Αριθμητική Ανάλυση

Αργύρης Δελής

Διάλεξη 9η

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

Εκτίμηση Σφάλματος Πολυωνυμικής Παρεμβολής

Θεώρημα Έστω $f \in C^{n+1}[a,b]$ και $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Έαν $p \in \mathbf{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής στα $\{x_i\}_{i=0}^n$ τότε ισχύουν $\forall x \in [a,b]$

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \text{για } \xi \in (a,b),$$

και

Εκτίμηση Σφάλματος Πολυωνυμικής Παρεμβολής

Θεώρημα Έστω $f \in C^{n+1}[a,b]$ και $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Έαν $p \in \mathbf{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής στα $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ τότε ισχύουν $\forall x \in [a,b]$

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \text{για } \xi \in (a,b),$$

και

$$\boxed{||f(x) - p(x)||_\infty \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}.}$$

$$||\mathbf{g}||_\infty = \max_{\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}} |\mathbf{g}(\mathbf{x})|$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) \in C^2[a, b]$ και θέλουμε το μέγιστο σφάλμα του γραμμικού πολυωνύμου παρεμβολής δηλ. το πολυώνυμο $p_x(x)$ που παρεμβάλλεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$.

Παράδειγμα: Έστω $f(x) \in C^2[a,b]$ και θέλουμε το μέγιστο σφάλμα του γραμμικού πολυωνύμου παρεμβολής δηλ. το πολυώνυμο $p_x(x)$ που παρεμβάλλεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$.

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) \in C^2[a, b]$ και θέλουμε το μέγιστο σφάλμα του γραμμικού πολυωνύμου παρεμβολής δηλ. το πολυώνυμο $p_x(x)$ που παρεμβάλλεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$.

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Βάσει του θεωρήματος το σφάλμα είναι

$$||f(x) - p_1(x)||_\infty \quad \leq \quad \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |(x - a)(x - b)| \cdot ||f^{(2)}||_\infty$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) \in C^2[a,b]$ και θέλουμε το μέγιστο σφάλμα του γραμμικού πολυωνύμου παρεμβολής δηλ. το πολυώνυμο $p_x(x)$ που παρεμβάλλεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$.

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Βάσει του θεωρήματος το σφάλμα είναι

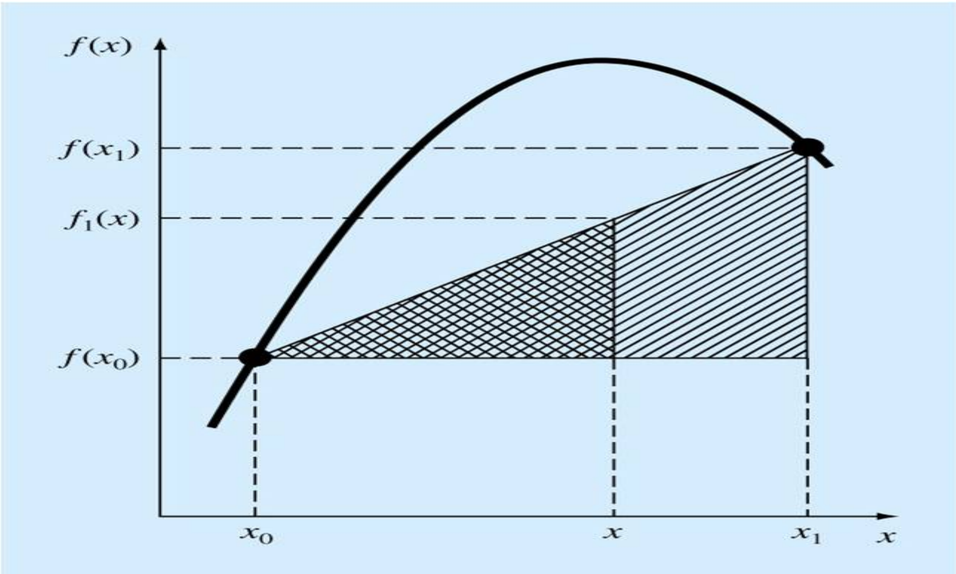
$$\begin{aligned} ||f(x) - p_1(x)||_\infty &\leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |(x-a)(x-b)| \cdot ||f^{(2)}||_\infty \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) \in C^2[a,b]$ και θέλουμε το μέγιστο σφάλμα του γραμμικού πολυωνύμου παρεμβολής δηλ. το πολυώνυμο $p_x(x)$ που παρεμβάλλεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$.

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Βάσει του θεωρήματος το σφάλμα είναι

$$\begin{aligned} ||f(x) - p_1(x)||_\infty &\leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |(x-a)(x-b)| \cdot ||f^{(2)}||_\infty \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \end{aligned}$$



Παράδειγμα:

Έστω το p_2 πολυώνυμο που παρεμβάλει την $f(x) = \sin(x)$ στα $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/2$

$$||\sin(x) - p_2(x)||_\infty \quad \leq \quad \frac{1}{3!} \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2}) \right| \cdot ||\sin^{(3)}(x)||_\infty$$

Παράδειγμα :

Έστω το p_2 πολυώνυμο που παρεμβάλει την $f(x) = \sin(x)$ στα $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/2$

$$\begin{aligned} ||\sin(x) - p_2(x)||_\infty &\leq \frac{1}{3!} \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2}) \right| \cdot ||\sin^{(3)}(x)||_\infty \\ &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{\sqrt{3}\pi^3}{288} \cdot 1 \approx 0.031 \end{aligned}$$

(Άσκηση)

Άσκηση Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = -2\pi/3, x_1 = -\pi/3, x_2 = \pi/3, x_3 = 2\pi/3$ της $f(x) = \sin(x)$ στο $[-\pi, \pi]$, και υπολογίστε μια εκτίμηση του σφάλματος. Παρουσιάστε τα αποτελέσματα και γραφικά.

Άσκηση Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = -2\pi/3, x_1 = -\pi/3, x_2 = \pi/3, x_3 = 2\pi/3$ της $f(x) = \sin(x)$ στο $[-\pi, \pi]$, και υπολογίστε μια εκτίμηση του σφάλματος. Παρουσιάστε τα αποτελέσματα και γραφικά.

Λύση Ισχύει ότι $\sin(x_0) = \sin(x_1) = -\sqrt{3}/2$ και $\sin(x_2) = \sin(x_3) = \sqrt{3}/2$.

Άσκηση Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = -2\pi/3, x_1 = -\pi/3, x_2 = \pi/3, x_3 = 2\pi/3$ της $f(x) = \sin(x)$ στο $[-\pi, \pi]$, και υπολογίστε μια εκτίμηση του σφάλματος. Παρουσιάστε τα αποτελέσματα και γραφικά.

Λύση Ισχύει ότι $\sin(x_0) = \sin(x_1) = -\sqrt{3}/2$ και $\sin(x_2) = \sin(x_3) = \sqrt{3}/2$.

Τα **πολυώνυμα Lagrange**, 3ου βαθμού, είναι

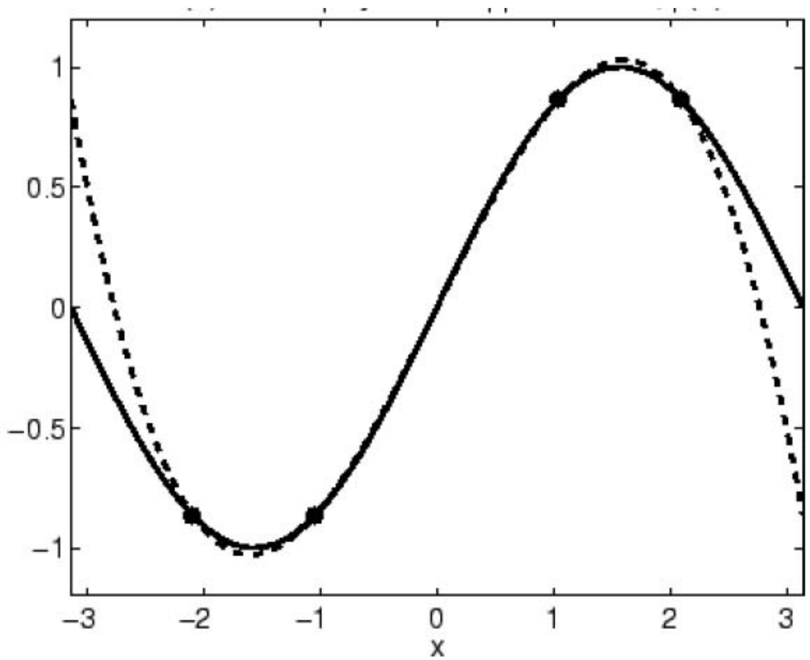
$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3})}{(x_0+\frac{\pi}{3})(x_0-\frac{\pi}{3})(x_0-\frac{2\pi}{3})} = \frac{-9(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3})}{4\pi^3} \\
L_1(x) &= \frac{(x+\frac{2\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3})}{(x_1+\frac{2\pi}{3})(x_1-\frac{\pi}{3})(x_1-\frac{2\pi}{3})} = \frac{9(x+\frac{2\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3})}{2\pi^3} \\
L_2(x) &= \frac{(x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3})}{(x_2+\frac{2\pi}{3})(x_2+\frac{\pi}{3})(x_2-\frac{2\pi}{3})} = \frac{-9(x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3})}{2\pi^3} \\
L_3(x) &= \frac{(x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})}{(x_3+\frac{2\pi}{3})(x_3+\frac{\pi}{3})(x_3-\frac{\pi}{3})} = \frac{9(x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})}{4\pi^3}
\end{aligned}$$

Το **πολυώνυμο παρεμβολής** στη μορφή Lagrange τότε

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{-\sqrt{3}}{2}L_0(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}L_1(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}L_3(x) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{8\pi^3}\Bigg((x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3}) - 2(x+\frac{2\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3}) \\ &\quad -2(x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3}) + (x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})\Bigg) \end{aligned}$$

Το **πολυώνυμο παρεμβολής** στη μορφή Lagrange τότε

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{-\sqrt{3}}{2}L_0(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}L_1(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}L_3(x) \\
&= \frac{9\sqrt{3}}{8\pi^3}\Bigg((x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3}) - 2(x+\frac{2\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3}) \\
&\quad -2(x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{2\pi}{3}) + (x+\frac{2\pi}{3})(x+\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})\Bigg)
\end{aligned}
$$



$p(x)- - -$

Εκτίμηση Σφάλματος

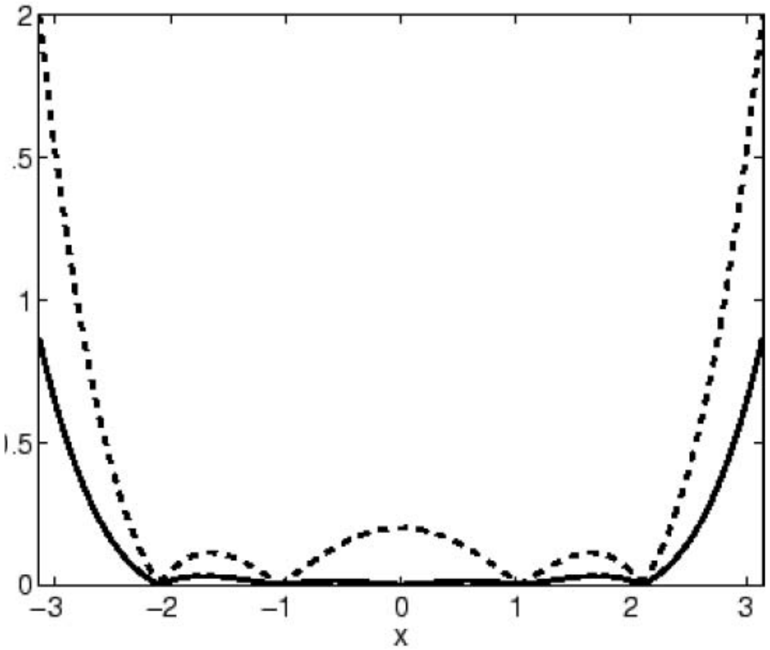
$$f(x) - p(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) = \frac{1}{24} \sin(\xi(x)) \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \Rightarrow$$

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq \frac{1}{24} || \sin(x)||_\infty || \prod_{i=0}^{3} (x - x_i)||_\infty \leq \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot \max_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right|$$

Εκτίμηση Σφάλματος

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) = \frac{1}{24} \sin(\xi(x)) \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \Rightarrow$$

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq \frac{1}{24} ||\sin(x)||_\infty || \prod_{i=0}^{3} (x - x_i)||_\infty \leq \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot \max_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right|$$

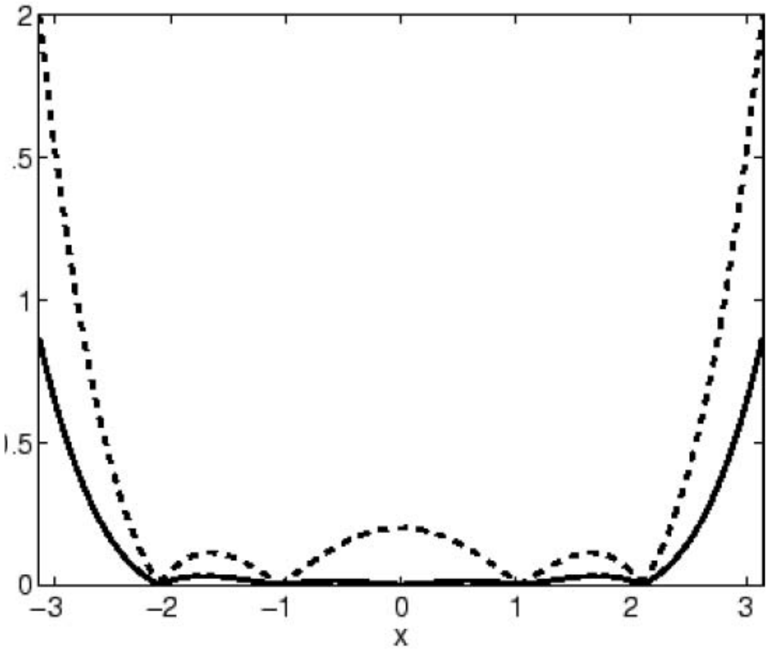


Πραγματικό σφάλμα $|sin(x) - p(x)|$ και εκτίμηση $(- - -)$

Εκτίμηση Σφάλματος

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \prod_{i=0}^{3}(x - x_i) = \frac{1}{24} \sin(\xi(x)) \prod_{i=0}^{3}(x - x_i) \Rightarrow$$

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq \frac{1}{24} || \sin(x)||_\infty || \prod_{i=0}^{3}(x - x_i)||_\infty \leq \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot \max_{x \in [-\pi,\pi]} \left| \prod_{i=0}^{3}(x - x_i) \right|$$



Πραγματικό σφάλμα $|sin(x) - p(x)|$ και εκτίμηση $(- - -)$

Παρατηρείστε ότι στα σημεία παρεμβολής τό σφάλμα είναι 0.

Άσκηση Δίνεται η $f(x) = e^x, x \in [-1, 1]$. Να υπολογιστεί η απόσταση h των σημείων έτσι ώστε να προσεγγίζεται η $f(x)$ από το $p_2(x)$ με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων.

Άσκηση Δίνεται η $f(x) = e^x, x \in [-1, 1]$. Να υπολογιστεί η απόσταση h των σημείων έτσι ώστε να προσεγγίζεται η $f(x)$ από το $p_2(x)$ με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων.

Λύση Από το θεώρημα σφάλματος στα σημεία x_0, x_1, x_2

$$e^x - p_2(x) = \frac{1}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)e^{\xi}$$

Για την παραμβολή θέτουμε $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ και $x_0 \leq x \leq x_2$

$$||e^x - p_2(x)||_\infty \leq \frac{1}{3!} \max_{x \in [-1,1]|} \Big|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Big| e^1$$

Άσκηση Δίνεται η $f(x) = e^x, x \in [-1, 1]$. Να υπολογιστεί η απόσταση h των σημείων έτσι ώστε να προσεγγίζεται η $f(x)$ από το $p_2(x)$ με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων.

Λύση Από το θεώρημα σφάλματος στα σημεία x_0, x_1, x_2

$$e^x - p_2(x) = \frac{1}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)e^{\xi}$$

Για την παραμβολή θέτουμε $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ και $x_0 \le x \le x_2$

$$||e^x - p_2(x)||_\infty \le \frac{1}{3!} \max_{x\in[-1,1]|} \Big|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Big| e^1$$

Υποθέτοντας $x_1 = 0, x_0 = -h, x_2 = h$ τότε

$$w(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} = \frac{x^3 - xh^2}{6}$$

Άσκηση Δίνεται η $f(x) = e^x, x \in [-1, 1]$. Να υπολογιστεί η απόσταση h των σημείων έτσι ώστε να προσεγγίζεται η $f(x)$ από το $p_2(x)$ με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων.

Λύση Από το θεώρημα σφάλματος στα σημεία x_0, x_1, x_2

$$e^x - p_2(x) = \frac{1}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)e^{\xi}$$

Για την παραμβολή θέτουμε $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ και $x_0 \leq x \leq x_2$

$$||e^x - p_2(x)||_\infty \leq \frac{1}{3!} \max_{x \in [-1,1]|} \Big|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Big| e^1$$

Υποθέτοντας $x_1 = 0, x_0 = -h, x_2 = h$ τότε

$$w(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} = \frac{x^3 - xh^2}{6}$$

Για την εύρεση του $\max$ της $w(x)$

$$w'(x) = \frac{3x^2 - h^2}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm h/\sqrt{3}$$

Συνεπώς

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}\right| = \left|w(\pm h/\sqrt{3})\right| = \frac{h^3}{9\sqrt{3}}$$

και

$$||e^x - p_2(x)||_\infty \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}}e \approx 0.174h^3$$

Συνεπώς

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}\right| = \left|w(\pm h/\sqrt{3})\right| = \frac{h^3}{9\sqrt{3}}$$

και

$$||e^x - p_2(x)||_\infty \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}}e \approx 0.174h^3$$

Αν θέλουμε ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων.

$$\frac{h^3}{9\sqrt{3}}e \leq \frac{1}{2}10^{-k} \quad \Rightarrow \quad h \leq \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{2e10^k}} \approx \sqrt[3]{\frac{2.87}{10^k}}.$$

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ γράφουμε το πολυώνυμο $p_n(x)$ για το οποίο $p_n(x_i) = y_i$ ως

$$\begin{aligned} p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Τότε υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ διαδοχικά

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ γράφουμε το πολυώνυμο $p_n(x)$ για το οποίο $p_n(x_i) = y_i$ ως

$$\begin{aligned} p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Τότε υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ διαδοχικά

$$p(x_0) = y_0 \quad \rightarrow \quad a_0 = y_0$$

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ γράφουμε το πολυώνυμο $p_n(x)$ για το οποίο $p_n(x_i) = y_i$ ως

$$\begin{aligned} p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Τότε υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ διαδοχικά

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 \quad \rightarrow \quad a_0 = y_0 \\ p(x_1) &= y_1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ γράφουμε το πολυώνυμο $p_n(x)$ για το οποίο $p_n(x_i) = y_i$ ως

$$\begin{aligned} p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Τότε υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ διαδοχικά

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 & \rightarrow \quad & a_0 = y_0 \\ p(x_1) &= y_1 & \rightarrow \quad & a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} \\ p(x_2) &= y_2 & \rightarrow \quad & a_2 = \left(\frac{y_2 - a_0}{x_2 - x_0} - a_1\right)\Big/(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ γράφουμε το πολυώνυμο $p_n(x)$ για το οποίο $p_n(x_i) = y_i$ ως

$$\begin{aligned} p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Τότε υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ διαδοχικά

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 \quad \rightarrow \quad a_0 = y_0 \\ p(x_1) &= y_1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} \\ p(x_2) &= y_2 \quad \rightarrow \quad a_2 = \left(\frac{y_2 - a_0}{x_2 - x_0} - a_1\right) \Big/ (x_2 - x_1) \\ p(x_3) &= y_3 \quad \rightarrow \quad a_3 = \cdots\cdots \end{aligned}$$

Παράδειγμα Να κατασκευαστεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη **μορφή Νεύτωνα** που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = 1/x$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$.

Παράδειγμα Να κατασκευαστεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη **μορφή Νεύτωνα** που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = 1/x$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4.$

Το πολυώνυμο θα είναι 2ου βαθμού της μορφής

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές a_0, a_1, a_2 διαδοχικά

Παράδειγμα Να κατασκευαστεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη **μορφή Νεύτωνα** που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = 1/x$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4.$

Το πολυώνυμο θα είναι 2ου βαθμού της μορφής

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές a_0, a_1, a_2 διαδοχικά

$$p(2) \;=\; 1/2 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα Να κατασκευαστεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη **μορφή Νεύτωνα** που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = 1/x$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4.$

Το πολυώνυμο θα είναι 2ου βαθμού της μορφής

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές a_0, a_1, a_2 διαδοχικά

$$\begin{aligned} p(2) &= 1/2 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2} \\ p(2.5) &= 2/5 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{2.5 - 1/2}{0.5} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Παράδειγμα Να κατασκευαστεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη **μορφή Νεύτωνα** που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = 1/x$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$.

Το πολυώνυμο θα είναι 2ου βαθμού της μορφής

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές a_0, a_1, a_2 διαδοχικά

$$\begin{aligned}
p(2) &= 1/2 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2} \\
p(2.5) &= 2/5 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{2.5 - 1/2}{0.5} = -\frac{1}{5} \\
p(4) &= 1/4 \quad \rightarrow \quad a_2 = \left(\frac{2/5 - 1/2}{2} + 1/5\right)\Big/(1.5) = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα Να κατασκευαστεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη **μορφή Νεύτωνα** που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) = 1/x$ στα σημεία $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4.$

Το πολυώνυμο θα είναι 2ου βαθμού της μορφής

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές a_0, a_1, a_2 διαδοχικά

$$\begin{aligned}
p(2) &= 1/2 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2} \\
p(2.5) &= 2/5 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{2.5 - 1/2}{0.5} = -\frac{1}{5} \\
p(4) &= 1/4 \quad \rightarrow \quad a_2 = \left(\frac{2/5 - 1/2}{2} + 1/5\right)\Big/(1.5) = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Συνεπώς
$p_2(x) = 0.5 - 0.2(x - 2) + 0.05(x - 2)(x - 2.5) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$

Άσκηση Δίνεται ο πίνακας τιμών (της $f(x) = 1 + x^3$)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i) = y_i$	1	2	9	28

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα για τα 4 σημεία καθώς και για τα 3 πρώτα και 3 τελευταία σημεία και να προσεγγιστεί η τιμή $f(1.5)$ για καθένα από αυτά.

Άσκηση Δίνεται ο πίνακας τιμών (της $f(x) = 1 + x^3$)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i) = y_i$	1	2	9	28

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα για τα 4 σημεία καθώς και για τα 3 πρώτα και 3 τελευταία σημεία και να προσεγγιστεί η τιμή $f(1.5)$ για καθένα από αυτά.

Λύση Το πολυώνυμο για όλα τα σημεία είναι

$$p_3(x) = 1 + 1 \cdot x + 6\frac{x(x-1)}{2} + 6\frac{x(x-1)(x-2)}{6} = 1 + x^3$$

Συνεπώς $f(1.5) = p_3(1.5) = 4.375.$

Άσκηση Δίνεται ο πίνακας τιμών (της $f(x) = 1 + x^3$)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i) = y_i$	1	2	9	28

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα για τα 4 σημεία καθώς και για τα 3 πρώτα και 3 τελευταία σημεία και να προσεγγιστεί η τιμή $f(1.5)$ για καθένα από αυτά.

Λύση Το πολυώνυμο για όλα τα σημεία είναι

$$p_3(x) = 1 + 1 \cdot x + 6\frac{x(x-1)}{2} + 6\frac{x(x-1)(x-2)}{6} = 1 + x^3$$

Συνεπώς $f(1.5) = p_3(1.5) = 4.375.$

Αν χρησιμοποιηθούν τα τρία πρώτα σημεία

$$p_2(x) = 1 + 1 \cdot x + 6\frac{x(x-1)}{2}$$

Τότε $p_2(1.5) = 4.75.$

Σύγκριση πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange και Νεύτωνα

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό συνεπώς και οι δύο μορφές δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα

Σύγκριση πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange και Νεύτωνα

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό συνεπώς και οι δύο μορφές δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα

- Η απλότητα της μορφής Lagrange είναι το βασικό πλεονέκτημα **όμως** εάν προστεθεί ένα επιπλέον σημείο παρεμβολής x_{n+1} απαιτείται υπολογισμός εξ αρχής όλων των νέων πολυωνύμων Lagrange L_i, πράγμα ασύμφορο.

Σύγκριση πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange και Νεύτωνα

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό συνεπώς και οι δύο μορφές δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα

- Η απλότητα της μορφής Lagrange είναι το βασικό πλεονέκτημα **όμως** εάν προστεθεί ένα επιπλέον σημείο παρεμβολής x_{n+1} απαιτείται υπολογισμός εξ αρχής όλων των νέων πολυωνύμων Lagrange L_i, πράγμα ασύμφορο.
- Στη μορφή Νεύτωνα αν προστεθεί επιπλέον σημείο παρεμβολής τότε χρειάζεται μόνο ο υπολογισμός του συντελεστή a_{n+1}, οι υπόλοιποι μένουν ως έχουν. Μπορούμε να κάνουμε οικονομία στις πράξεις αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα πολυώνυμα παρεμβολής που προκύπτουν αν αφαιρέσουμε ή προσθέσουμε σημεία παρεμβολής ή αν μεταβάλλουμε κάποια από τα y_i.

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό συνεπώς και οι δύο μορφές δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα

- Η απλότητα της μορφής Lagrange είναι το βασικό πλεονέκτημα **όμως** εάν προστεθεί ένα επιπλέον σημείο παρεμβολής x_{n+1} απαιτείται υπολογισμός εξ αρχής όλων των νέων πολυωνύμων Lagrange L_i, πράγμα ασύμφορο.
- Στη μορφή Νεύτωνα αν προστεθεί επιπλέον σημείο παρεμβολής τότε χρειάζεται μόνο ο υπολογισμός του συντελεστή a_{n+1}, οι υπόλοιποι μένουν ως έχουν. Μπορούμε να κάνουμε οικονομία στις πράξεις αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα πολυώνυμα παρεμβολής που προκύπτουν αν αφαιρέσουμε ή προσθέσουμε σημεία παρεμβολής ή αν μεταβάλλουμε κάποια από τα y_i.
- Ο υπολογισμός της τιμής του πολυωνύμου σε ένα σημείο x (διαφορετικό από τα σημεία παρεμβολής) με τη μορφή Lagrange απαιτεί περισσότερες πράξεις από ότι στη μορφή Νεύτωνα όπου αφού υπολογιστούν οι συντελεστές a_i η τιμή υπολογίζεται σε $O(n)$ πράξεις με το σχήμα Horner (βλ. Κεφ. 1).

Κατασκευή του πολυωνύμου παρεμβολής με Διαιρεμένες Διαφορές

Έστω $f \in C[a,b]$ και $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ με $x_i \neq \mathbf{x}_j, i \neq j$. Ορίζουμε **επαγωγικά ως προς** i

$$\begin{aligned}
\Delta^0(x_0)(f) &= f(x_0) \\
\Delta^1(x_0,x_1)(f) &= \frac{\Delta^0(x_1)(f) - \Delta^0(x_0)(f)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
\vdots \qquad & \vdots \qquad \vdots \\
\Delta^i(x_0,x_1,\ldots x_i)(f) &= \frac{\Delta^{i-1}(x_1,x_2,\ldots x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0,x_1,\ldots x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}
\end{aligned}$$

ο αριθμός $\Delta^i(x_0,x_1,\ldots x_i)(f)$ λέγεται **διαιρεμένη διαφορά τάξεως i της f** προς τα $x_0, \ldots, x_i$.

Κατασκευή του πολυωνύμου παρεμβολής με Διαιρεμένες Διαφορές

Έστω $f \in C[a,b]$ και $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ με $x_i \neq \mathbf{x}_j, i \neq j$. Ορίζουμε **επαγωγικά ως προς** i

$$\begin{aligned}
\Delta^0(x_0)(f) &= f(x_0) \\
\Delta^1(x_0,x_1)(f) &= \frac{\Delta^0(x_1)(f) - \Delta^0(x_0)(f)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
&\vdots \\
\Delta^i(x_0,x_1,\ldots x_i)(f) &= \frac{\Delta^{i-1}(x_1,x_2,\ldots x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0,x_1,\ldots x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}
\end{aligned}$$

ο αριθμός $\Delta^i(x_0,x_1,\ldots x_i)(f)$ λέγεται **διαιρεμένη διαφορά τάξεως i της f** προς τα $x_0, \ldots, x_i$.

Έστω το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Νεύτωνα

$$\begin{aligned}
p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\
&+ a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

Υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ως

$$\boxed{a_i = \Delta^{i}(x_0, x_1, \ldots x_i)(f), \quad i = 0, \ldots, n}$$

Υπολογίζω τους (άγνωστους) συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ως

$$\boxed{a_i = \Delta^i(x_0, x_1, \ldots x_i)(f), \quad i = 0, \ldots, n}$$

Πίνακας Διαιρεμένων Διαφορών

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) \searrow & & & & \\
 & & \Delta^1(x_0,x_1)(f) \searrow & & & \\
x_1 & f(x_1) \nearrow & & \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f) & & \\
 & & \Delta^1(x_1,x_2)(f) \nearrow & & \Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(f) & \\
x_2 & f(x_2) & & \Delta^2(x_1,x_2,x_3)(f) & \vdots & \\
 & & \Delta^1(x_2,x_3)(f) & \vdots & & \\
x_3 & f(x_3) & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Τότε $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = \Delta^1(x_0, x_1)(f)$, $a_2 = \Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f)$

Παράδειγμα Έστω $f(x) = x^2 - 4x + 1$ και $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5$ να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση διαιρεμένων διαφορών.

Παράδειγμα Έστω $f(x) = x^2 - 4x + 1$ και $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5$ να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση διαιρεμένων διαφορών.

Ξεκινάμε γράφωντας τις **δύο πρώτες στήλες** μέ τα x_i και $f(x_i)$

$$\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{array}$$

Υπολογίζουμε την επόμενη στήλη, αρχίζοντας από το $\Delta^1(x_0, x_1)$.

$$\Delta_1(x_0, x_1) = \frac{(-2) - (-3)}{x_1 - x_0} = \frac{(-2) - (-3)}{3 - 2}\frac{1}{1} = 1,$$

και έχουμε

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & \searrow & \\ & & & 1 \\ 3 & -2 & \nearrow & \\ & & & \\ 5 & 6 & & \end{array} .$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\Delta^1(x_1, x_2)$,

$$\Delta^1(x_1, x_2) = \frac{6-(-2)}{5-3} = \frac{8}{2} = 4,$$

και έχουμε

$$\begin{array}{cccc}
2 & -3 & & \\
 & & & 1 \\
3 & -2 & \searrow & \\
 & & & 4 \\
5 & 6 & \nearrow &
\end{array}.$$

και τελικά στη τρίτη στήλη το $\Delta^2(x_0, x_1, x_2)$ ως

$$\Delta^2(x_0, x_1, x_2) = \frac{4-1}{5-2} = \frac{3}{3} = 1,$$

και έχουμε τον πίνακα διαφορών

$$\begin{array}{ccccc}
2 & -3 & & & \\
 & & 1 & \searrow & \\
3 & -2 & & & 1 \\
 & & 4 & \nearrow & \\
5 & 6 & & &
\end{array}.$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής δίνεται

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -3 + 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-2)(x-3) \\ &= 1 - 4x + x^2. \end{aligned}$$

Η παρεμβολή είναι ακριβής (μηδενικό σφάλμα) μία που παρεμβάλλουμε μια συνάρτηση f που είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

Το πολυώνυμο παρεμβολής δίνεται

$$p_2(x) = -3 + 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-2)(x-3)$$
$$= 1 - 4x + x^2.$$

Η παρεμβολή είναι ακριβής (μηδενικό σφάλμα) μία που παρεμβάλλουμε μια συνάρτηση f που είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

Παράδειγμα Για τα παρακάτω δεδομένα να κατασκευασθεί ο πίνακας διαιρεμένων διαφορών και να προσδιοριστεί το πολυώνυμο παρεμβολής,

x_i	1	3/2	0	2
$f(x_i) = y_i$	3	13/4	3	5/3

Το πολυώνυμο παρεμβολής δίνεται

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -3 + 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-2)(x-3) \\ &= 1 - 4x + x^2. \end{aligned}$$

Η παρεμβολή είναι ακριβής (μηδενικό σφάλμα) μία που παρεμβάλλουμε μια συνάρτηση f που είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

Παράδειγμα Για τα παρακάτω δεδομένα να κατασκευασθεί ο πίνακας διαιρεμένων διαφορών και να προσδιοριστεί το πολυώνυμο παρεμβολής,

x_i	1	3/2	0	2
$f(x_i) = y_i$	3	13/4	3	5/3

Το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι το πολύ τρίτου βαθμού ($p \in \mathbf{P_3}$)

Ο πίνακας διαφορών δίνεται ως εξής:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 3 \searrow & & & \\
 & & 1/2 \searrow & & \\
3/2 & 13/4 \nearrow & & 1/3 \searrow & \\
 & & 1/6 \nearrow & & -2 \\
0 & 3 & & -5/3 \nearrow & \\
 & & -2/3 & & \\
2 & 5/3 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 3 \searrow & & & \\
 & & 1/2 \searrow & & \\
3/2 & 13/4 \nearrow & & 1/3 \searrow & \\
 & & 1/6 \nearrow & & -2 \\
0 & 3 & & -5/3 \nearrow & \\
 & & -2/3 & & \\
2 & 5/3 & & &
\end{array}
$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου παρεμβολής δίνονται από

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \Delta^0(x_0)(f) = 3 \\
a_1 &= \Delta^1(x_0, x_1)(f) = 1/2 \\
a_2 &= \Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f) = 1/3 \\
a_3 &= \Delta^3(x_0, x_1, x_2, x3)(f) = -2
\end{aligned}
$$

Άρα

$$p_3(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-3/2) - 2(x-1)(x-3/2)x$$

Συμπεριφορά πολυωνυμικής παρεμβολής για μεγάλο n

Γνωρίζουμε από την εκτίμηση σφάλματος της πολ. παρεμβολής ότι

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}$$

θέτωντας $\Phi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ έχουμε

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq ||\Phi_{n+1}||_\infty \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}$$

Για $[a, b] = [-1, 1]$ και **ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία** $x_i = -1 + ih$ με $h = \frac{2}{n}$ ισχύει

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq \frac{n!}{4} h^{n+1} \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1!)} \leq h^{n+1} \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)}$$

Συμπεριφορά πολυωνυμικής παρεμβολής για μεγάλο n

Γνωρίζουμε από την εκτίμηση σφάλματος της πολ. παρεμβολής ότι

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}$$

θέτωντας $\Phi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ έχουμε

$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq ||\Phi_{n+1}||_\infty \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}$$

Για $[a, b] = [-1, 1]$ και **ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία** $x_i = -1 + ih$ με $h = \frac{2}{n}$ ισχύει

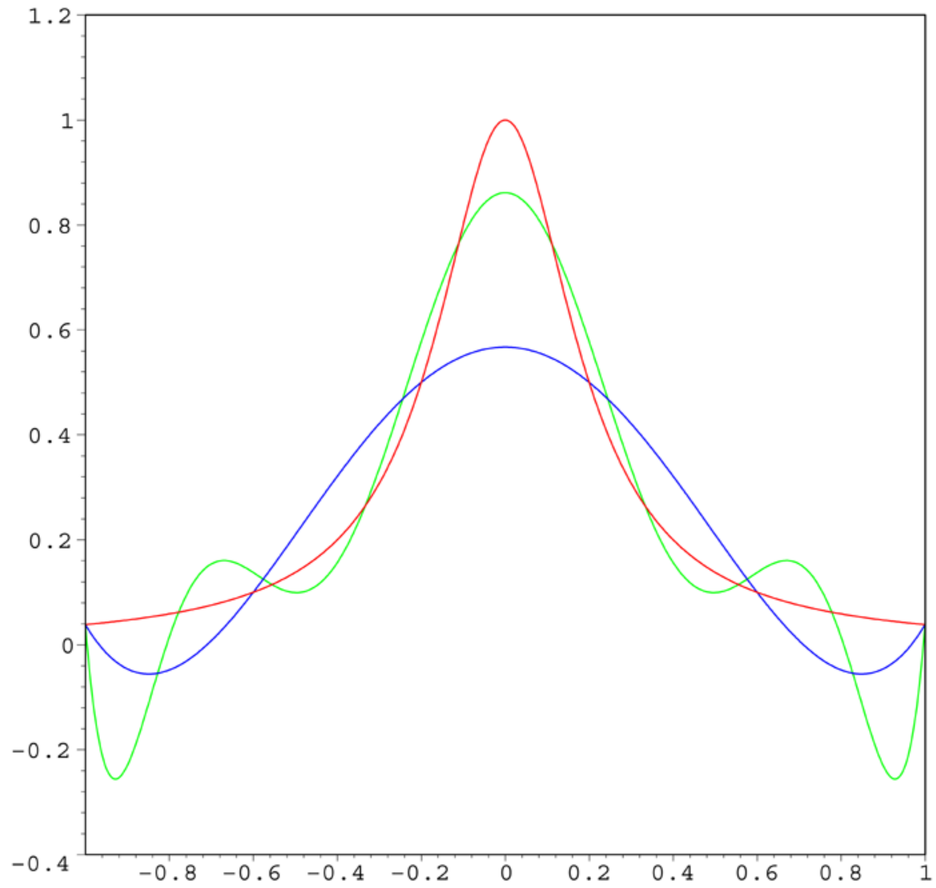
$$||f(x) - p(x)||_\infty \leq \frac{n!}{4} h^{n+1} \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1!)} \leq h^{n+1} \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)}$$

Αναμένουμε λοιπόν

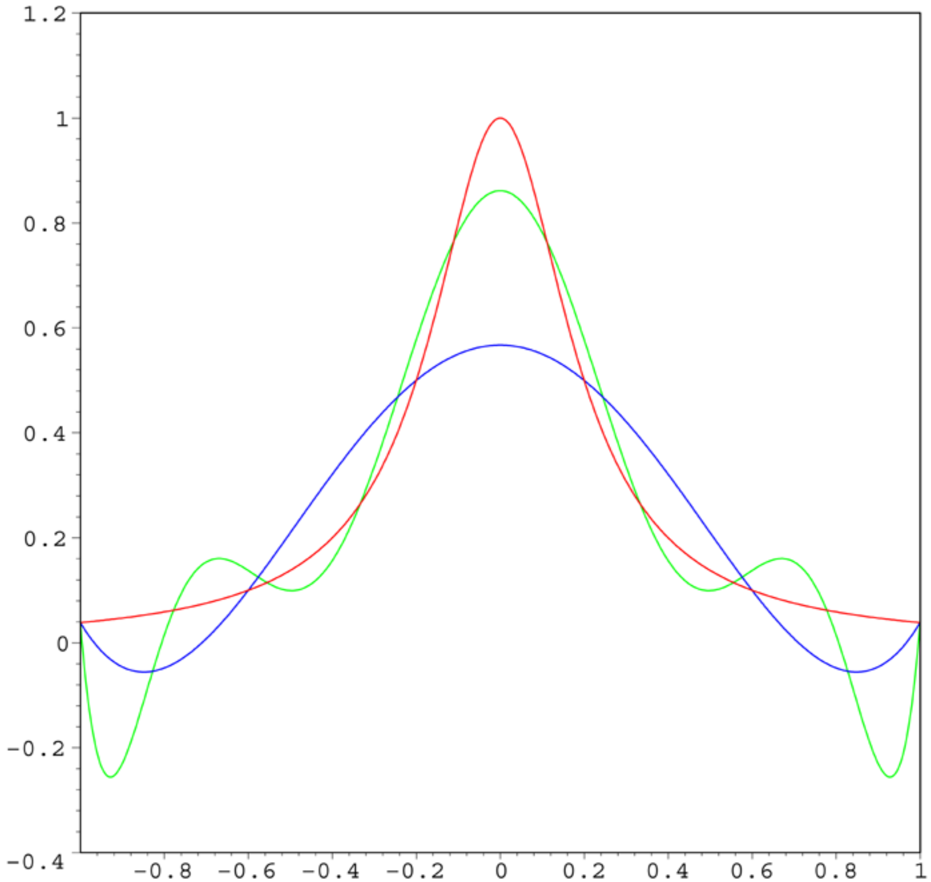
$$\forall f \in C[-1, 1] \quad \lim_{n \to \infty} ||f - p_n|| = 0$$

. . . Όμως . . . έστω η $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$ και έστω τα πολυώνυμα παρεμβολής p_5 και p_9 σε (6 και 10 αντίστοιχα) ομοιόμορφα κατανεμημένους κόμβους στο $[-1, 1]$.

. . .Όμως . . . έστω η $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$ και έστω τα πολυώνυμα παρεμβολής p_5 και p_9 σε (6 και 10 αντίστοιχα) ομοίομορφα κατανεμημένους κόμβους στο $[-1, 1]$.



. . .Όμως . . . έστω η $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$ και έστω τα πολυώνυμα παρεμβολής p_5 και p_9 σε (6 και 10 αντίστοιχα) ομοίομορφα κατανεμημένους κόμβους στο $[-1, 1]$.

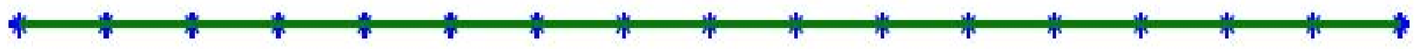


Για αυτή τη συνάρτηση (**παράδειγμα του Runge**) ισχύει

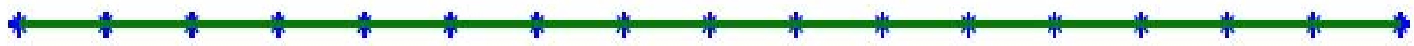
$$\lim_{n\to\infty} ||f - p_n|| = \infty$$

Το πρόβλημα φαίνεται να οφείλεται στον ομοιόμορφο διαμερισμό

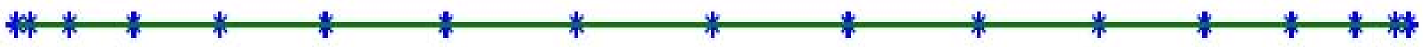
$x_i = -1 + \frac{2i}{n} = -1 + ih, i = 0, \ldots, n$



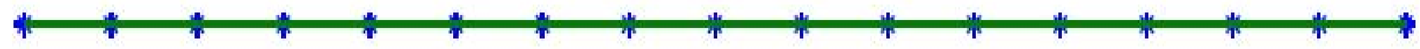
Το πρόβλημα φαίνεται να οφείλεται στον ομοιόμορφο διαμερισμό
$x_i = -1 + \frac{2i}{n} = -1 + ih, i = 0, \ldots, n$



Πυκνώνοντας τα σημεία παρεμβολής κοντά στα άκρα με τη χρήση των σημείων Chebyshev $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right), i = 0, \ldots, n$



Το πρόβλημα φαίνεται να οφείλεται στον ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = -1 + \frac{2i}{n} = -1 + ih, i = 0, \ldots, n$



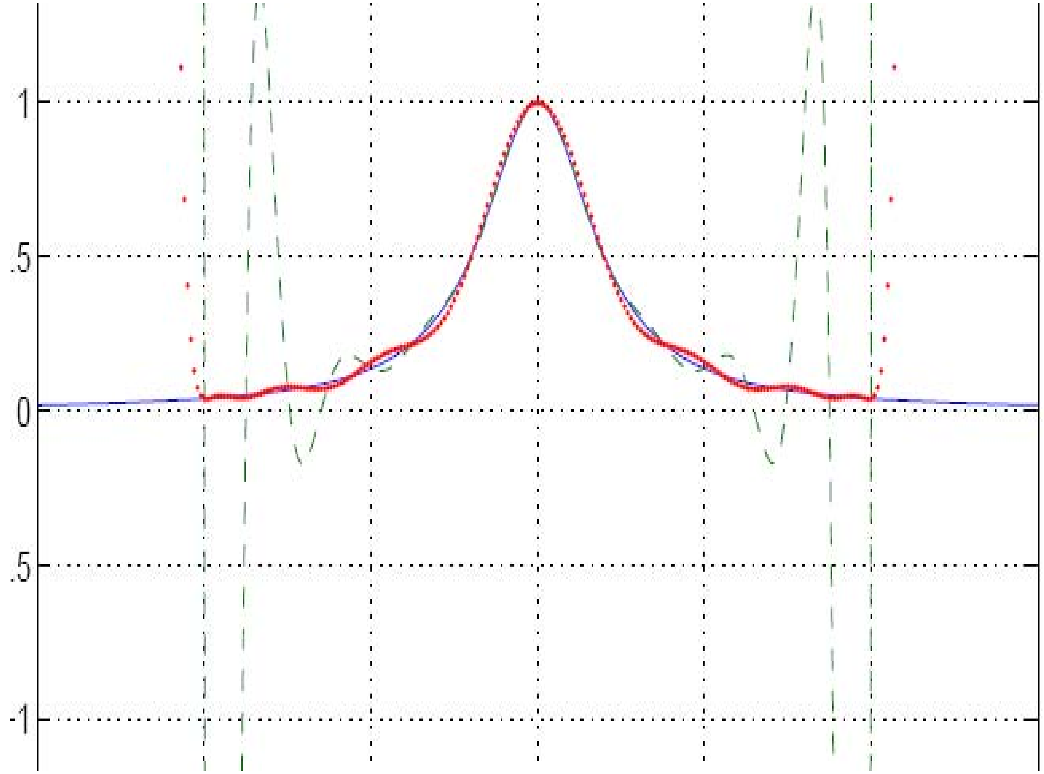
Πυκνώνοντας τα σημεία παρεμβολής κοντά στα άκρα με τη χρήση των σημείων Chebyshev $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right), i = 0, \ldots, n$

Τα σημεία αυτά είναι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev T_{n+1}

$$T_{n+1} = \cos((n+1)\arccos x), \quad x \in [-1, 1]$$

και καθώς το n αυξάνει συσσωρεύονται προς τα άκρα του διαστήματος.

Το παράδειγμα του Runge στα σημεία Chebyshev



$f = \frac{1}{1+25x^2}$

Πολυώνυμο παρεμβολής για $n = 17$ ομοιόμορφους κόμβους

Πολυώνυμο παρεμβολής για $n = 17$ σημεία Chebyshev

Μπορεί να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση Runge στα Chebyshev

$$\lim_{n\to\infty} ||f - p_n|| = 0$$

Όμως υπάρχει το εξής αρνητικό Θεώρημα:

Μπορεί να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση Runge στα Chebyshev

$$\lim_{n\to\infty} ||f - p_n|| = 0$$

Όμως υπάρχει το εξής αρνητικό Θεώρημα:

Θεώρημα Faber (1914) Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_{ni} \in [-1, 1]$ υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1, 1]$, τ.ω. αν p_n το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στην f στα $x_{n0}, \ldots, x_{nn}$, τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} ||f - p_n|| = \infty$$

Μπορεί να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση Runge στα Chebyshev

$$\lim_{n\to\infty} ||f - p_n|| = 0$$

Όμως υπάρχει το εξής αρνητικό Θεώρημα:

Θεώρημα Faber (1914) Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_{ni} \in [-1, 1]$ υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1, 1]$, τ.ω. αν p_n το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στην f στα $x_{n0}, \ldots, x_{nn}$, τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} ||f - p_n|| = \infty$$

- Ακόμη και αν δεν ίσχυε το Θ. Faber τα προβλήματα σφαλμάτων στρογγύλευσης στον υπολογισμό των πολυωνύμων για μεγάλο n καθιστούν απαγορευτική την πολυωνυμική παρεμβολή.