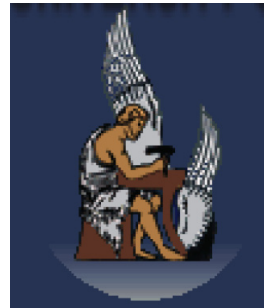


Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 10η



**Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Παρεμβολή Hermite

- Ζητάμε από την παραμβάλλουσα συνάρτηση (πολυώνυμο) να έχει στα σημεία (κόμβους) παρεμβολής τις **ίδιες παραγώγους** (μέχρι μια ορισμένη τάξη) με την παρεμβαλλόμενη συνάρτηση f .
- Η τάξη των παραγώγων μπορεί να διαφέρει από κόμβο σε κόμβο.

Παρεμβολή Hermite

- Ζητάμε από την παραβάλλουσα συνάρτηση (πολυώνυμο) να έχει στα σημεία (κόμβους) παρεμβολής τις **ίδιες παραγώγους** (μέχρι μια ορισμένη τάξη) με την παρεμβαλλόμενη συνάρτηση f .
- Η τάξη των παραγώγων μπορεί να διαφέρει από κόμβο σε κόμβο.

Θεώρημα παρεμβολής τύπου Hermite Έστω $m_0, m_1, \dots, m_n$ και $N = m_0 + \dots + m_n + n$, και $M = \max(m_0, \dots, m_n)$. Αν $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ και $f \in C^M[a, b]$, τότε το πρόβλημα παρεμβολής τύπου Hermite, όπου ζητείται p_N τ.ω.

$$\begin{aligned} p^{(i)}(x_0) &= f^{(i)}(x_0), & i &= 0, \dots, m_0 \\ p^{(i)}(x_1) &= f^{(i)}(x_1), & i &= 0, \dots, m_1 \\ &\vdots \\ p^{(i)}(x_n) &= f^{(i)}(x_n), & i &= 0, \dots, m_n \end{aligned}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

Παρεμβολή Hermite (Εφαπτόμενο πολυώνυμο)

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή που ζητάμε

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

το πολυώνυμο παρεμβολής p τότε θα είναι το πολύ $2n + 1$ βαθμού.
($m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$).

Παρεμβολή Hermite (Εφαπτόμενο πολυώνυμο)

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή που ζητάμε

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

το πολυώνυμο παρεμβολής p τότε θα είναι το πολύ $2n + 1$ βαθμού.
($m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$).
και

$$p = \sum_{i=0}^n \left[f(x_i) H_i(x) + f'(x_i) G_i(x) \right]$$

όπου τα πολυώνυμα $2n + 1$ βαθμού

$$H_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i) L'_i(x_i) \right) L_i^2(x)$$

$$G_i(x) = (x - x_i) L_i^2(x)$$

και L_i τα πολυώνυμα παρεμβολής **Lagrange**

Εκτίμηση Σφάλματος Παρεμβολής Hermite

Θεώρημα Έστω $f \in C^{2n+2}[a, b]$ και $x_0, x_1, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Έαν $p \in \mathbf{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής στα Hermite $\{x_i\}_{i=0}^n$ τότε ισχύουν $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2, \quad \text{για } \xi \in (a, b)$$

Εκτίμηση Σφάλματος Παρεμβολής Hermite

Θεώρημα Έστω $f \in C^{2n+2}[a, b]$ και $x_0, x_1, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Έαν $p \in \mathbf{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής στα Hermite $\{x_i\}_{i=0}^n$ τότε ισχύουν $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2, \quad \text{για } \xi \in (a, b)$$

Παράδειγμα Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite που παραμβάλλει τη $f(x) = 1/x$ στα $x_0 = 1, x_1 = 2$. Να γίνει εκτίμηση του σφάλματος στο σημείο $x = 1.5$

Εκτίμηση Σφάλματος Παρεμβολής Hermite

Θεώρημα Έστω $f \in C^{2n+2}[a, b]$ και $x_0, x_1, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Έαν $p \in \mathbf{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής στα Hermite $\{x_i\}_{i=0}^n$ τότε ισχύουν $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2, \quad \text{για } \xi \in (a, b)$$

Παράδειγμα Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite που παραμβάλλει τη $f(x) = 1/x$ στα $x_0 = 1, x_1 = 2$. Να γίνει εκτίμηση του σφάλματος στο σημείο $x = 1.5$

Τα πολυώνυμα Lagrange

$$L_0(x) = 2 - x, \quad L_1(x) = x - 1$$

$$H_0(x) = (1 - 2(1 - x))(2 - x)^2 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

$$H_1(x) = (1 - 2(x - 2))(x - 1)^2 = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$$

$$G_0(x) = (x - 1)(2 - x)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$$G_1(x) = (x - 2)(x - 1)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$$H_0(x) = (1 - 2(1 - x))(2 - x)^2 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

$$H_1(x) = (1 - 2(x - 2))(x - 1)^2 = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$$

$$G_0(x) = (x - 1)(2 - x)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$$G_1(x) = (x - 2)(x - 1)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite είναι

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \cdot H_0(x) + \frac{1}{2} \cdot H_1(x) - 1 \cdot G_0(x) - \frac{1}{4} \cdot G_1(x) \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 3. \end{aligned}$$

$$H_0(x) = (1 - 2(1 - x))(2 - x)^2 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

$$H_1(x) = (1 - 2(x - 2))(x - 1)^2 = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$$

$$G_0(x) = (x - 1)(2 - x)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$$G_1(x) = (x - 2)(x - 1)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite είναι

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \cdot H_0(x) + \frac{1}{2} \cdot H_1(x) - 1 \cdot G_0(x) - \frac{1}{4} \cdot G_1(x) \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 3. \end{aligned}$$

Η εκτίμηση του σφάλματος στο $x = 1.5$ είναι για $\xi \in [1, 2]$

$$E = |f(1.5) - p(1.5)| = \left| \frac{1}{24}(1.5 - 1)^2(1.5 - 2)^2 \frac{24}{\xi^5} \right| \leq \frac{1}{16}$$

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES

- Η πολυωνυμική παρεμβολή είδαμε ότι για μεγάλο n παρουσιάζει υπολογιστικά προβλήματα. Όμως για μικρό n , **τοπικά**, έχει πολύ καλές προσεγγιστικές ιδιότητες.

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES

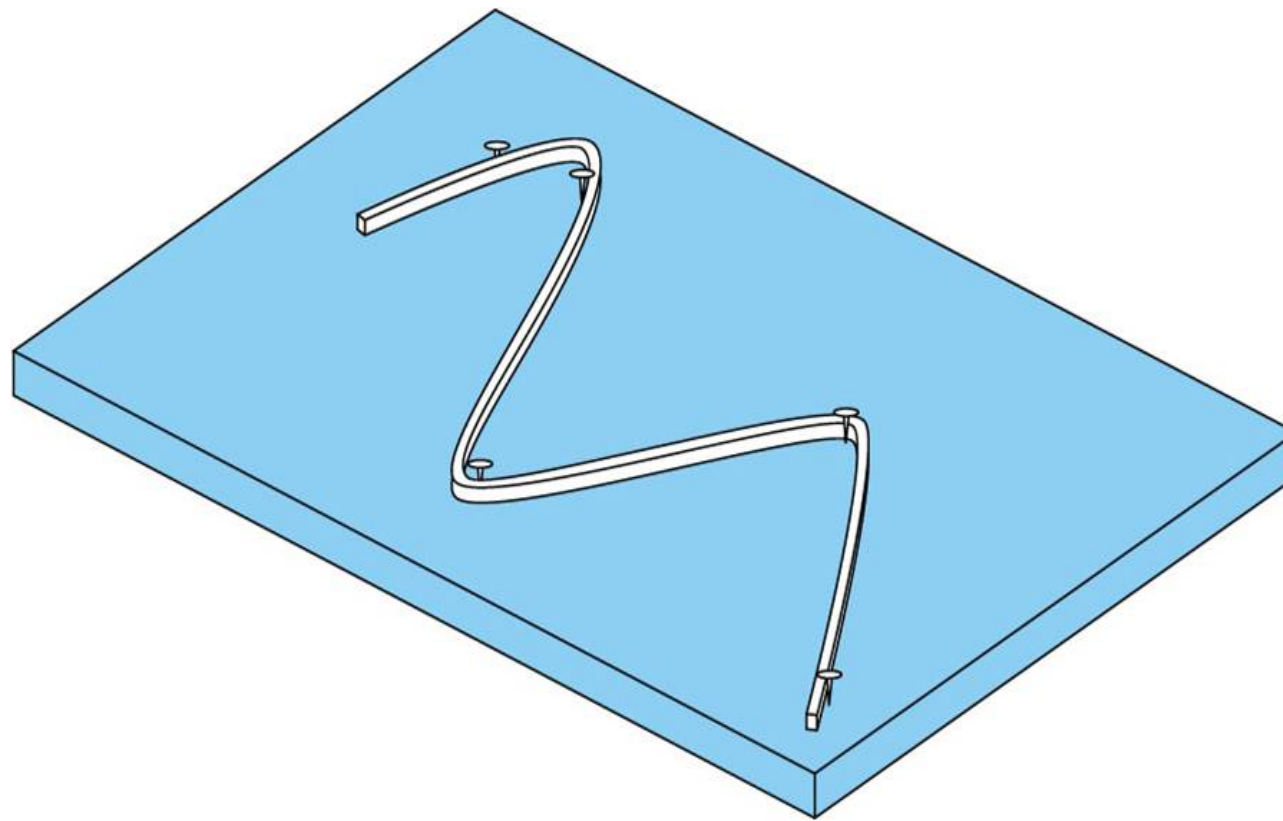
- Η πολυωνυμική παρεμβολή είδαμε ότι για μεγάλο n παρουσιάζει υπολογιστικά προβλήματα. Όμως για μικρό n , **τοπικά**, έχει πολύ καλές προσεγγιστικές ιδιότητες.
- Συνεπώς μπορούμε σε ένα διάστημα $[a, b]$, και για ένα διαμερισμό του $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, να παρεμβάλλουμε με συναρτήσεις που είναι (γενικά) διαφορετικά πολυώνυμα σε κάθε $[x_i, x_{i+1}]$.

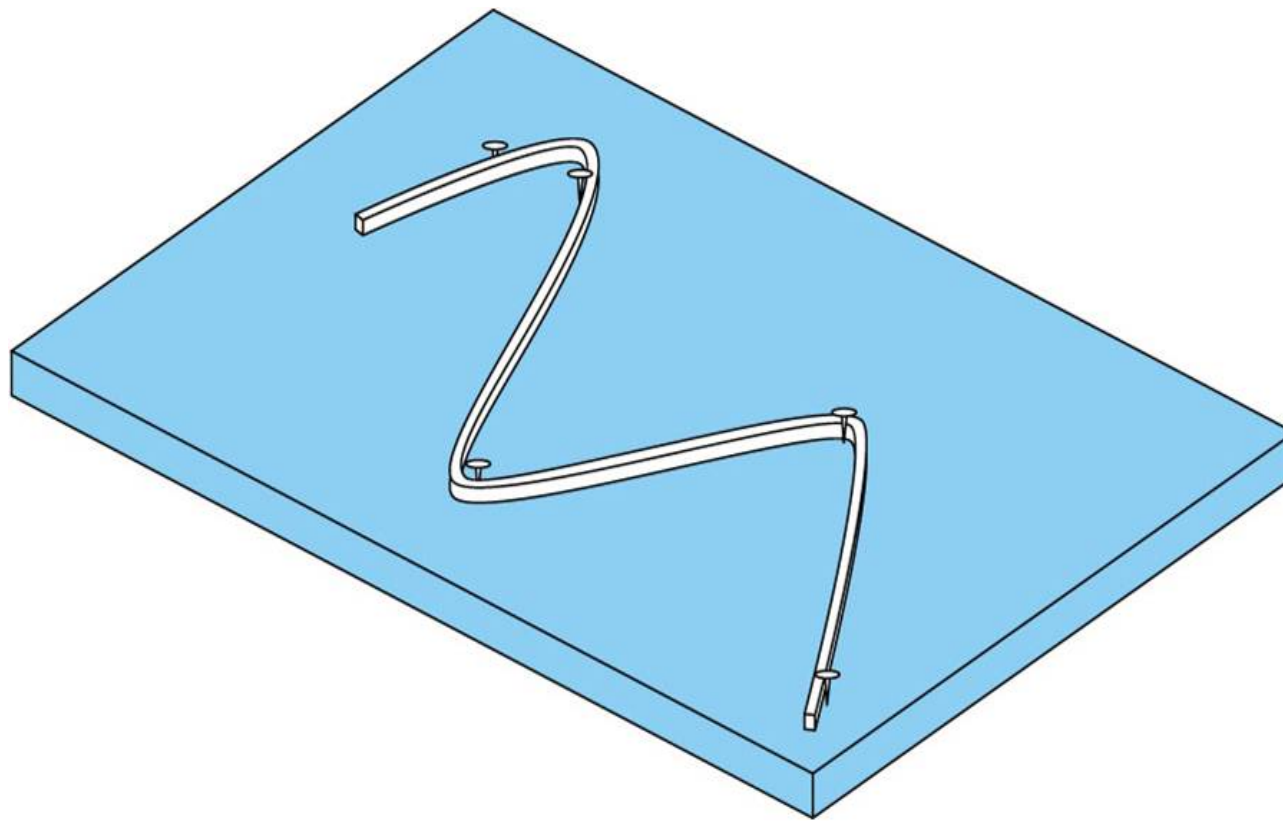
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES

- Η πολυωνυμική παρεμβολή είδαμε ότι για μεγάλο n παρουσιάζει υπολογιστικά προβλήματα. Όμως για μικρό n , **τοπικά**, έχει πολύ καλές προσεγγιστικές ιδιότητες.
- Συνεπώς μπορούμε σε ένα διάστημα $[a, b]$, και για ένα διαμερισμό του $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, να παρεμβάλλουμε με συναρτήσεις που είναι (γενικά) διαφορετικά πολυώνυμα σε κάθε $[x_i, x_{i+1}]$.
- Τα διαφορετικά αυτά πολυώνυμα μπορούμε να ζητήσουμε να είναι συγκεκριμένου βαθμού (τοπικά) και να έχουν μια συγκεκριμένη ομαλότητα στο $[a, b]$.

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES

- Η πολυωνυμική παρεμβολή είδαμε ότι για μεγάλο n παρουσιάζει υπολογιστικά προβλήματα. Όμως για μικρό n , **τοπικά**, έχει πολύ καλές προσεγγιστικές ιδιότητες.
- Συνεπώς μπορούμε σε ένα διάστημα $[a, b]$, και για ένα διαμερισμό του $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, να παρεμβάλλουμε με συναρτήσεις που είναι (γενικά) διαφορετικά πολυώνυμα σε κάθε $[x_i, x_{i+1}]$.
- Τα διαφορετικά αυτά πολυώνυμα μπορούμε να ζητήσουμε να είναι συγκεκριμένου βαθμού (τοπικά) και να έχουν μια συγκεκριμένη ομαλότητα στο $[a, b]$.
- Το όνομα Spline προέρχεται από τη μηχανική και σημαίνει εύκαμπτες καμπύλες.





Ορισμός. Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$. Τα στοιχεία του (γραμμικού) χώρου

$$S_m(\Delta) := \left\{ s \in C^{m-1}[a, b] : s \Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbf{P}_m, i = 0, \dots, m-1 \right\}$$

λέγονται **πολυωνυμικές splines βαθμού m** (ως προς Δ).

Παρατηρήσεις

▷ Το $S_m(\Delta)$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που έχουν ομαλότητα $C^{m-1}[a, b]$ στους εσωτερικούς κόμβους του διαμερισμού Δ .

Παρατηρήσεις

- ▷ Το $S_m(\Delta)$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που έχουν ομαλότητα $C^{m-1}[a, b]$ στους εσωτερικούς κόμβους του διαμερισμού Δ .
- ▷ Αυτή είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ομαλότητα (η οποία επιτρέπει να υπάρχουν και στοιχεία s του $S_m(\Delta)$ τα οποία δεν είναι αναγκαστικά πολυώνυμα)

Παρατηρήσεις

- ▷ Το $S_m(\Delta)$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που έχουν ομαλότητα $C^{m-1}[a, b]$ στους εσωτερικούς κόμβους του διαμερισμού Δ .
- ▷ Αυτή είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ομαλότητα (η οποία επιτρέπει να υπάρχουν και στοιχεία s του $S_m(\Delta)$ τα οποία δεν είναι αναγκαστικά πολυώνυμα)
- ▷ Η επιβολή συγκεκριμένης ομαλότητας σημαίνει ότι όσο ομαλότερες είναι οι splines ενός συγκεκριμένου βαθμού, τόσο μικρότερη η διάσταση του αντίστοιχου χώρου.

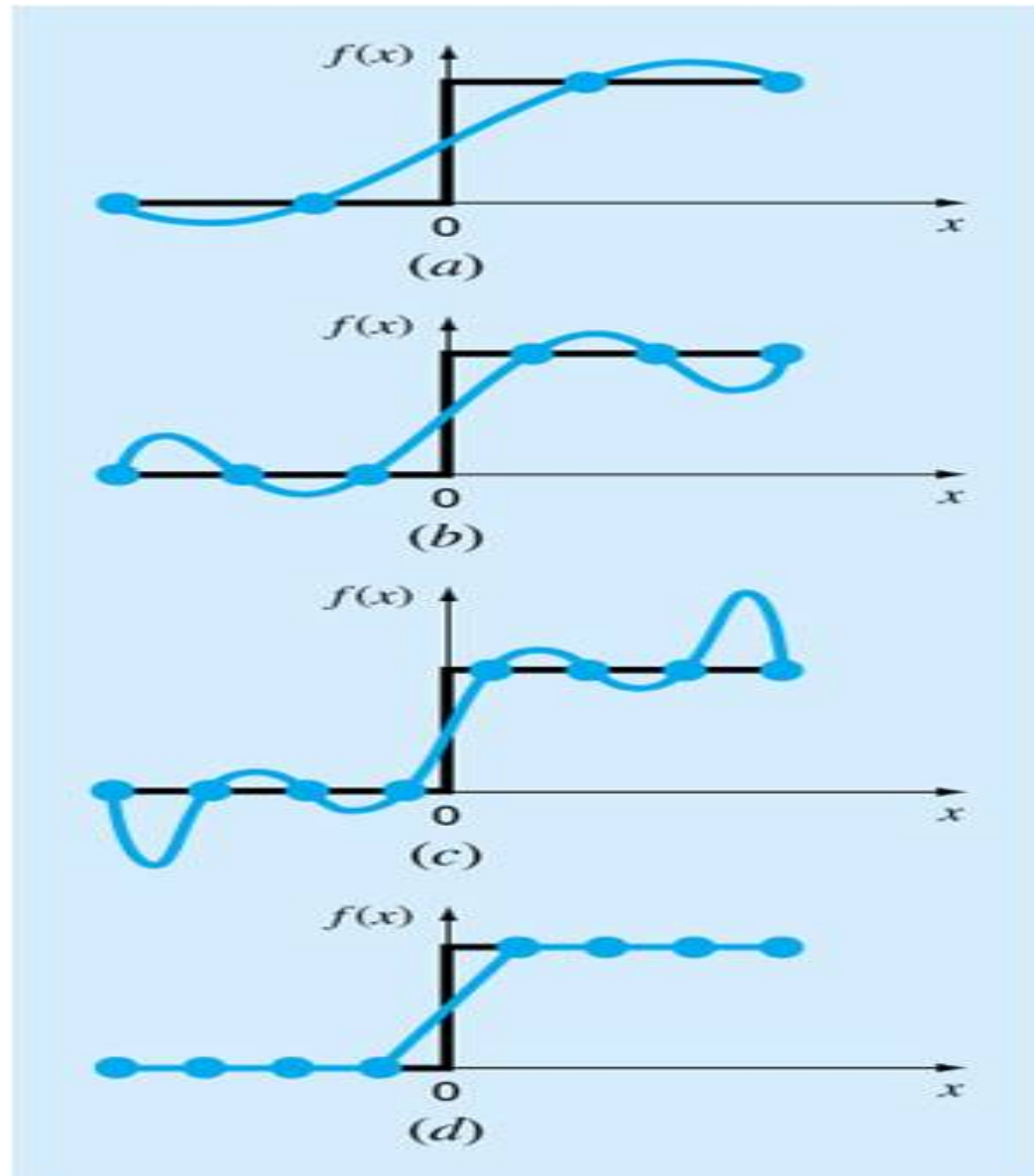
Παρατηρήσεις

- ▷ Το $S_m(\Delta)$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που έχουν ομαλότητα $C^{m-1}[a, b]$ στους εσωτερικούς κόμβους του διαμερισμού Δ .
- ▷ Αυτή είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ομαλότητα (η οποία επιτρέπει να υπάρχουν και στοιχεία s του $S_m(\Delta)$ τα οποία δεν είναι αναγκαστικά πολυώνυμα)
- ▷ Η επιβολή συγκεκριμένης ομαλότητας σημαίνει ότι όσο ομαλότερες είναι οι splines ενός συγκεκριμένου βαθμού, τόσο μικρότερη η διάσταση του αντίστοιχου χώρου.
- ▷ Βασικές splines στις εφαρμογές είναι οι γραμμικές $S_1(\Delta)$ και κυβικές $S_3(\Delta)$.

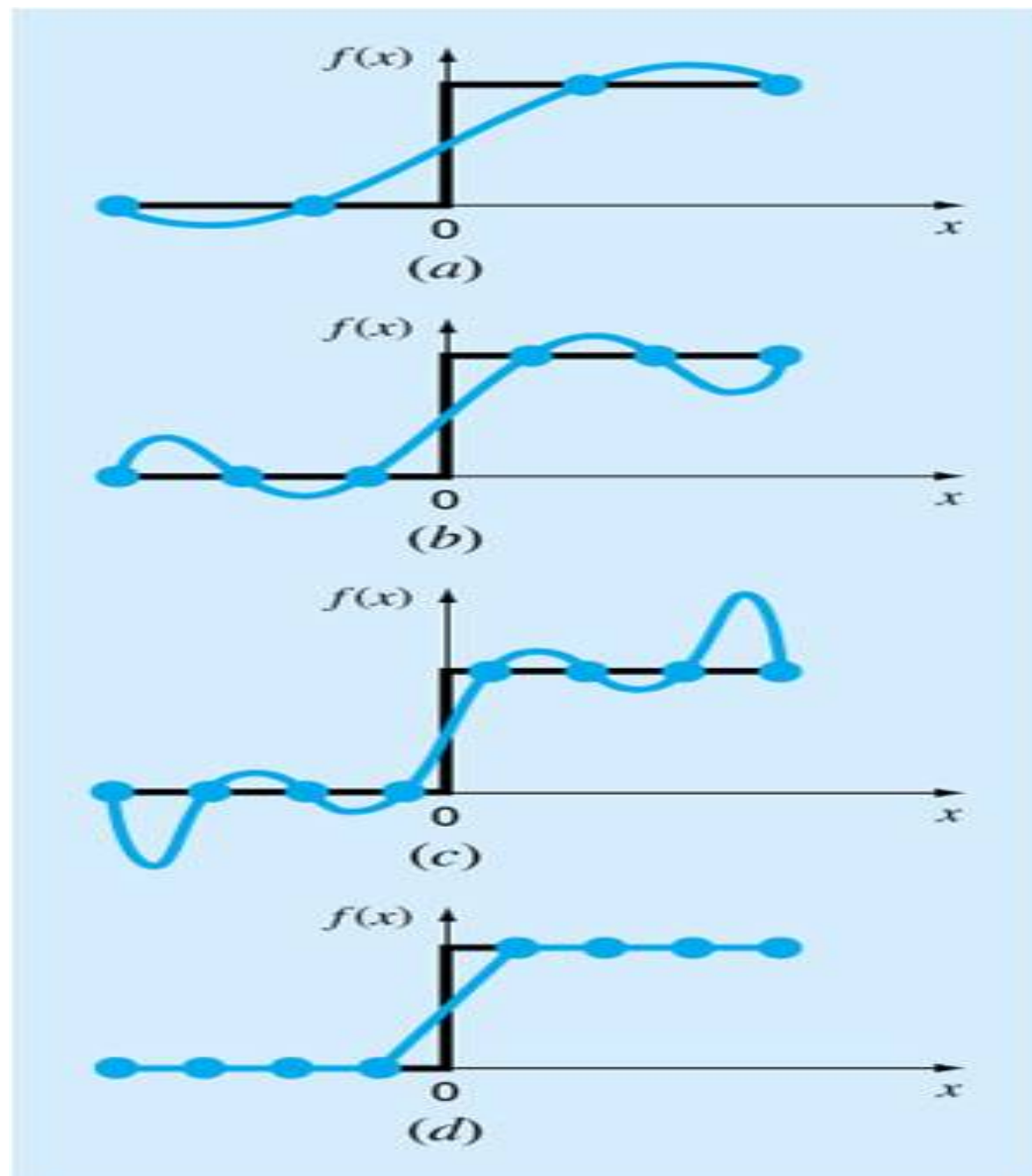
Παρατηρήσεις

- ▷ Το $S_m(\Delta)$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που έχουν ομαλότητα $C^{m-1}[a, b]$ στους εσωτερικούς κόμβους του διαμερισμού Δ .
- ▷ Αυτή είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ομαλότητα (η οποία επιτρέπει να υπάρχουν και στοιχεία s του $S_m(\Delta)$ τα οποία δεν είναι αναγκαστικά πολυώνυμα)
- ▷ Η επιβολή συγκεκριμένης ομαλότητας σημαίνει ότι όσο ομαλότερες είναι οι splines ενός συγκεκριμένου βαθμού, τόσο μικρότερη η διάσταση του αντίστοιχου χώρου.
- ▷ Βασικές splines στις εφαρμογές είναι οι γραμμικές $S_1(\Delta)$ και κυβικές $S_3(\Delta)$.
- ▷ Το πρόβλημα παρεμβολής με splines λύνεται μονοσήμαντα.

Παρεμβολή με (τμηματικά) γραμμικές splines



Παρεμβολή με (τμηματικά) γραμμικές splines



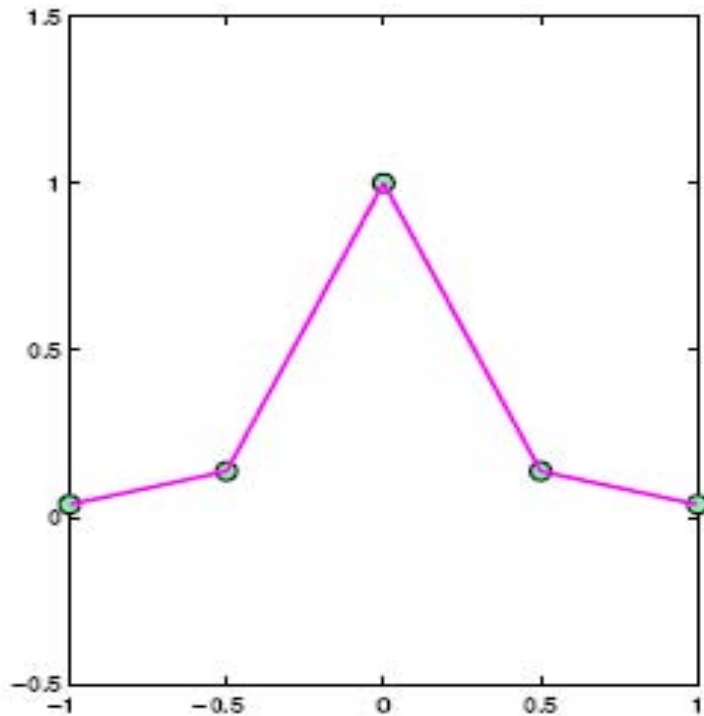
(a) – (c) : Πολυωνυμική Παρεμβολή (d) : Παρεμβολή με γραμμική splines

Έστω $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$.
Θέλουμε $S \in S_1(\Delta)$ και $S \in C[a, b]$ τ.ω. $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

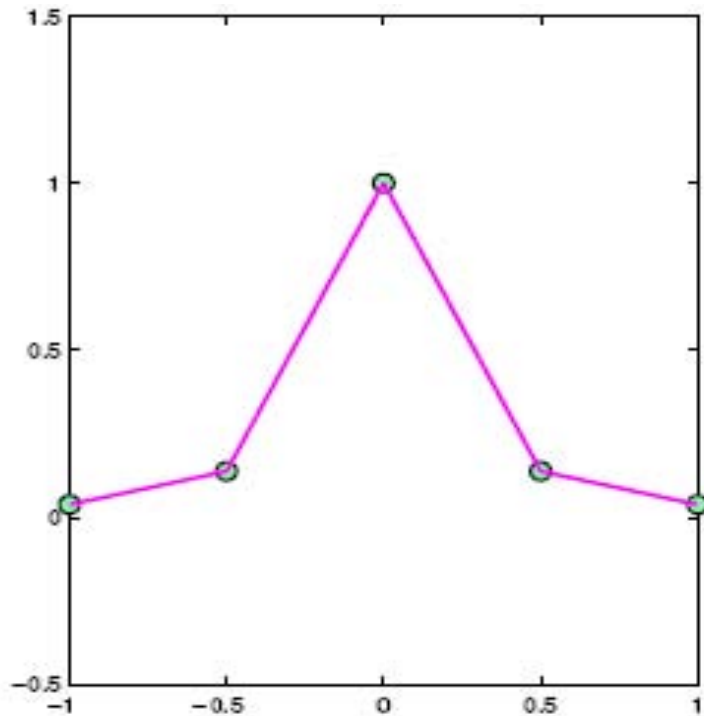
Έστω $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$.
 Θέλουμε $S \in S_1(\Delta)$ και $S \in C[a, b]$ τ.ω. $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



Έστω $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$.
 Θέλουμε $S \in S_1(\Delta)$ και $S \in C[a, b]$ τ.ω. $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

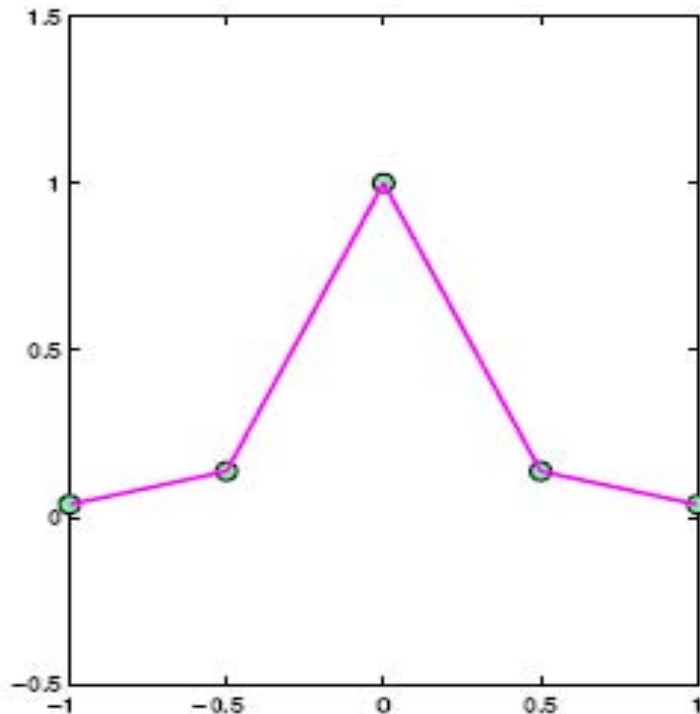
$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



- $s \in S_1(\Delta) \Rightarrow s_i \in \mathbf{P}_1 \Rightarrow$ γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής στα x_i, x_{i+1}
- Η $S(x)$ στους εσωτ. κόμβους **συνεχής**
 $\Rightarrow s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), i = 1, \dots, n - 1$

Έστω $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$.
 Θέλουμε $S \in S_1(\Delta)$ και $S \in C[a, b]$ τ.ω. $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



- $s \in S_1(\Delta) \Rightarrow s_i \in \mathbf{P}_1 \Rightarrow$ γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής στα x_i, x_{i+1}
- Η $S(x)$ στους εσωτ. κόμβους **συνεχής**
 $\Rightarrow s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), i = 1, \dots, n - 1$

$$s_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$

Θεώρημα (σφάλματος) Έστω $f \in C^2[a, b]$ και ένας διαμερισμός του $[a, b]$
 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ και $S \in S_1(\Delta)$ η παραμβάλλουσα
γραμμική spline της f . Αν $h_i = x_i - x_{i-1}$ και $h = \max_i h_i$ τότε ισχύει

$$\|f - S\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_{\infty}$$

Θεώρημα (σφάλματος) Έστω $f \in C^2[a, b]$ και ένας διαμερισμός του $[a, b]$
 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ και $S \in S_1(\Delta)$ η παραμβάλλουσα
γραμμική spline της f . Αν $h_i = x_i - x_{i-1}$ και $h = \max_i h_i$ τότε ισχύει

$$\|f - S\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

Απόδειξη Στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ παρεμβολή Lagrange με

$$s_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

Συνεπώς για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ και από το **σφάλμα πολυων. παρεμβολής**

$$|f(x) - S(x)| = |f(x) - s_i(x)| = \frac{1}{2} \left| (x - x_i)(x - x_{i+1}) f''(\xi) \right|$$

Συνεπώς

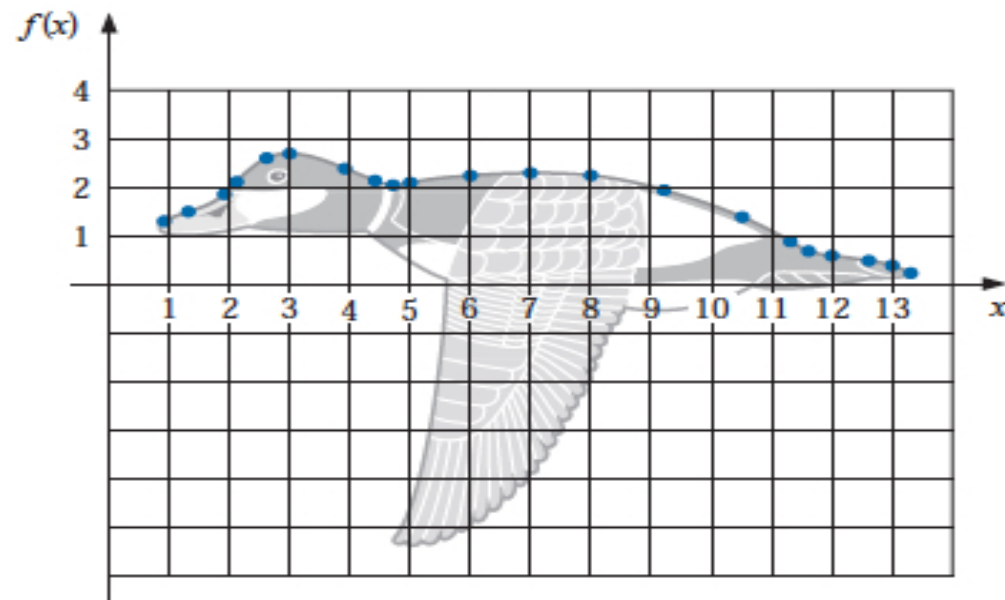
$$\|f - S\|_\infty \leq \frac{1}{2} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left| (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \|f''\|_\infty \leq \frac{h_{i+1}^2}{8} \|f''\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

- Η παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές, συνεχείς, συναρτήσεις είναι μία τοπική και υπολογιστικά οικονομική διαδικασία.

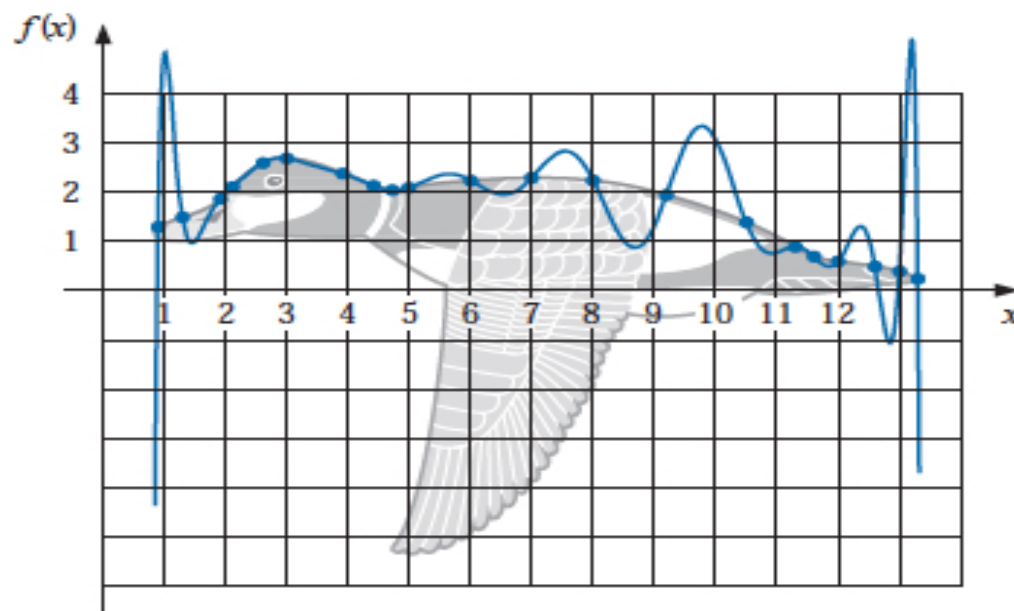
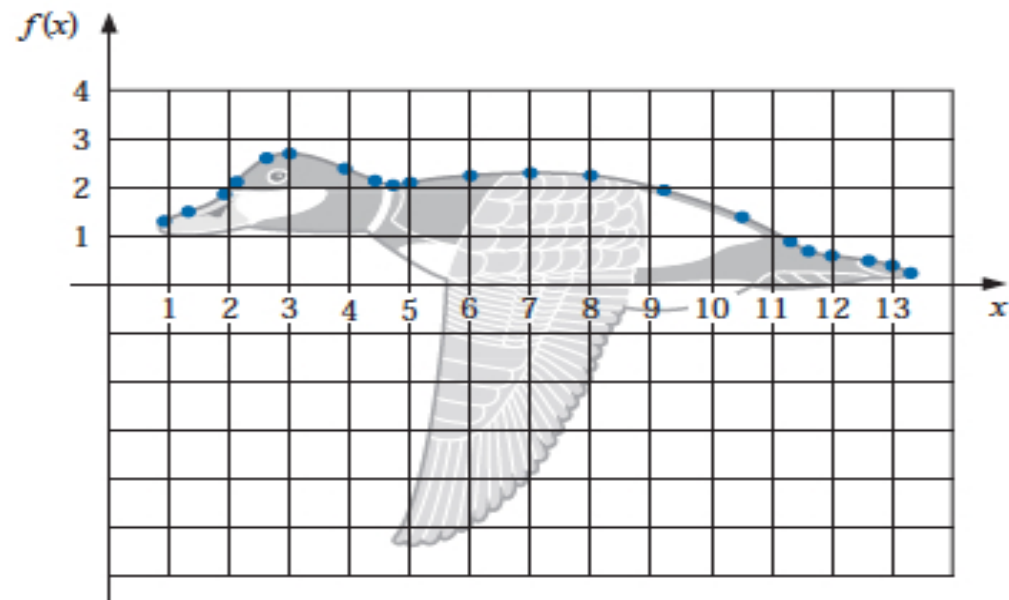
- Η παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές, συνεχείς, συναρτήσεις είναι μία τοπική και υπολογιστικά οικονομική διαδικασία.
- Η παράγωγος S' δεν υπάρχει στους εσωτερικούς κόμβους (και είναι κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση)

- Η παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές, συνεχείς, συναρτήσεις είναι μία τοπική και υπολογιστικά οικονομική διαδικασία.
- Η παράγωγος S' δεν υπάρχει στους εσωτερικούς κόμβους (και είναι κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση)
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια και με ομαλότερες (με την έννοια της συνέχειας) τμηματικές πολυωνυμικές συναρτήσεις, χρειαζόμαστε splines **μεγαλύτερου βαθμού**, π.χ. τετραγωνικές και κυβικές.

ΚΥΒΙΚΕΣ SPLINES vs Πολυωνυμική παρεμβολή



ΚΥΒΙΚΕΣ SPLINES vs Πολυωνυμική παρεμβολή



Παρεμβολή με κυβικές splines

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $\Delta_h : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$ με $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Παρεμβολή με κυβικές splines

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $\Delta_h : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$ με $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε Θέλουμε $S \in S_3(\Delta)$ και $S \in C^2[a, b]$ τ.ω.
 $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Παρεμβολή με κυβικές splines

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $\Delta_h : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$ με $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε Θέλουμε $S \in S_3(\Delta)$ και $S \in C^2[a, b]$ τ.ω.
 $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

- Η κάθε συνάρτηση s_i είναι ένα διαφορετικό **κυβικό πολυώνυμο** σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, έστω της μορφής $s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Παρεμβολή με κυβικές splines

Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $\Delta_h : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$ με $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε Θέλουμε $S \in S_3(\Delta)$ και $S \in C^2[a, b]$ τ.ω.
 $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

- Η κάθε συνάρτηση s_i είναι ένα διαφορετικό **κυβικό πολυώνυμο** σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, έστω της μορφής $s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
- Συνεπώς έχω **$4n$ αγνώστους** (σταθερές-συντελεστών του πολυωνύμου)

Παρεμβολή με κυβικές splines

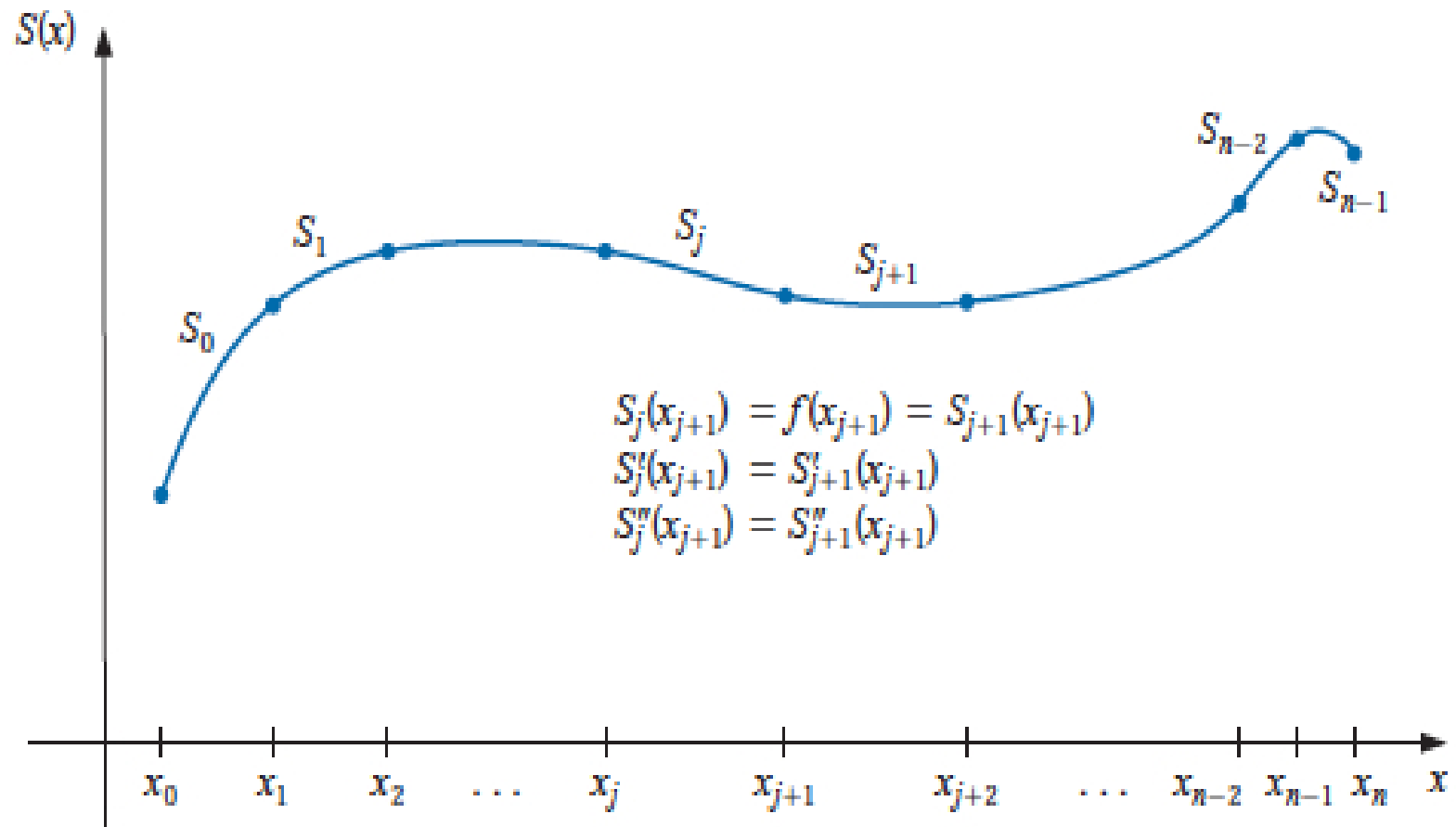
Έστω $[a, b] \subset \mathbf{R}$ και $\Delta_h : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$ με $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε Θέλουμε $S \in S_3(\Delta)$ και $S \in C^2[a, b]$ τ.ω.
 $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ μέ

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

- Η κάθε συνάρτηση s_i είναι ένα διαφορετικό **κυβικό πολυώνυμο** σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, έστω της μορφής $s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
- Συνεπώς έχω **$4n$ αγνώστους** (σταθερές-συντελεστών του πολυωνύμου)

ΚΥΒΙΚΕΣ SPLINES



και συνθήκες ομαλότητας στους κόμβους.

Η συνάρτηση $S(x)$ θέλουμε να ικανοποιεί τα

(1) $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ για $i = 0, \dots, n$ ($n + 1$ συνθήκες)

(2) Η $S(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

(3) Η $S'(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

(4) Η $S''(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

Συνολικά έχουμε $4n - 2$ συνθήκες για $4n$ αγνώστους δηλ. έχουμε 2 βαθμούς ελευθερίας.

Η συνάρτηση $S(x)$ θέλουμε να ικανοποιεί τα

(1) $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ για $i = 0, \dots, n$ ($n + 1$ συνθήκες)

(2) Η $S(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

(3) Η $S'(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

(4) Η $S''(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

Συνολικά έχουμε $4n - 2$ συνθήκες για $4n$ αγνώστους δηλ. έχουμε 2 βαθμούς ελευθερίας.

Χρειαζόμαστε 2 επιπλέον συνθήκες οι οποίες θα σχετίζονται με τους συνοριακούς κόμβους $x_0 = a$ και $x_n = b$ (**συνοριακές συνθήκες**)

Η συνάρτηση $S(x)$ θέλουμε να ικανοποιεί τα

(1) $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ για $i = 0, \dots, n$ ($n + 1$ συνθήκες)

(2) Η $S(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

(3) Η $S'(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

(4) Η $S''(x)$ συνεχής στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ συνθήκες)

Συνολικά έχουμε $4n - 2$ συνθήκες για $4n$ αγνώστους δηλ. έχουμε 2 βαθμούς ελευθερίας.

Χρειαζόμαστε 2 επιπλέον συνθήκες οι οποίες θα σχετίζονται με τους συνοριακούς κόμβους $x_0 = a$ και $x_n = b$ (**συνοριακές συνθήκες**)

Μπορούμε να θέσουμε διάφορων τύπων συνοριακές συνθήκες.

Φυσικές Κυβικές splines

Εδώ οι συνοριακές συνθήκες είναι $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, με $h_i = x_{i+1} - x_i$
τα βήματα κατασκευής είναι:

Φυσικές Κυβικές splines

Εδώ οι συνοριακές συνθήκες είναι $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, με $h_i = x_{i+1} - x_i$ τα βήματα κατασκευής είναι:

Βήμα 1: Έστω ότι γνωρίζουμε τις τιμές $s_i''(x_i) := s_i''$, $\forall i = 0, \dots, n$.

Στη πραγματικότητα ΔΕΝ τις γνωρίζουμε (και αυτοί θα είναι οι **άγνωστοι** μας), γνωρίζουμε όμως ότι η $S''(x)$ είναι συνεχής.

Φυσικές Κυβικές splines

Εδώ οι συνοριακές συνθήκες είναι $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, με $h_i = x_{i+1} - x_i$ τα βήματα κατασκευής είναι:

Βήμα 1: Έστω ότι γνωρίζουμε τις τιμές $s''_i(x_i) := s''_i$, $\forall i = 0, \dots, n$.

Στη πραγματικότητα ΔΕΝ τις γνωρίζουμε (και αυτοί θα είναι οι **άγνωστοι** μας), γνωρίζουμε όμως ότι η $S''(x)$ είναι συνεχής.

Βήμα 2: [**κατασκευή της $s''_i(x)$**] Η $S''(x)$ είναι **γραμμική** και συμβολίζουμε $s''_i(x_{i+1}) := s''_{i+1}$ άρα η $s''_i(x)$ ευθεία μεταξύ s''_i και s''_{i+1} δηλ.,

$$s''_i(x) = \frac{1}{h_i} \left(s''_i(x_{i+1} - x) + s''_{i+1}(x_i - x) \right), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Φυσικές Κυβικές splines

Εδώ οι συνοριακές συνθήκες είναι $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, με $h_i = x_{i+1} - x_i$ τα βήματα κατασκευής είναι:

Βήμα 1: Έστω ότι γνωρίζουμε τις τιμές $s''_i(x_i) := s''_i$, $\forall i = 0, \dots, n$.

Στη πραγματικότητα ΔΕΝ τις γνωρίζουμε (και αυτοί θα είναι οι **άγνωστοι** μας), γνωρίζουμε όμως ότι η $S''(x)$ είναι συνεχής.

Βήμα 2: [κατασκευή της $s''_i(x)$] Η $S''(x)$ είναι γραμμική και συμβολίζουμε $s''_i(x_{i+1}) := s''_{i+1}$ άρα η $s''_i(x)$ ευθεία μεταξύ s''_i και s''_{i+1} δηλ.,

$$s''_i(x) = \frac{1}{h_i} \left(s''_i(x_{i+1} - x) + s''_{i+1}(x - x_i) \right), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Βήμα 3: [υπολογισμός της $s_i(x)$] Υπολογίζουμε την $s_i(x)$ ολοκληρώνοντας 2 φορές την $s''_i(x)$

$$s_i(x) = \frac{1}{6h_i} \left(s''_i(x_{i+1} - x)^3 + s''_{i+1}(x - x_i)^3 \right) + C_i(x - x_i) + D_i(x_{i+1} - x) \quad (1)$$

Βήμα 4: [Υπολογισμός των σταθερών C_i, D_i – επιβολή συνέχειας] Για κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ θελούμε $s_i(x_i) = y_i$ και $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ τις οποίες αντικαθιστούμε στην (1), οπότε λαμβάνουμε,

$$D_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}s_i'' \quad C_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}s_{i+1}''$$

άρα έχουμε την μορφή της συνάρτησης $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$s_i(x) = \frac{1}{6h_i} \left(s_i''(x_{i+1}-x)^3 + s_{i+1}''(x-x_i)^3 \right) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i s_{i+1}''}{6} \right) (x-x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i s_i''}{6} \right) (x_{i+1}-x) \quad (2)$$

Βήμα 4: [Υπολογισμός των σταθερών C_i, D_i – επιβολή συνέχειας] Για κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ θελουμε $s_i(x_i) = y_i$ και $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ τις οποίες αντικαθιστούμε στην (1), οπότε λαμβάνουμε,

$$D_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}s_i'' \quad C_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}s_{i+1}''$$

άρα έχουμε την μορφή της συνάρτησης $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$s_i(x) = \frac{1}{6h_i} \left(s_i''(x_{i+1}-x)^3 + s_{i+1}''(x-x_i)^3 \right) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}s_{i+1}'' \right) (x-x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}s_i'' \right) (x_{i+1}-x) \quad (2)$$

Βήμα 5: [Παραγωγή της $s_i(x)$ και επιβολή συνέχειας] Παραγωγή της (2)

$$s_i'(x) = \frac{-1}{2h_i} \left(s_i''(x_{i+1}-x)^2 + s_{i+1}''(x-x_i)^2 \right) + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}s_{i+1}'' - \frac{y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}s_i'' \quad (3)$$

Θέλουμε $s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i)$ συνεπώς

$$s_i'(x_i) = -\frac{h_i}{6}s_{i+1}'' - \frac{h_i}{3}s_i'' + \overbrace{\frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)}^{b_i} \quad (4)$$

$$s_{i-1}'(x_i) = \frac{h_{i-1}}{6}s_{i-1}'' + \frac{h_{i-1}}{3}s_i'' + \overbrace{\frac{1}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})}^{b_{i-1}} \quad (5)$$

. . .**Βήμα 5** . . . Θέλουμε $s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i)$ συνεπώς $(4) = (5)$

$$h_{i-1}s''_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})s''_i + h_i s''_{i+1} = 6(b_i - b_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

Δηλ. ένα γραμμικό σύστημα $(n-1) \times (n-1)$ εξισώσεων.

. . .Βήμα 5 . . . Θέλουμε $s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i)$ συνεπώς (4) = (5)

$$h_{i-1}s''_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})s''_i + h_is''_{i+1} = 6(b_i - b_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

Δηλ. ένα γραμμικό σύστημα $(n-1) \times (n-1)$ εξισώσεων.

Βήμα 6: [Το (πλήρες) γραμμικό σύστημα για τους αγνώστους s''_i]

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ h_0 & u_1 & h_1 & & & & & & \\ & h_1 & u_2 & h_2 & & & & & \\ & & h_2 & u_3 & h_3 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} & & \\ & & & & & h_{n-2} & u_{n-1} & h_{n-1} & \\ & & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s''_0 \\ s''_1 \\ s''_2 \\ s''_3 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \\ s''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

όπου $u_i = 2(h_i + h_{i-1})$ και $v_i = 6(b_i - b_{i-1})$. Το $(n+1) \times (n+1)$ σύστημα (7) έχει **μοναδική λύση** την οποία χρησιμοποιούμε στη (2) για να υπολογίσουμε την κάθε $s_i(x) \in [x_i, x_{i+1}]$.

Άλλες **συνοριακές συνθήκες** που μπορεί να εφαρμοστούν

$$\begin{cases} s'_0(x_0) = f'(x_0), \\ s'_n(x_n) = f'(x_n) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} s'_0(x_0) = C_0, \\ s'_n(x_n) = C_1 \end{cases} \quad (\text{clamped cubic splines}) \quad (8)$$

ή

$$\begin{cases} s''_0(x_0) = f''(x_0) \text{ (ή } C_0), \\ s''_n(x_n) = f''(x_n) \text{ (ή } C_1) \end{cases} \quad (9)$$

Και για τις δύο αυτές περιπτώσεις το γραμμικό σύστημα που προκύπτει είναι τριδιαγώνιο, με μόνη διαφορά στην πρώτη και την τελευταία εξίσωση που πρέπει να υπολογιστούν κατάλληλα. Για τις συνθήκες (9) γνωρίζουμε αμέσως 2 αγνώστους ενώ για τις συνθήκες (8) χρησιμοποιούμε την εξίσωση (3).

Άλλες **συνοριακές συνθήκες** που μπορεί να εφαρμοστούν

$$\begin{cases} s'_0(x_0) = f'(x_0), \\ s'_n(x_n) = f'(x_n) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} s'_0(x_0) = C_0, \\ s'_n(x_n) = C_1 \end{cases} \quad (\text{clamped cubic splines}) \quad (8)$$

ή

$$\begin{cases} s''_0(x_0) = f''(x_0) \text{ (ή } C_0), \\ s''_n(x_n) = f''(x_n) \text{ (ή } C_1) \end{cases} \quad (9)$$

Και για τις δύο αυτές περιπτώσεις το γραμμικό σύστημα που προκύπτει είναι τριδιαγώνιο, με μόνη διαφορά στην πρώτη και την τελευταία εξίσωση που πρέπει να υπολογιστούν κατάλληλα. Για τις συνθήκες (9) γνωρίζουμε αμέσως 2 αγνώστους ενώ για τις συνθήκες (8) χρησιμοποιούμε την εξίσωση (3).

Οι συνοριακές συνθήκες, μηδενισμού των δευτέρων παραγώγων στα άκρα, στη φυσική spline αναγκάζουν τη συνάρτηση να γίνει γραμμική εκτός του διαστήματος παρεμβολής, χωρίς να επηρεάζουν την ομαλότητά της