

ΘΕΜΑ 1

(α) [16] Για την εξίσωση $f(x) = (0.8 - 0.3x)/x$ υπολογίστε την ρίζα της και εντοπίστε την γραφικά. Στη συνέχεια, και για την προσέγγιση της ρίζας, εφαρμόστε 3 επαναλήψεις της μέθοδου **διχοτόμησης** στο διάστημα $[1, 3]$ και 2 επαναλήψεις της μεθόδου **Newton-Raphson** με αρχική τιμή $x_0 = 2$.

(β) [9] Για την επαναληπτική μέθοδο σταθερού σημείου $x_{n+1} = \phi(x_n)$ με συνάρτηση επανάληψης $\phi(x) = x + 0.8/x - 0.3$, δώστε ένα διάστημα (για $x > 0$) για το οποίο η μέθοδος **σίγουρα** συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)$.

ΘΕΜΑ 2

(α) [15] Ο παρακάτω πίνακας δίνει στο χρόνο t την απόσταση, y , που έχει διανύσει ένας πύραυλος

t, s	0	25	50	75	100	125
y, km	0	32	58	78	92	100

Εκτιμήστε την απόσταση του πυραύλου στο χρόνο $t = 60s$ εφαρμόζοντας **πολυωνυμική παρεμβολή** σε 3 κατάλληλα σημεία από τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας κατάλληλες **διαφορές** τάξης $O(h^2)$ εκτιμήστε την ταχύτητα και επιτάχυνση του στο χρόνο $t = 100s$.

(β) [15] Δημιουργήστε την προσαρμογή **ελαχίστων τετραγώνων** για το ακόλουθο μοντέλο: $F = a_1v + a_2v^2$, δίνοντας τις Κανονικές Εξισώσεις που αντιστοιχούν. Εφαρμόστε το μοντέλο στα παρακάτω δεδομένα που περιγράφουν τη δύναμη που ασκείται σε ένα αντικείμενο τοποθετημένο σε μια ανεμοσύραγα σε σχέση με την ταχύτητα του ανέμου $v(m/s)$.

$v, m/s$	10	20	30	40	50	60	70	80
F, N	25	70	380	550	610	1220	830	1450

ΘΕΜΑ 3

(α) [15] Η συνολική μάζα, m , μιάς δοκού δίνεται από $m = \int_0^L \rho(x)A_c(x)dx$ όπου, $\rho(x)$ = πυκνότητα, $A_c(x)$ = διατομή, L = το συνολικό μήκος της δοκού και x = η απόσταση κατά μήκος της δοκού. Υπολογίστε τη μάζα με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια με χρήση **κανόνων ολοκλήρωσης** (τραπεζίου, Simpson 1/3 και 3/8) με βάση τα παρακάτω δεδομένα.

x, m	0	2	3	4	6	8	10
$\rho, g/cm^3$	4.00	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
A_c, cm^2	100	103	106	110	120	133	150

(β) [10] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ με χρήση του κανόνα Gauss-Legendre 2-σημείων.

ΘΕΜΑ 4

(α) [10] Η ταχύτητα ενός σώματος, σε m/s , συνάρτηση του χρόνου t δίνεται ως

$$u(t) = 200 \ln(1+t) - t, \quad t \geq 0.$$

Εφαρμόζοντας τη (ρητή) μέθοδο Euler με χρονικό βήμα $h = 5s$, υπολογίστε την απόσταση που διάνυσε το σώμα από το χρόνο $t = 2s$ μέχρι το χρόνο $t = 12s$. Πώς εφαρμόζεται η **πεπλεγμένη** μέθοδος Euler στο συγκεκριμένο πρόβλημα;

(β) [15] Εφαρμόστε τη μέθοδο του Heun (πρόβλεψης-διόρθωσης):

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, \tilde{y}^{n+1})], \quad \text{όπου } \tilde{y}^{n+1} = \text{βήμα Euler},$$

στο πρόβλημα και τα δεδομένα του ερωτήματος (α) και συγκρίνετε το αποτέλεσμα σας με αυτό του ερωτήματος (α).