

Θέμα 1

(α)[5] Μετατρέψτε τους αριθμούς $(9.75)_{10}$ και $(0.1)_{10}$ στο 2-δικό σύστημα παράστασης αριθμών. Για ποιόν από τους δύο αριθμούς δεν υπάρχει σφάλμα κατά τη μετατροπή του σε έναν 64-bit υπολογιστή;

(β)[7] Έστω ο αριθμός $x = 2^6 + 2^{-16} + 2^{-19}$: (i) γράψτε τον αριθμό x στη μορφή κινητής υποδιαστολής $(0.d_1d_2 \dots d_t) \cdot 2^k$ και (ii) για έναν υπολογιστή με $t = 24$ επιβεβαιώστε ότι το σχετικό σφάλμα μεταξύ του αριθμού μηχανής $fl(x)$ και του x είναι μικρότερο από το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης.

Θέμα 2

Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := x^3 - 3x - 1 = 0$.

(α)[6] Δείξτε ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

(β)[7] Αν $\{x_n\}$ είναι η ακολουθία που παράγει η μέθοδος της τέμνουσας, υπολογίστε το x_2 με $x_0 = 3$ και $x_1 = 2.5$. Συγκρίνει η $\{x_n\}$, και αν ναι, σε ποιά από τις τρεις ρίζες; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας με βάση τη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου και τις ιδιότητες της f).

(γ)[7] Υπάρχει διάστημα $[a, b]$ που να περιέχει τη ρίζα ρ_2 , τέτοιο ώστε η να ισχύουν σ' αυτό οι προϋποθέσεις σύγκλισης για την επαναληπτική μέθοδο $x_{n+1} = (x_n^3 - 1)/3, n \geq 0$; Αν ναι, βρείτε ένα τέτοιο διάστημα.

Θέμα 3

(α)[9] Θεωρήστε τα δεδομένα $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, 3$, όπου τα σημεία x_i είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Αν $p_3 \in P_3$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής στις τιμές y_i στα σημεία x_i , δείξτε ότι αυτό δίνεται ως

$$p_3(x) = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_0} p_2(x) + \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} q_2(x), \quad (1)$$

όπου $p_2 \in P_2$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής στα x_0, x_1, x_2 και $q_2 \in P_2$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής στα x_1, x_2, x_3 .

(β)[7] Για τα δεδομένα $(x_0, y_0) = (0, 0)$ και $(x_1, y_1) = (1, 1)$ υπολογίστε (i) την clamped κυβική spline παρεμβολής $S(x)$ με $S'(0) = 0 = S'(1)$ και (ii) τη φυσική κυβική spline παρεμβολής $S(x)$ που παρεμβάλουν στα δεδομένα.

(γ)[12] Ένας ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει το ρυθμό ανάπτυξης k (ανά ημέρα) ενός βακτηρίου ως συνάρτηση της συγκέντρωσης του οξυγόνου c (mg/l) όταν $c = 2mg/l$, με βάση τα παρακάτω πειραματικά δεδομένα,

c	0.5	0.8	1.5	2.5	4
k	1.1	2.4	5.3	7.6	8.9

Γνωρίζουμε ότι τέτοιου είδους δεδομένα μπορούν να προσομοιωθούν από το ακόλουθο μοντέλο $k = \frac{k_{max}c^2}{c_s + c^2}$. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων για να εκτιμήσετε τις τιμές των k_{max} και c_s .

Θέμα 4

(α)[9] Για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου μίας συνάρτησης f στο x χρησιμοποιούμε τον τύπο αριθμητικής διαφοροποίησης (παραγώγισης): $f''(x) = \frac{Af(x+h) + Bf(x) + Cf(x-h)}{h^2}, h > 0$. Υπολογίστε τα A, B και C και δείξτε ότι ο τύπος έχει ακρίβεια $O(h^2)$.

(β)[13] Υπολογίστε το πλήθος των κόμβων που χρειάζονται για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(f) = \int_1^2 x \ln(x) dx$ με ακρίβεια 10^{-4} χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 και για τα σημεία (κόμβους) που βρήκατε προσεγγίστε το ολοκλήρωμα. (Δίνεται ότι ο τύπος του σφάλματος για το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 είναι $R_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$.)

(γ)[7] Ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 3-σημείων δίνεται ως $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. Βρείτε ποιοί είναι οι κόμβοι και τα βάρη του τύπου για τυχαίο διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$.

Θέμα 5

(α)[9] Για τη διαφορική εξίσωση: $y' = -\lambda y$ με $\lambda > 0$ και $y(0) = 1$, αποδείξτε ότι η (άμεση) μέθοδος του Euler είναι ευσταθής όταν για το βήμα ολοκλήρωσης (διακριτοποίησης) h ισχύει ότι $0 < h < 2/\lambda$ ενώ, η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι ευσταθής για οποιαδήποτε επιλογή του h .

(β)[7] Έστω το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων (για τις $y_1(t)$ και $y_2(t)$),

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1 - 0.5y_2 + \cos(t), \end{aligned}$$

με αρχικές τιμές $y_1(0) = 1$ και $y_2(0) = -1$. Προσεγγίστε τη λύση του συστήματος στο διάστημα $[0, 1]$ βήμα $h = 0.5$ με την (άμεση) μέθοδο του Euler.

Θέμα 1

(α) $(9.75)_{10} \rightarrow (1001.11)_2$ και $(0.1)_{10} \rightarrow (0.0001100011\dots)_2$ επαναλαμβανόμενα άπειρα δεκαδικά, συνεπώς το 0.1 δεν μπορεί να παρασταθεί ακριβώς όταν μετατρέπεται στο 2-δικό σύστημα.

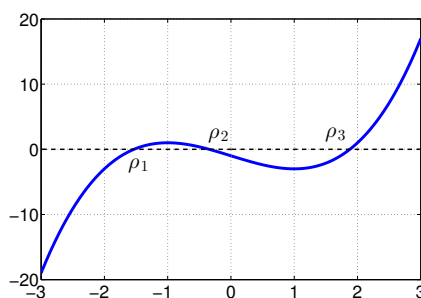
(β) Ο αριθμός γράφεται $x = 2^6 + 2^{-16} + 2^{-19} = 2^7(0.1 + 2^{-23} + 2^{-26}) = (0.1 \underbrace{0\dots\dots 0}_{21-\text{θέσεις}} 1001) \cdot 2^7$.

Ο αριθμός μηχανής, για $t = 24$, είναι $fl(x) = (0.1 \underbrace{0\dots\dots 0}_{21-\text{θέσεις}} 10) \cdot 2^7$ (χάνονται τα τελευταία 2 δεκαδικά) άρα το σχετικό σφάλμα είναι

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} = \frac{2^{-19}}{2^6 + 2^{-16} + 2^{-19}} = \frac{2^{-25}}{1 + 2^{-22} + 2^{-25}} < 2^{-25} < u = \frac{1}{2}2^{1-24} = 2^{-24}.$$

Θέμα 2

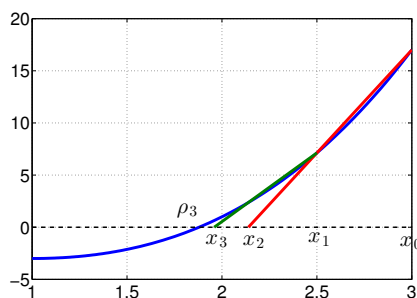
(α) Η μελέτη της συνάρτησης (μονοτονία, κυρτότητα, ακρότητα κτλ) f δίνει το γράφημα της, π.χ. στο $[-3, 3]$. Η $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, άρα η f φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και αύξουσα αλλού, με σημεία καμπής στο $x = 1$ και $x = -1$ κτλ. (Οι ρίζες είναι $\rho_1 \approx -1.5$, $\rho_2 \approx -0.35$ και $\rho_3 \approx 1.88$).



(β) Η μέθοδος της τέμνουσας δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 2.1392$$

η οποία συγκλίνει στη ρίζα ρ_3 , όπως φαίνεται γεωμετρικά π.χ. από 2 βήματα της μεθόδου, φέρνοντας τις αντίστοιχες τέμνουσες (και εφόσον η f αύξουσα για $x > 1$ και $f'' > 0$)



(γ) Εφόσον $\phi(x_n) = \frac{x_n^3 - 1}{3}$ κοιτάμε καταρχάς σε ποιο διάστημα η $\phi(x) = \frac{x^3 - 1}{3}$ είναι συστολή, δηλ. $|\phi'(x)| < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$. Συνεπώς, για όποιο $[a, b] \subset (-1, 1)$ η ϕ είναι συστολή και $\rho_2 \in (-1, 1)$. Μπορούμε να επιλέξουμε όποιο τέτοιο $[a, b]$, με την προϋπόθεση ότι $\rho_2 \in [a, b]$, και να δείξουμε ότι $\phi([a, b]) \rightarrow [a, b]$. Μια που η ϕ είναι αύξουσα στο όποιο $[a, b] \subset (-1, 1)$ αυτό είναι εύκολο ναδειχθεί (με βάση τις τιμές της ϕ στα άκρα του $[a, b]$). Για παράδειγμα, τα διαστήματα $[-0.75, 0]$ και $[-0.5, 0.5]$.

Θέμα 3

(α) Είναι φανερό ότι το δεξί μέλος της (1), ας το πούμε $p(x)$, είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ τρία. Αν δείξουμε ότι $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, 3$ (ορισμός πολ. παρεμβολής), τότε, από τη μοναδικότητα του πολ. παρεμβολής, θα προκύψει ότι $p_3(x) \equiv p(x)$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις $p_2(x_i) = y_i$, για $i = 0, 1, 2$ και $q_2(x_i) = y_i$, για $i = 1, 2, 3$, έχουμε,

$$p(x_0) = p_2(x_0) = y_0,$$

$$p(x_1) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_0} p_2(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_3 - x_0} q_2(x_1) = \left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_0} + \frac{x_1 - x_0}{x_3 - x_0} \right) y_1 = y_1,$$

$$p(x_2) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_0} p_2(x_2) + \frac{x_2 - x_0}{x_3 - x_0} q_2(x_2) = \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_0} + \frac{x_2 - x_0}{x_3 - x_0} \right) y_2 = y_2,$$

$$p(x_3) = q_2(x_3) = y_3, \text{ το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη (δεν χρειάζεται έτσι να υπολογιστούν τα } p_2(x) \text{ και } q_2(x)).$$

(β) Έστω ότι η clamped κυβική spline είναι $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, και $S'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ και έχουμε,
 $S(0) = d = 0$, $S'(0) = c = 0$,
 $S(1) = a + b = 1$ και $S'(1) = 3a + 2b = 0$ άρα $a = -2$ και $b = 3 \Rightarrow S(x) = -2x^3 + 3x^2$.
 Για τη φυσική κυβική spline παρεμβολής έχουμε $S''(0) = 0 = S''(1)$ συνεπώς $S''(0) = 2b = 0 \Rightarrow b = 0$
 $S''(1) = 6a + 2b = 0 \Rightarrow a = 0$ και από $S(0) = d = 0$ και $S(1) = c = 1 \Rightarrow S(x) = x$.

(γ) Το μοντέλο γραμμικοποιείται ως εξής: $\frac{1}{k} = \frac{c_s}{k_{\max}} \frac{1}{c^2} + \frac{1}{k_{\max}}$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών για να εφαρμόσουμε γραμμική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων $y = ax + b$ με $y = 1/k$, $x = 1/c^2$, $a = c_s/k_{\max}$ και $b = 1/k_{\max}$

i	c	k	$x = 1/c^2$	$y = 1/k$	xy	x^2
1	0.5	1.1	4.000000	0.909091	3.636364	16.000000
2	0.8	2.4	1.562500	0.416667	0.651042	2.441406
3	1.5	5.3	0.444444	0.188679	0.083857	0.197531
4	2.5	7.6	0.160000	0.131579	0.021053	0.025600
5	4	8.9	0.062500	0.112360	0.007022	0.003906
$\sum_i$			6.229444	1.758375	4.399338	18.66844

Λύνοντας το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} 18.66844a + 6.229444b &= 4.399338 \\ 6.229444a + 5b &= 1.758375 \end{aligned}$$

προκύπτει ότι $a = 0.202489$ και $b = 0.099396$, συνεπώς $k_{\max} = 10.0607$ και $c_s = 2.037189$.

Θέμα 3

(α) Έχουμε έναν τύπο κεντρικών διαφορών και με χρήση αναπτυγμάτων Taylor για την $f(x)$ γύρω από το x έχουμε (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 13)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi_1) \quad (2)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) - \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi_2) \quad (3)$$

και προσθέτοντας τις (2) και (3), κρατώντας τους όρους μέχρι την τέταρτη παράγωγο, και λύνοντας ως προς τη $f''(x)$, υπολογίζουμε την προσέγγιση κεντρικών διαφορών της $f''(x)$ (και το σφάλμα)

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)] \quad (4)$$

$\Rightarrow A = 1, B = -2$ και $C = 1$, ο όρος του σφάλματος (αποκοπής) $\frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)]$ είναι, προφανώς, $O(h^2)$.

(Εναλλακτικά τα A, B, C μπορούν να υπολογιστούν και με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών για $f(x) = 1, x, x^2$)

(β) Θέλουμε $|R_S| = \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right|_{\infty} = \max_{x \in [1,2]} \left| \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right| < 10^{-4}$, όπου $f^{(4)}(x) = 2/x^3$ (τέταρτη παράγωγος της $f(x) = x \ln(x)$) και $\max_{x \in [1,2]} |2/x^3| = 2$, συνεπώς

$$\frac{1}{180} \cdot h^4 \cdot 2 < 10^{-4} \Rightarrow h^4 < \frac{180 \cdot 10^{-4}}{2} \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} < 0.308 \Rightarrow n > 3.2466$$

Άρα θέλουμε $n = 4$ υποδιαστήματα (ακέραιος και άρτιος αριθμός) στο $[1, 2]$ άρα 5 σημεία (κόμβους) για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο (με $h = (2-1)/4 = 0.25$).

Οι κόμβοι είναι $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75$ και $x_4 = 2$, άρα ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 μας δίνει

$$I(f) \approx \frac{h}{3} [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)] = \dots = 0.636309.$$

(γ) Χρειάζεται μόνο να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από το $x \in [-1, 1]$ στο $t \in [a, b]$

$$t = \frac{(b-a)x + a + b}{2}; \quad dt = \frac{(b-a)}{2} dx$$

Συνεπώς

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{(b-a)}{2} \left[\frac{5}{9} f\left(\frac{-(b-a)\sqrt{3/5} + a + b}{2}\right) + \frac{8}{9} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{5}{9} f\left(\frac{(b-a)\sqrt{3/5} + a + b}{2}\right) \right],$$

όπου τα βάρη είναι, $w_0 = w_2 = \frac{5}{9} \frac{b-a}{2}$ και $w_1 = \frac{8}{9} \frac{b-a}{2}$ και οι κόμβοι τα ορίσματα της f στον παραπάνω τύπο.

Θέμα 5

(α) Βλέπε ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 15-17 και σελ. 24.

(β) Η μέθοδος Euler, $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$, εφαρμόζεται σε κάθε μία εξίσωση ξεχωριστά (για συνολικά 2 βήματα, $n = 0, 1$) και αρχικές συνθήκες $y_1^0 = 1$ και $y_2^0 = -1$.

Για $n = 0$

$$y_1^1 = y_1^0 + hy_2^0 = 1 + 0.5(-1) = 0.5$$

$$y_2^1 = y_2^0 + h(-y_1^0 - 0.5y_2^0 + \cos(0)) = -1 + 0.5(-1 - 0.5(-1) + 1) = -0.75$$

Για $n = 1$

$$y_1^2 = y_1^1 + hy_2^1 = 0.5 + 0.5(-0.75) = 0.125$$

$$y_2^2 = y_2^1 + h(-y_1^1 - 0.5y_2^1 + \cos(0.5)) = -0.75 + 0.5(-0.5 - 0.5(-0.75) + 0.8776) = -0.374$$

(Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί με πράξεις πινάκων και διανυσμάτων εξισώσεων σε κάθε βήμα, βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 17 σελ. 30-33)