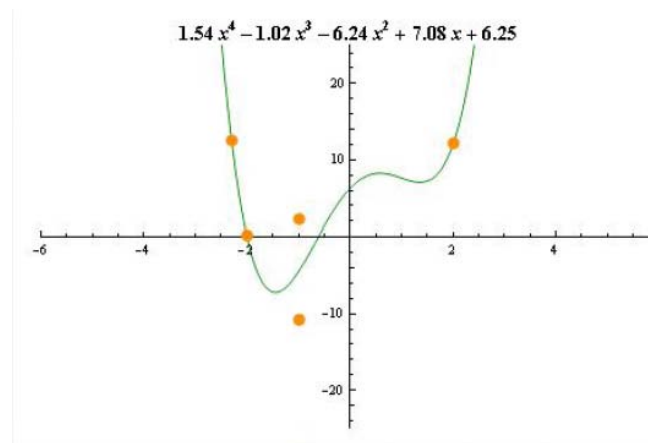
Αναδιάταξη των δεδομένων και προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού 4



Γραμμική προσέγγιση και προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού 4 στα ίδια δεδομένα



Αναδιάταξη των δεδομένων και προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού 4



Άσκηση Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με τη μέθοδο ελαχ. τετραγώνων που να προσεγγίζει βέλτιστα τα δεδομένα

x_i	0.05	0.11	.15	0.31	0.46	0.52	0.70	0.74	0.82	0.98	1.17
y_i	0.956	0.890	0.832	0.717	0.571	0.539	0.378	0.370	0.306	0.242	0.104

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα με βάση τα δεδομένα

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
$\sum =$	6.01	5.905	4.6545	4.1150	3.9161	2.1839	1.3347

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις λύνουμε το γραμμικό σύστημα των **κανονικών εξισώσεων**:

$$\begin{aligned} 11a_0 + 6.01a_1 + 4.6545a_2 &= 5.9050 \\ 6.01a_0 + 4.6545a_1 + 4.1150a_2 &= 2.1839 \\ 4.6545a_0 + 4.1150a_1 + 3.9161a_2 &= 1.3357 \end{aligned}$$

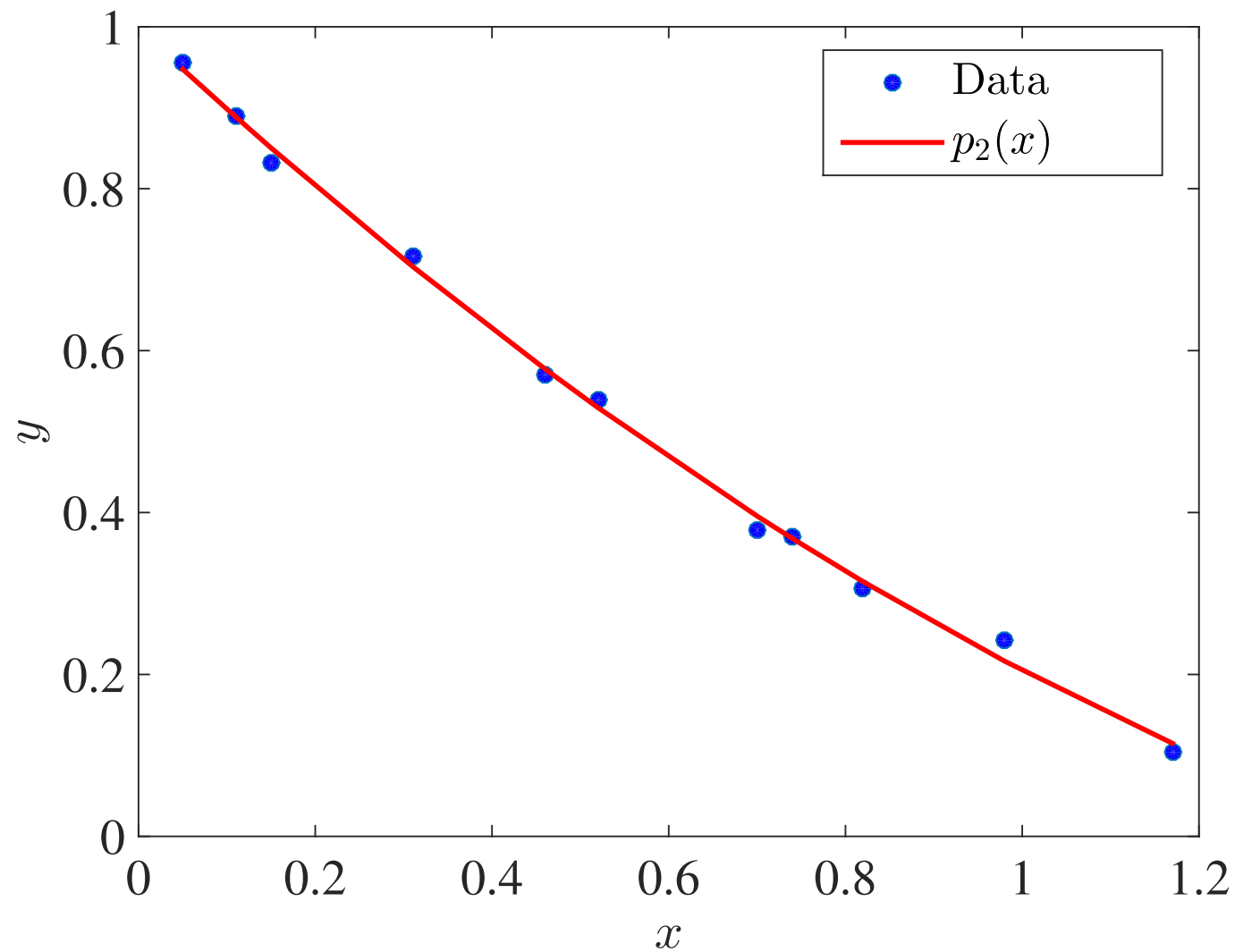
που έχει λύση

$$a_0 = 0.998, \quad a_1 = -1.018, \quad a_2 = 0.225.$$

Συνεπώς το πολυώνυμο βέλτιστης προσέγγισης (από των χώρο των πολυωνύμων 2ου βαθμού) στα δεδομένα είναι

$$p_2(x) = 0.998 - 1.018x + 0.225x^2.$$

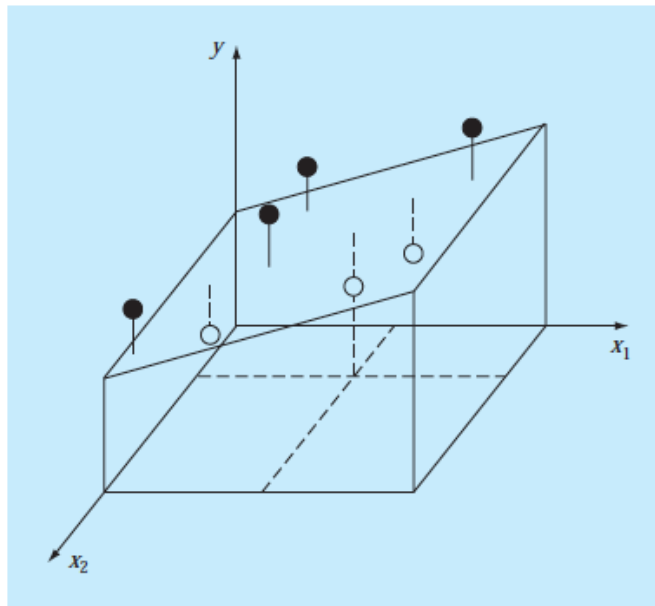
Το αποτέλεσμα γραφικά



Πολλαπλή γραμμική προσέγγιση

Εαν τα δεδομένα που θέλουμε να προσεγγίσουμε εξαρτώνται από **δύο ή περισσότερες μεταβλητές**.

Παράδειγμα, η περίπτωση όπου η συνάρτηση προσαρμογής εξαρτάται γραμμικά από δύο μεταβλητές x_1, x_2 (δηλ. είναι ένα επίπεδο)



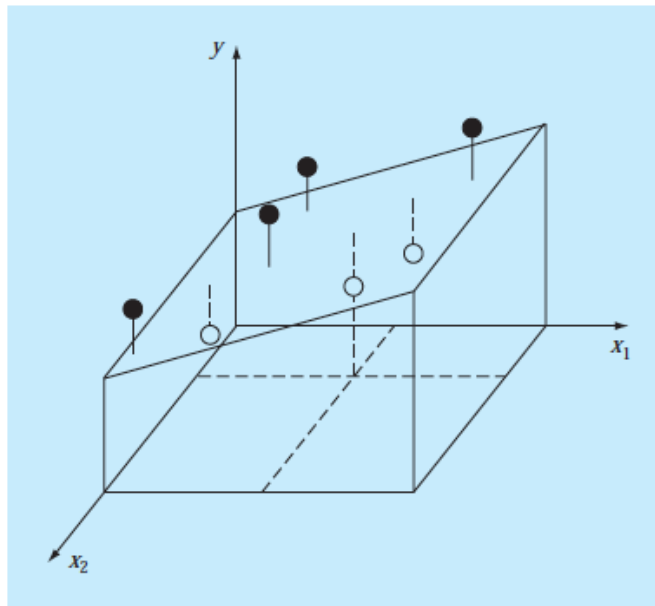
$$y = a + bx_1 + cx_2$$

σε ένα δοσμένο πλήθος σημείων (x_{1i}, x_{2i}, y_i) .

Πολλαπλή γραμμική προσέγγιση

Εαν τα δεδομένα που θέλουμε να προσεγγίσουμε εξαρτώνται από **δύο ή περισσότερες μεταβλητές**.

Παράδειγμα, η περίπτωση όπου η συνάρτηση προσαρμογής εξαρτάται γραμμικά από δύο μεταβλητές x_1, x_2 (δηλ. είναι ένα επίπεδο)



$$y = a + bx_1 + cx_2$$

σε ένα δοσμένο πλήθος σημείων (x_{1i}, x_{2i}, y_i) .

Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων θέλουμε τα a, b, c , έ.ώ.

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (a + bx_{1i} + cx_{2i}) \right]^2,$$

Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων θέλουμε τα a, b, c , έ.ώ.

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (a + bx_{1i} + cx_{2i}) \right]^2,$$

Η ελαχιστοποίηση της E επιτυγχάνεται όταν

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial c} = 0.$$

Τότε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων είναι

$$an + b \sum_{i=1}^n x_{1i} + c \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + c \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} = \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + c \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i$$

Το οποίο έχει μοναδική λύση, όταν τα σημεία x_{1i} και x_{2i} , $i = 1, \dots, n$ είναι διαφορετικά.

Τότε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων είναι

$$\begin{aligned}an + b \sum_{i=1}^n x_{1i} + c \sum_{i=1}^n x_{2i} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + c \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} &= \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + c \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i\end{aligned}$$

Το οποίο έχει μοναδική λύση, όταν τα σημεία x_{1i} και x_{2i} , $i = 1, \dots, n$ είναι διαφορετικά.

Ο συντελεστής πολλαπλής γραμμικής συσχέτισης

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{(r_{yx_1}^2)^2 + (r_{yx_2}^2)^2 - 2(r_{yx_1}^2)(r_{x_1x_2}^2)(r_{yx_1}^2)^2}{1 - (r_{x_1x_2}^2)^2}}$$

απαντά στο ερώτημα του κατά πόσο ικανοποιητική είναι η επιλογή της συνάρτησης προσαρμογής στα δεδομένα.

Άσκηση Χρησιμοποιήστε πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση για να προσαρμόσετε τα παρακάτω δεδομένα (την $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$)

x_1	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

Άσκηση Χρησιμοποιήστε πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση για να προσαρμόσετε τα παρακάτω δεδομένα (την $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$)

x_1	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

Λύση Βοηθητικός πίνακας

	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
	5	0	0	0	0	0	0	0
	10	2	1	4	1	2	20	10
	9	2.5	2	6.25	4	5	22.5	18
	0	1	3	1	9	3	0	0
	3	4	6	16	36	24	12	18
	27	7	2	49	4	14	189	54
Σ	54	16.5	14	76.25	54	48	243.5	100

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

Έχει λύση $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -3$.

Μάλιστα ο συντελεστής συσχέτισης εδώ είναι $r^2 = 1$.

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

Έχει λύση $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -3$.

Μάλιστα ο συντελεστής συσχέτισης εδώ είναι $r^2 = 1$.

Παρατήρηση Η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση είναι χρήσιμη και για την προσαρμογή μοντέλων της μορφής

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}$$

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Έχει λύση $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -3$.

Μάλιστα ο συντελεστής συσχέτισης εδώ είναι $r^2 = 1$.

Παρατήρηση Η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση είναι χρήσιμη και για την προσαρμογή μοντέλων της μορφής

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}$$

όπου λογαριθμίζοντας

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 + \dots + a_m \log x_m$$

ΚΕΦ 4: ΜΕΡΟΣ Β

Γενίκευση-Βέλτιστες Προσεγγίσεις σε Ευκλείδειους Χώρους

Θέλουμε να προσεγγίσουμε κάποιο στοιχείο ενός δεδομένου συνόλου X (π.χ. των συνεχών συναρτήσεων) με το **"καλύτερο"** δυνατό τρόπο από ένα άλλο χώρο Y (π.χ. πολυωνύμων συγκεκριμένου βαθμού).

Γενίκευση-Βέλτιστες Προσεγγίσεις σε Ευκλείδειους Χώρους

Θέλουμε να προσεγγίσουμε κάποιο στοιχείο ενός δεδομένου συνόλου X (π.χ. των συνεχών συναρτήσεων) με το **"καλύτερο"** δυνατό τρόπο από ένα άλλο χώρο Y (π.χ. πολυωνύμων συγκεκριμένου βαθμού).

Από τα διακριτά δεδομένα πηγαίνουμε τώρα σε συνεχή.

Γενίκευση-Βέλτιστες Προσεγγίσεις σε Ευκλείδειους Χώρους

Θέλουμε να προσεγγίσουμε κάποιο στοιχείο ενός δεδομένου συνόλου X (π.χ. των συνεχών συναρτήσεων) με το **"καλύτερο"** δυνατό τρόπο από ένα άλλο χώρο Y (π.χ. πολυωνύμων συγκεκριμένου βαθμού).

Από τα διακριτά δεδομένα πηγαίνουμε τώρα σε συνεχή.

Ορισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, και $Y \subset X$, με $x \in X$. Το $y \in Y$ για το οποίο ισχύει

$$\forall z \in Y \quad \|x - y\| \leq \|x - z\|$$

λέγεται **βέλτιστη προσέγγιση** του x από το Y .

Γενίκευση-Βέλτιστες Προσεγγίσεις σε Ευκλείδειους Χώρους

Θέλουμε να προσεγγίσουμε κάποιο στοιχείο ενός δεδομένου συνόλου X (π.χ. των συνεχών συναρτήσεων) με το **"καλύτερο"** δυνατό τρόπο από ένα άλλο χώρο Y (π.χ. πολυωνύμων συγκεκριμένου βαθμού).

Από τα διακριτά δεδομένα πηγαίνουμε τώρα σε συνεχή.

Ορισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, και $Y \subset X$, με $x \in X$. Το $y \in Y$ για το οποίο ισχύει

$$\forall z \in Y \quad \|x - y\| \leq \|x - z\|$$

λέγεται **βέλτιστη προσέγγιση** του x από το Y .

Ευκλείδειος Χώρος: Ένας πραγματικός γραμμικός χώρος στον οποίο έχει ορισθεί ένα **εσωτερικό γινόμενο**.

Παραδείγματα:

- Στον χώρο διανυσμάτων $\mathbf{R}^n$, ξέρουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων x, y είναι

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \longrightarrow \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2$$

Παραδείγματα:

- Στον χώρο διανυσμάτων $\mathbf{R}^n$, ξέρουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων x, y είναι

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \longrightarrow \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2$$

- Στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C[a, b]$, το εσωτ. γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g ορίζεται ως

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \longrightarrow \langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx$$

Συνεπώς η Ευκλείδεια νόρμα στον $C[a, b]$ δίνεται ως

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b f(x)^2 dx$$

- Στη **συνεχή** προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων αναφερόμαστε στην εύρεση της βέλτιστης προσέγγισης μίας συνάρτησης $f(x) \in C[a, b]$ από ένα άλλο χώρο συναρτήσεων (π.χ. πολυωνύμων $\mathbf{P}_n$)

- Στη **συνεχή** προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων αναφερόμαστε στην εύρεση της βέλτιστης προσέγγισης μίας συνάρτησης $f(x) \in C[a, b]$ από ένα άλλο χώρο συναρτήσεων (π.χ. πολυωνύμων $\mathbf{P}_n$)
- Η βέλτιστης προσέγγιση **ελαχιστοποιεί την απόσταση** που υπολογίζεται από τη νόρμα που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $C[a, b]$, δηλ.

$$||E||_2^2 = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx \rightarrow \text{min}$$

- Στη **συνεχή** προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων αναφερόμαστε στην εύρεση της βέλτιστης προσέγγισης μίας συνάρτησης $f(x) \in C[a, b]$ από ένα άλλο χώρο συναρτήσεων (π.χ. πολυωνύμων $\mathbf{P}_n$)
- Η βέλτιστης προσέγγιση **ελαχιστοποιεί την απόσταση** που υπολογίζεται από τη νόρμα που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $C[a, b]$, δηλ.

$$||E||_2^2 = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx \rightarrow \text{min}$$

- Έστω $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, τότε απαιτούμε

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, \dots, n. \quad \text{δηλ.,}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\int_a^b x^{i+j} dx \right) = \int_a^b x^j f(x) dx, \quad j = 0, \dots, n$$

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εναλλακτικά οι ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\sum_{i=0}^n a_i(x^i, x^j) = (f, x^j), \quad j = 0, \dots, n, \quad \text{δηλ.},$$

$$(x^0, x^0)a_0 + (x^1, x^0)a_1 + \dots + (x^n, x^0)a_n = (f, x^0)$$

$$(x^0, x^1)a_0 + (x^2, x^1)a_1 + \dots + (x^n, x^1)a_n = (f, x^1)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$(x^1, x^n)a_0 + (x^2, x^n)a_1 + \dots + (x^n, x^n)a_n = (f, x^n)$$

- Ο πίνακας G του γραμμικού συστήματος λέγεται **πίνακας του Gram**.

Εναλλακτικά οι ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\sum_{i=0}^n a_i(x^i, x^j) = (f, x^j), \quad j = 0, \dots, n, \text{ δηλ.,}$$

$$(x^0, x^0)a_0 + (x^1, x^0)a_1 + \dots + (x^n, x^0)a_n = (f, x^0)$$

$$(x^0, x^1)a_0 + (x^2, x^1)a_1 + \dots + (x^n, x^1)a_n = (f, x^1)$$

⋮

⋮

$$(x^1, x^n)a_0 + (x^2, x^n)a_1 + \dots + (x^n, x^n)a_n = (f, x^n)$$

- Ο πίνακας G του γραμμικού συστήματος λέγεται **πίνακας του Gram**.
- Τα πολυώνυμα $\phi_i = x^i, i = 0, \dots, n$ αποτελούν μία βάση του χώρου P_n .

Εναλλακτικά οι ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\sum_{i=0}^n a_i(x^i, x^j) = (f, x^j), \quad j = 0, \dots, n, \text{ δηλ.,}$$

$$(x^0, x^0)a_0 + (x^1, x^0)a_1 + \dots + (x^n, x^0)a_n = (f, x^0)$$

$$(x^0, x^1)a_0 + (x^2, x^1)a_1 + \dots + (x^n, x^1)a_n = (f, x^1)$$

⋮

⋮

$$(x^1, x^n)a_0 + (x^2, x^n)a_1 + \dots + (x^n, x^n)a_n = (f, x^n)$$

- Ο πίνακας G του γραμμικού συστήματος λέγεται **πίνακας του Gram**.
- Τα πολυώνυμα $\phi_i = x^i, i = 0, \dots, n$ αποτελούν μία βάση του χώρου $\mathbf{P}_n$.

Άσκηση Να βρεθεί το πολυώνυμο $p_2 \in \mathbf{P}_2$ το οποίο είναι η βέλτιστη προσέγγιση της $f(x) = \cos \pi x$, από τον $\mathbf{P}_2$ στο $[-1, 1]$, καθώς και το σφάλμα $\|f - p_2\|$.

Λύση Οι κανονικές εξισώσεις δίνουν

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-2}{\pi^2} \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι $a_0 = \frac{15}{4\pi^2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{45}{4\pi^2}$, και συνεπώς το

$$p_2(x) = \frac{15}{4\pi^2}(1 - 3x^2).$$

Λύση Οι κανονικές εξισώσεις δίνουν

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-2}{\pi^2} \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι $a_0 = \frac{15}{4\pi^2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{45}{4\pi^2}$, και συνεπώς το

$$p_2(x) = \frac{15}{4\pi^2}(1 - 3x^2).$$

Το σφάλμα της βέλτιστης προσέγγισης

$$\|f - p_2\| = \left(\int_{-1}^1 (\cos \pi x - p_2(x))^2 dx \right)^{1/2} = \left(1 - \frac{45}{2\pi^4} \right)^{1/2}$$

Γενικά υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση θα προσεγγίζεται από την

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

Γενικά υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση θα προσεγγίζεται από την

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

Μερικές φορές η επιλογή συναρτήσεων βάσης $\phi_i(x) = x^i, i = 0, \dots, n$ μπορεί να δώσει πίνακα G του Gram **κακής κατάστασης**.

Γενικά υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση θα προσεγγίζεται από την

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

Μερικές φορές η επιλογή συναρτήσεων βάσης $\phi_i(x) = x^i, i = 0, \dots, n$ μπορεί να δώσει πίνακα G του Gram **κακής κατάστασης**.

Μπορούμε να βρούμε κατάλληλες βάσεις ώστε να γραφεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων στην απλούστερη μορφή, δηλαδή $G = I$. Ψάχνουμε να βρούμε λοιπόν **ορθοκανονικές βάσεις** $\phi_i(x) i = 0, \dots, n$.

Γενικά υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση θα προσεγγίζεται από την

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

Μερικές φορές η επιλογή συναρτήσεων βάσης $\phi_i(x) = x^i, i = 0, \dots, n$ μπορεί να δώσει πίνακα G του Gram **κακής κατάστασης**.

Μπορούμε να βρούμε κατάλληλες βάσεις ώστε να γραφεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων στην απλούστερη μορφή, δηλαδή $G = I$. Ψάχνουμε να βρούμε λοιπόν **ορθοκανονικές βάσεις** $\phi_i(x) i = 0, \dots, n$.

Σε μία ορθοκανονική βάση ισχύει $(\phi_i, \phi_j) = 0, i \neq j$ και $\|\phi_i\| = 1, \forall i$.

Γενικά υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση θα προσεγγίζεται από την

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

Μερικές φορές η επιλογή συναρτήσεων βάσης $\phi_i(x) = x^i, i = 0, \dots, n$ μπορεί να δώσει πίνακα G του Gram **κακής κατάστασης**.

Μπορούμε να βρούμε κατάλληλες βάσεις ώστε να γραφεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων στην απλούστερη μορφή, δηλαδή $G = I$. Ψάχνουμε να βρούμε λοιπόν **ορθοκανονικές βάσεις** $\phi_i(x) i = 0, \dots, n$.

Σε μία ορθοκανονική βάση ισχύει $(\phi_i, \phi_j) = 0, i \neq j$ και $\|\phi_i\| = 1, \forall i$.

Τότε θα έπεται αμέσως (από τις κανονικές εξισώσεις) ότι

$$a_i = (f, \phi_i)$$

Γενικά υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση θα προσεγγίζεται από την

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

Μερικές φορές η επιλογή συναρτήσεων βάσης $\phi_i(x) = x^i, i = 0, \dots, n$ μπορεί να δώσει πίνακα G του Gram **κακής κατάστασης**.

Μπορούμε να βρούμε κατάλληλες βάσεις ώστε να γραφεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων στην απλούστερη μορφή, δηλαδή $G = I$. Ψάχνουμε να βρούμε λοιπόν **ορθοκανονικές βάσεις** $\phi_i(x) i = 0, \dots, n$.

Σε μία ορθοκανονική βάση ισχύει $(\phi_i, \phi_j) = 0, i \neq j$ και $\|\phi_i\| = 1, \forall i$.

Τότε θα έπεται αμέσως (από τις κανονικές εξισώσεις) ότι

$$a_i = (f, \phi_i)$$

Για τη βέλτιστη προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων από των υπόχωρο των πολυωνύμων $\mathbf{P}_n$, για να γίνει ο πίνακα G του Gram διαγώνιος, κατασκευάζουμε μια κατάλληλη βάση του $\mathbf{P}_n$ που αποτελείται από τα λεγόμενα **ορθογώνια πολυώνυμα**.

Μια σημαντική κατηγορία ορθογώνιων πολυωνύμων, που αποτελούν και βάση του $\mathbf{P}_n$, είναι τα πολυώνυμα Legendre.

Μια σημαντική κατηγορία ορθογώνιων πολυωνύμων, που αποτελούν και βάση του $\mathbf{P}_n$, είναι τα **πολυώνυμα Legendre**.

Πρόταση Τα πολυώνυμα Legendre, P_n , είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot, \cdot)$ στο $[-1, 1]$ και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

όπου $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x$.

Μια σημαντική κατηγορία ορθογώνιων πολυωνύμων, που αποτελούν και βάση του $\mathbf{P}_n$, είναι τα **πολυώνυμα Legendre**.

Πρόταση Τα πολυώνυμα Legendre, P_n , είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot, \cdot)$ στο $[-1, 1]$ και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

όπου $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x$.

Δηλαδή

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad \text{κ.ο.κ}$$

Μια σημαντική κατηγορία ορθογώνιων πολυωνύμων, που αποτελούν και βάση του $\mathbf{P}_n$, είναι τα **πολυώνυμα Legendre**.

Πρόταση Τα πολυώνυμα Legendre, P_n , είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot, \cdot)$ στο $[-1, 1]$ και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

όπου $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x$.

Δηλαδή

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad \text{κ.ο.κ}$$

Επιπλέον ισχύει

$$(P_i, P_i) = \frac{2}{2i + 1}, \quad \forall i. \quad (1)$$

Άσκηση Να βρεθεί το πολυώνυμο $p_2 \in \mathbf{P}_2$ το οποίο είναι η βέλτιστη προσέγγιση της $f(x) = \cos \pi x$, από τον χώρο $\mathbf{P}_2$ στο $[-1, 1]$ χρησιμοποιώντας ως βάση του $\mathbf{P}_2$ τα πολυώνυμα Legendre.

Άσκηση Να βρεθεί το πολυώνυμο $p_2 \in \mathbf{P}_2$ το οποίο είναι η βέλτιστη προσέγγιση της $f(x) = \cos \pi x$, από τον χώρο $\mathbf{P}_2$ στο $[-1, 1]$ χρησιμοποιώντας ως βάση του $\mathbf{P}_2$ τα πολυώνυμα Legendre.

Λύση Έστω ότι η βέλτιστη προσέγγιση ότι γράφεται συναρτήσει των πολυωνύμων Legendre ως

$$y = p_2 = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$$

Άσκηση Να βρεθεί το πολυώνυμο $p_2 \in \mathbf{P}_2$ το οποίο είναι η βέλτιστη προσέγγιση της $f(x) = \cos \pi x$, από τον χώρο $\mathbf{P}_2$ στο $[-1, 1]$ χρησιμοποιώντας ως βάση του $\mathbf{P}_2$ τα πολυώνυμα Legendre.

Λύση Έστω ότι η βέλτιστη προσέγγιση ότι γράφεται συναρτήσει των πολυωνύμων Legendre ως

$$y = p_2 = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

Το διαγώνιο σύστημα κανονικών εξισώσεων είναι:

$$(P_i, P_i) a_i = (f, P_i), \quad i = 0, 1, 2$$

Άσκηση Να βρεθεί το πολυώνυμο $p_2 \in \mathbf{P}_2$ το οποίο είναι η βέλτιστη προσέγγιση της $f(x) = \cos \pi x$, από τον χώρο $\mathbf{P}_2$ στο $[-1, 1]$ χρησιμοποιώντας ως βάση του $\mathbf{P}_2$ τα πολυώνυμα Legendre.

Λύση Έστω ότι η βέλτιστη προσέγγιση ότι γράφεται συναρτήσει των πολυωνύμων Legendre ως

$$y = p_2 = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

Το διαγώνιο σύστημα κανονικών εξισώσεων είναι:

$$(P_i, P_i) a_i = (f, P_i), \quad i = 0, 1, 2$$

Από την (1) τότε έχουμε

$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 P_i(x) \cos \pi x dx, \quad i = 0, 1, 2$$

από τις οποίες υπολογίζουμε

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-15}{2\pi^2}$$

Άρα, η βέλτιστη προσέγγιση είναι

$$y = p_2(x) = \frac{15}{4\pi^2}(1 - 3x^2)$$