

Όνοματεπώνυμο :

Αριθμός Μητρώου :

Εξάμηνο :

Σχολή: Μ.Π.Δ.

Οδηγίες

- Συμπληρώσατε, **αμέσως**, τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο.
- Επιτρέπεται μόνο η χρήση υπολογιστή τσέπης.
Παραβίαση του κανόνα αυτού συνεπάγεται σοβαρές συνέπειες πέρα από το μηδενισμό στο μάθημα.
- Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά **όλη** η δουλειά σας. Η **ακρίβεια** των αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.
Σωστές απαντήσεις που δεν δικαιολογούνται από την δουλειά σας δεν θα βαθμολογηθούν.
- Δεν εγκαταλείπετε την θέση σας για κανένα λόγο χωρίς να επικοινωνήσετε πρώτα με επιτηρητή της εξέτασης.
- Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι **2 ώρες και 45 λεπτά**.
- Αποχώρηση από την εξέταση επιτρέπεται μετά από 40 λεπτά.

Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά ψηφία στους υπολογισμούς σας.

Σε όλες τις περιπτώσεις παραδίδετε το φυλλάδιο εξέτασης με συμπληρωμένα στοιχεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Θέμα 1

(α)[7] Έστω υπολογιστής όπου το σύνολο αριθμών μηχανής του ορίζεται ως $M(\beta = 2, t = 4, L = -6, U = 6)$ και $x = 0.10111 \cdot 2^5$ και $y = 0.10010 \cdot 2^6$. Υπολογίστε το αποτέλεσμα του $x + y$ στον υπολογιστή αυτό και δώστε την απάντησή σας και στο δυαδικό και στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Ποιά είναι η πραγματική τιμή του αθροίσματος;

(β)[6] Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $k(x) = \sqrt{4 + x^4} - 2$ για x κοντά στο 0. Δείξτε ότι για τον υπολογισμό του $k(0.5)$ σε έναν υπολογιστή με σύστημα αριθμών μηχανής $M(\beta = 10, t = 3, L = -5, U = 5)$ αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλο σχετικό σφάλμα και εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό. Προτείνετε έναν καλύτερο τρόπο υπολογισμού του $k(x)$ και υπολογίστε το $k(0.5)$ και το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα.

Θέμα 2

Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - 2x$:

(α) [4+10] Δείξτε αρχικά, και με τη βοήθεια γραφικής παράστασης, ότι έχει 2 μόνο ρίζες και ότι έχει μοναδική ρίζα x^* στο διάστημα $[1, 2]$. Εφαρμόστε τη μέθοδο **Newton-Raphson** για να προσεγγίσετε την x^* με ανοχή σφάλματος 10^{-3} , δίνοντας σαν αρχική τιμή x_0 το αποτέλεσμα που δίνουν **3 επαναλήψεις** της μεθόδου της **διχοτόμησης**.

(β)[8] Εξετάστε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση των παρακάτω **επαναληπτικών μεθόδων** για τη προσέγγιση της ρίζας $x^* \forall x_0 \in [1, 2]$

$$x_{n+1} = \phi_1(x_n) = \frac{e^{x_n} - 1}{2} \quad \text{και} \quad x_{n+1} = \phi_2(x_n) = \ln(1 + 2x_n).$$

Θέμα 3

(α) [10] Για τη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[1, 4]$ υπολογίστε το **πολυώνυμο παρεμβολής** στα σημεία $x_1 = 1, x_2 = 2.25$ και $x_3 = 4$ και δώστε μια **εκτίμηση του σφάλματος** της προσέγγισης στο $x = 2$ με βάση το θεώρημα του σφάλματος της πολυωνυμικής παρεμβολής και συγκρίνετε με το πραγματικό σφάλμα.

(β) [8] Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση $S(x)$ στο διάστημα $[0, 3]$,

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = \frac{14}{5}x - \frac{4}{5}x^3, & x \in [0, 1] \\ s_1(x) = \frac{4}{5}(x-1) + \frac{14}{5}(2-x) - \frac{4}{5}(2-x)^3 + \frac{1}{5}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ s_2(x) = \frac{4}{5}(3-x) + \frac{1}{5}(3-x)^3, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Είναι ή όχι η παραπάνω συνάρτηση **φυσική κυβική spline**; Να αιτιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(γ) [10] Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν την Ευρωπαϊκή αγορά επιστημονικού λογισμικού τα έτη 2000-2006

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
7314	8044	7335	7393	8005	9107	9990

Προσαρμόστε το μοντέλο $p(t) = \alpha e^{\beta(t-2003)}$ στα παραπάνω δεδομένα, υπολογίζοντας τα α και β .

Θέμα 4

(α)[6] Αποδείξτε με χρήση αναπτυγμάτων Taylor τον τύπο προσέγγισης της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης στο σημείο x : $f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + E$, υπολογίζοντας ταυτόχρονα και το σφάλμα E .

(β) [14] Για τον κανόνα ολοκλήρωσης $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \alpha f(x_1) + \alpha f(x_2)$, υπολογίστε τα x_1, x_2 και α ώστε να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα δευτέρου βαθμού. Εφαρμόστε τον κανόνα που υπολογίσατε καθώς και αυτόν του Simpson 3/8 για την προσέγγιση του $\int_{-2}^4 (x-1)^3 dx$ και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

Θέμα 5

(α)[12] Έστω το Π.Α.Τ. $y' = \lambda y$, $y(0) = y^0 = 1$ με $\lambda < 0$. Για την αριθμητική μέθοδο (θ -μέθοδος):

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot [(1-\theta)f(t^n, y^n) + \theta f(t^{n+1}, y^{n+1})] \quad \text{με} \quad \theta \in [0, 1],$$

δείξτε ότι είναι απόλυτα ευταθής (Α-ευσταθής) για $\theta \in [0.5, 1]$ και για $\theta \in [0, 0.5)$ υπολογίστε τη συνθήκη ευσταθείας της για την επιλογή του βήματος ολοκλήρωσης h .

(β)[10] Από τη θ -μέθοδο του (α) ερωτήματος κατασκευάστε τη μέθοδο του Heun και προσεγγίστε με $h = 0.5$ την τιμή του $y(1.5)$ για το Π.Α.Τ. $y' = -2ty^2$, $y(0) = 2$.

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα 1

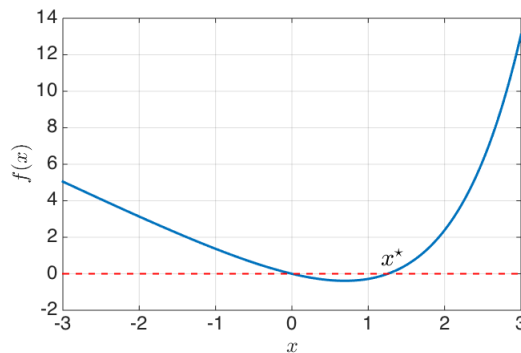
(α) Στο δοσμένο υπολογιστή, $fl(x) = 0.1011 \cdot 2^5$, εφόσον $t = 4$ έχουμε αποκοπή του τελευταίου ψηφείου, και $fl(y) = 0.1001 \cdot 2^6 \in M$. Μετατρέποντας τους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα έχουμε $fl(x) = (10110)_2 = (22)_{10}$ και $fl(y) = (10100)_2 = (36)_{10}$ άρα στο δεκαδικό θα έχουμε $fl(x) + fl(y) = 58$ όμως $(58)_{10} = (111010)_2 = 0.111010 \cdot 2^6$ στο δυαδικό, άρα τελικά στο υπολογιστή $fl(fl(x) + fl(y)) = 0.1110 \cdot 2^6$ στο δυαδικό σύστημα (τα 2 τελευταία ψηφεία χάνονται) και συνεπώς $(111000)_2 = (56)_{10}$ στο δεκαδικό. Η πραγματική τιμή του αθροίσματος είναι $(10111)_2 + (100100)_2 = (23)_{10} + (36)_{10} = (59)_{10} = (111011)_2$.

(β) Για $x = 0.5$ το $x^4 = 0.0625$ και $fl(x) = 0.625 \cdot 10^{-1}$. Η πραγματική τιμή του $\sqrt{4 + x^4} = 2.0155644 \dots$ και $fl(\sqrt{4 + x^4}) = 0.201 \cdot 10$ (με αποκοπή). Άρα η πραγματική τιμή του $k(0.5) = 0.015564437 \dots$ ενώ η υπολογιστική $\tilde{k}(x) = 0.100 \cdot 10^{-1}$ με σχετικό σφάλμα $|k(0.5) - \tilde{k}(0.5)|/|k(0.5)| \approx 0.3575$ δηλ. 35.75%.
Αν υπολογίσουμε το $k(x)$ ως $k(x) = x^4/(\sqrt{4 + x^4} + 2)$ τότε $k(0.5) = 0.155 \cdot 10^{-1}$ και το σχετικό σφάλμα τότε είναι $|k(0.5) - \tilde{k}(0.5)|/|k(0.5)| \approx 0.0041 = 0.41\%$.

Παρατήρηση: Σωστή απάντηση θα θεωρηθεί και αν $fl(\sqrt{4 + x^4}) = 0.202 \cdot 10$ (με στρογγύλευση).

Θέμα 2

(α)



Για τη διχοτόμηση έχουμε

$$\begin{aligned}x_1 &= 1.50, & f(x_1) &= 0.4817 > 0, \\x_2 &= 1.250, & f(x_2) &= -0.00966 < 0, \\x_3 &= \mathbf{1.375}, & f(x_3) &= 0.20508.\end{aligned}$$

Για την μέθοδο Newton-Raphson έχουμε, με $x_0 = 1.375$,

$$\begin{aligned}x_1 &= 1.2701, & f(x_1) &\approx 0.02101, & |x_1 - x_0| &= 0.104891 \\x_2 &= 1.2566, & f(x_2) &\approx 0.00032, & |x_2 - x_1| &= 0.01346 \\x_3 &= \mathbf{1.2564}, & f(x_3) &\approx 0.00000, & |x_3 - x_2| &= 0.00021 = 2.1 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}.\end{aligned}$$

(β) Για την $x_{n+1} = \phi_1(x_n) = \frac{e^{x_n} - 1}{2}$ έχουμε $|\phi'_1(x)| = \frac{e^x}{2} > \frac{e}{2} > 1$ για $x \in [1, 2]$ άρα δεν είναι συστολή και **δεν** εξασφαλίζεται η σύγκλιση.

Για την $x_{n+1} = \phi_2(x_n) = \ln(1 + 2x_n)$ έχουμε $|\phi'_2(x)| = \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{5} < 1$. Άρα είναι συστολή στο $[1, 2]$. Επίσης, η $\phi_2(x)$ είναι αύξουσα στο $[1, 2]$, $\phi'_2(x) > 0$, με $\phi'_2(1) = 1.0986$ και $\phi'_2(2) = 1.6094$, συνεπώς, $\phi_2([1, 2]) \subset [1, 2]$, άρα έχουμε εξασφαλισμένη σύγκλιση εφόσον ισχύει το Θ. Συστολής.

Θέμα 3

(α) Με βάση την $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 1.5$ και $f(x_3) = 2$. Το πολυώνυμο παρεμβολής (το πολύ δευτέρου βαθμού) μπορεί να υπολογιστεί με όποιο τρόπο π.χ. με χρήση πολυωνύμων Lagrange

$$P_2(x) = \frac{(x - 2.25)(x - 4)}{(1 - 1.25)(1 - 4)} + 1.5 \cdot \frac{(x - 1)(x - 4)}{(2.25 - 1)(2.25 - 4)} + 2 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2.25)}{(4 - 1)(4 - 2.25)} = -0.0381x^2 + 0.5238x + 0.5142.$$

Για την **εκτίμηση του σφάλματος** έχουμε

$$|f(2) - P_2(2)| \leq \frac{1}{3!} |(2 - 1)(2 - 2.25)(2 - 4)| \max_{\xi \in [1, 4]} |f'''(\xi)| = 0.8333 \cdot \max_{\xi \in [1, 4]} \frac{3}{8} \xi^{-5/2} = 0.8333 \cdot \frac{3}{8} \cdot 1 = 0.03125$$

Το **πραγματικό** σφάλμα είναι $|f(2) - P_2(2)| = 0.00469$.

(β) Πρέπει να δούμε αν ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέχειας και συνοριακές για φυσική κυβική Spline

$$s_0(1) = 2 = s_1(1), \text{ και } s_1(2) = 1 = s_2(2)$$

$$S'(x) = \begin{cases} s'_0(x) = \frac{14}{5} - \frac{12}{5}x^2, & x \in [0, 1] \\ s'_1(x) = \frac{4}{5} - \frac{14}{5} + \frac{12}{5}(2-x)^2 + \frac{3}{5}(x-1)^2, & x \in [1, 2] \\ s'_2(x) = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}(3-x)^2 & x \in [2, 3] \end{cases} \quad s'_0(1) = 2/5 = s'_1(1) \text{ και } s'_1(2) = -7/5 = s'_2(2)$$

$$S''(x) = \begin{cases} s''_0(x) = -\frac{24}{5}x, & x \in [0, 1] \\ s''_1(x) = -\frac{24}{5}(2-x) + \frac{6}{5}(x-1), & x \in [1, 2] \\ s''_2(x) = \frac{6}{5}(3-x) & x \in [2, 3] \end{cases} \quad s''_0(1) = -24/5 = s''_1(1) \text{ και } s''_1(2) = 6/5 = s''_2(2)$$

Τέλος, $s''_0(0) = 2$ και $s''_2(3) = 0$. Άρα **είναι** φυσική κυβική Spline.

(γ) Με τη μέθοδο **ελαχίστων τετραγώνων** γραμμικοποιούμε

$$p(t) = \alpha e^{\beta(t-2003)} \Rightarrow \ln(p(t)) = \ln(\alpha) + \beta(t-2003) \Rightarrow Y = A + B\tilde{t}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	$\tilde{t}_i = (t_i - 2003)$	$Y_i = \ln(p(t_i))$	$\tilde{t}_i^2$	$\tilde{t}_i Y_i$
1	-3	8.8975	9	
2	-2	8.9927	4	
3	-1	8.9004	1	
4	0	8.9083	0	
5	1	8.9878	1	
6	2	9.1168	4	
7	3	9.2093	9	
$\sum =$	0	63.0128	28	1.1271

Λύνοντας τις κανονικές εξισώσεις έχουμε $A = \ln(\alpha) = 9.0018 \Rightarrow \alpha = 8118$ και $B = \beta = 0.0454$.

Θέμα 4

(α) Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 15, σελ. 5.

(β) Θέλουμε 3 εξισώσεις για τους 3 αγνώστους και εφόσον ο κανόνας πρέπει να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι 2ου βαθμού έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1 dx &= x|_{-1}^1 = 2 = \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot 1 = 2\alpha \\ \int_{-1}^1 x dx &= \frac{1}{2}x^2|_{-1}^1 = 0 = \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \int_{-1}^1 x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3|_{-1}^1 = \frac{2}{3} = \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $\alpha = 1$, $x_1 = -x_2$ και τότε $2x_1^2 = \frac{2}{3}$. Συνεπώς, $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Δηλ. προκύπτει ο τύπος Gauss-Legendre 2 σημείων.

Για την εφαρμογή στο ολοκλήρωμα κάνουμε πρώτα αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{4 - (-2)}{2}t + \frac{4 - 2}{2} = 3t + 1 \Rightarrow \int_{-2}^4 (x-1)^3 dx = \int_{-1}^1 (3t+1-1)^3 3dt = 3 \int_{-1}^1 (3t)^3 dt$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο $3 \int_{-1}^1 (3t)^3 dt = 3 \cdot \left[1 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + 1 \cdot \left(3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right] = 0$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Simpson 3/8 έχουμε

$$Q_{3/8} = 2 \frac{3}{8} [f(-2) + 3f(0) + 3f(2) + f(4)] = 0.$$

Η πραγματική τιμή του ολοκληρώματος είναι 0, και οι 2 μέθοδοι ολοκλήρωσης υπολογίζουν το ολοκλήρωμα ακριβώς μια που ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα μέχρι 3ου βαθμού!

Θέμα 5

(α) Εφαρμόζοντας τη δοσμένη μέθοδο στο Π.Α.Τ. (δοκιμής) έχουμε (Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 15-16 και σελ. 24)

$$y^{n+1} = y^n + h[(1-\theta)\lambda y^n + \theta\lambda y^{n+1}] \Rightarrow [1-\theta\lambda h]y^{n+1} = [1+(1-\theta)\lambda h]y^n \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1+(1-\theta)\lambda h}{1-\theta\lambda h}y^n \Rightarrow$$

$$y^n = \left[\frac{1+(1-\theta)\lambda h}{1-\theta\lambda h} \right]^n y^0 \Rightarrow \text{άρα η μέθοδος είναι ευσταθής, δηλ. } y^n \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty, \text{ αν}$$

$$\left| \frac{1+(1-\theta)\lambda h}{1-\theta\lambda h} \right| < 1 \Rightarrow |1+(1-\theta)\lambda h| < |1-\theta\lambda h|$$

Εφόσον $\lambda < 0$ η ποσότητα $1-\theta\lambda h > 0$ άρα $|1+(1-\theta)\lambda h| < 1-\theta\lambda h$ συνεπώς,

$$-2+\theta\lambda h < (1-\theta)\lambda h < -\theta\lambda h$$

το δεξί μέλος της ανισότητας ισχύει πάντα εφόσον $\theta \in [0, 1]$ και το αριστερό δίνει

$$\theta\lambda h - (1-\theta)\lambda h < 2 \Rightarrow (2\theta-1)\lambda h < 2$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε επιλογή βήματος h αν $\theta \in [0.5, 1]$, εφόσον τότε $(2\theta-1) \geq 0$ (και $\lambda < 0$). Αν τώρα το $\theta \in [0, 0.5)$, τότε $2\theta-1 < 0$ και η συνθήκη ευστάθειας για την επιλογή του h είναι

$$h < \frac{2}{(2\theta-1)\lambda}.$$

Παρατήρηση: Για $\theta = 0$ έχουμε την (άμεση) Euler, για $\theta = 1$ έχουμε την πεπλεγμένη Euler με τις αντίστοιχες συνθήκες ευστάθειάς τους.

(α) Για $\theta = 1/2$ έχουμε την (πεπλεγμένη) μέθοδο τραπεζίου,

$$y^{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})]$$

όπου αντικαθιστώντας την y^{n+1} στο δεξί μέλος με $\tilde{y}_{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n)$ (πρόβλεψη Euler) έχουμε τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης του Heun, που δίνει

Βήμα 1:

$$\tilde{y}^1 = y^0 + h \cdot f(t^0, y^0) = 2 + h \cdot f(0, 2) = (2) + \frac{1}{2} \cdot (0) = 2,$$

$$y^1 = y^0 + \frac{h}{2} (f(t^0, y^0) + f(t^1, \tilde{y}^1)) = 2 + \frac{h}{2} (f(0, 2) + f(\frac{1}{2}, 2)) = 2 + \frac{1}{2} (0 + (-4)) = 1.0$$

Βήμα 2:

$$\tilde{y}^2 = y^1 + h \cdot f(t^1, y^1) = 1.0 + h \cdot f(\frac{1}{2}, 1.0) = (1.0) + \frac{1}{2} \cdot (-1.0) = 0.5,$$

$$y^2 = y^1 + \frac{h}{2} (f(t^1, y^1) + f(t^2, \tilde{y}^2)) = 1.0 + \frac{h}{2} (f(\frac{1}{2}, 1.0) + f(1, 0.5)) = 1.0 + \frac{1}{2} (-1.0 + (-0.5)) = 0.625.$$

Βήμα 3:

.....

$$\dots\dots\dots y^3 \approx 0.3885.$$