

### **Θέμα 1**

**[28]** Απαντήστε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) για τις παρακάτω προτάσεις αιτιολογώντας πλήρως την επιλογή σας.

- (1) Στο σύνολο αριθμών ενός υπολογιστή  $M(\beta, t, L, U) = M(2, 64, -128, 128)$  ο αριθμός 0.1 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης παριστάνεται ακριβώς. **[2]**
- (2) Σε ένα υπολογιστή με  $M(\beta, t, L, U) = M(10, 3, -10, 10)$  η πράξη  $3 - 10\pi$  δίνει αποτέλεσμα  $-0.284 \cdot 10^2$ . **[2]**
- (3) Αν η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμόζεται για την  $f(x) = 0$  στο  $[0, 1]$  χρειαζόμαστε τουλάχιστον 40 επαναλήψεις της μεθόδου για να προσεγγίσουμε τη ρίζα με ακρίβεια 12 δεκαδικών ψηφίων. **[3]**
- (4) Η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει τετραγωνικά για τη προσέγγιση της ρίζας  $x^* = 0$  της  $f(x) = x^2 e^x$ . **[2]**
- (5) Η μέθοδος Newton-Raphson για την προσέγγιση της  $\sqrt[k]{2}$  δίνει  $x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[ (k-1)x_n + \frac{2}{x_n^{k-1}} \right]$ ,  $n = 0, 1, \dots$  **[3]**
- (6) Το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής στην  $f(x) = \sin(x)$  στα σημεία  $-\pi$  και  $\pi$  είναι  $< 5$ . **[3]**
- (7) Αν  $p(x)$  είναι ένα κυβικό πολυώνυμο και  $S(x)$  η φυσική κυβική spline που το παρεμβάλλει σε  $n+1$  σημεία σε ένα διάστημα  $[a, b]$  τότε  $p(x) = S(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . **[2]**
- (8) Αν για την προσέγγιση του  $\int_0^2 f(x)dx$  ο απλός κανόνας του Τραπεζίου δίνει την τιμή 4 και του Simpson  $1/3$  την τιμή 2, τότε  $f(1) = 1/2$ . **[3]**
- (9) Ο κανόνας ολοκλήρωσης  $Q(f) = f(-\sqrt{3}/3) + f(\sqrt{3}/3)$  υπολογίζει ακριβώς το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 x^3 e^x dx$ . **[2]**
- (10) Η τιμή της προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου της  $f(x) = x^3$  στο  $x = 1$  με τον τύπο κεντρικών διαφορών ακρίβειας  $O(h^2)$  με βήμα  $h = 1$  είναι 6. **[3]**
- (11) Η μέθοδος Euler με βήμα  $h = 1$  για το πρόβλημα αρχικών τιμών  $y' = -2t$ ,  $y(0) = 1$  δίνει για την προσέγγιση του  $y(2)$  απόλυτο σφάλμα ίσο με 2. **[3]**

### **Θέμα 2**

- (α)[10+7]** Αποδείξτε αν η επαναληπτική μέθοδος  $x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  συγκλίνει ή όχι σε σταθερό σημείο  $x^*$  για κάθε  $x_0$  στο  $[1, 2]$ . Αν συγκλίνει, ποιο είναι το  $x^*$  και ποιά η τάξη σύγκλισης της μεθόδου;
- (β)[14]** Για το μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων  $\begin{cases} y = e^x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  δείξτε γραφικά ότι έχει 2 λύσεις (όπου η μία είναι η  $[x^*, y^*] = [0, 1]$ ). Εφαρμόστε ένα βήμα της μεθόδου Newton-Raphson με κατάλληλη αρχική προσέγγιση  $[x^{(0)}, y^{(0)}]$  της επιλογής σας για την προσέγγιση της δεύτερης λύσης.

### **Θέμα 3**

Δίνονται οι μετρήσεις της ταχύτητας,  $u$ , ενός σωματιδίου στο χρόνο,  $t$ ,

|            |   |   |      |      |
|------------|---|---|------|------|
| $t(sec)$   | 1 | 2 | 4    | 5    |
| $u(m/sec)$ | 3 | 9 | 19.5 | 24.6 |

- (α)[8]** Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής,  $P(t)$ , στα παραπάνω δεδομένα με χρήση διαιρεμένων διαφορών.
- (β)[12]** Στα παραπάνω δεδομένα, και με χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, προσαρμόστε την συνάρτηση  $u(t) = At + \frac{B}{t}$  (υπολογίστε δηλ. τα  $A$  και  $B$ ).

### **Θέμα 4**

- (α)[7]** Έστω ο κανόνας ολοκλήρωσης  $\int_0^1 f(x)dx = w_1 f(0) + w_2 f'(x_2)$ . Υπολογίστε τα  $w_1, w_2$  και  $x_2$  ώστε ο κανόνας να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερης ακρίβειας.
- (β)[8]** Εφαρμόστε τον κανόνα του (α) ερωτήματος για την προσέγγιση του ολοκληρώματος  $\int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{x^2 + 1} dx$
- (γ)[6]** Αποδείξτε πώς κατασκευάζεται με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης η μέθοδος του Heun για την προσέγγιση της λύσης προβλημάτων αρχικών τιμών της μορφής  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ .

## Απαντήσεις Θεμάτων

### Θέμα 1

- (1) (Λ) Μετατρέποντας τον  $(0.1)_{10}$  σε βάση 2 έχουμε  $(0.00011 \dots)_2$  που έχει άπειρα (επαναλαμβανόμενα) δεκαδικά.
- (2) (Σ)  $fl(fl(3) - fl(10)fl(\pi)) = -0.284 \cdot 10^2$
- (3) (Σ) Από το  $(b-a)/2^n \leq 10^{-12}$  προκύπτει ότι  $n \geq 40$ .
- (4) (Λ) Το  $x^* = 0$  είναι διπλή ρίζα της  $f(x) = x^2 e^x$ , άρα η NR θα συγκλίνει γραμμικά.
- (5) (Σ) Για  $f(x) = x^k - 2 = 0$ .
- (6) (Σ) Το σφάλμα για αυτή την παρεμβολή είναι  $\frac{1}{2!} \max_{x \in [-\pi, \pi]} |(x+\pi)(x-\pi)| \max |\sin^{(2)}(x)| = \frac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot 1 = 4.9348 < 5$
- (7) (Λ) Η φυσική κυβική spline έχει συνοριακές συνθήκες  $S''(x_0) = 0 = S''(x_n)$ , που δεν ισχύουν απαραίτητα για το  $p(x)$ .
- (8) (Σ)  $Q_T = \frac{2}{2}[f(0) + f(2)] = 4$  και  $Q_S = \frac{2}{6}[f(0) + 4f(1) + f(2)] = 2 \Rightarrow f(1) = 1/2$ .
- (9) (Λ) Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση  $x^3 e^x$  δεν είναι πολυώνυμο, άρα ο τυπος (Gauss) δεν την ολοκληρώνει ακριβώς.
- (10) (Σ) Ο τύπος κεντρικών διαφορών  $O(h^2)$  είναι ο  $f''(1) \approx \frac{f(1+h)-2f(1)-f(1-h)}{h^2}$  και δίνει την (ακριβή) τιμή 6.
- (11) (Σ) Η ακριβής λύση είναι  $y(t) = -t^2 + 1$  και η μέθοδος Euler δίνει  $y^1 = 1$  και  $y^2 = -1$ . Άρα  $|y(2) - y^2| = 2$ .

### Θέμα 2

(α) Για τον έλεγχο σύγκλιση της  $\phi(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$  στο  $[1, 2]$ , έχουμε

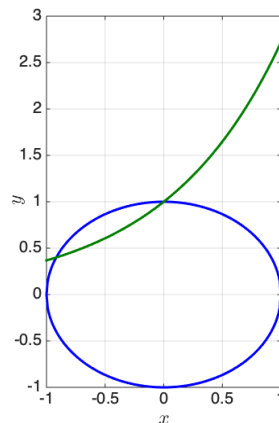
$$\phi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \text{ και } \phi(x)'' = \frac{2}{x^3} > 0 \text{ (δηλ. } \phi' \text{ αύξουσα)} \Rightarrow |\phi'(1)| = 1/2 \text{ και } |\phi'(2)| = 1/4, \text{ άρα } \max_{x \in [1, 2]} |\phi'(x)| = 1/2 < 1$$

και  $\phi(1) = 1.5$ ,  $\phi(2) = 1.5$  όμως  $\phi'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$  (ελάχιστο), συνεπώς  $\phi([1, 2]) \subset [1, 2]$ .

Για το  $x^*$  έχουμε από  $x = \phi(x) \Rightarrow x = x/2 + 1/x \Rightarrow (x^2 - 2)/2x = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ , άρα  $x^* = \sqrt{2}$  μοναδικό σταθ. σημείο στο  $[1, 2]$ .

Εφόσον  $\phi'(x^*) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = 0$  η τάξη σύγκλισης είναι μεγαλύτερη από γραμμική (Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 5 σελ. 14 & 16) και εφόσον  $\phi''(x^*) \neq 0$  είναι τετραγωνική.

(β)



Έχουμε τις 2 εξισώσεις

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= e^x - y = 0, \\ f_2(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα και τον αντίστροφό του

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{J}^{-1}(x, y) = \frac{1}{2ye^x + 2x} \begin{bmatrix} 2y & 1 \\ -2x & e^x \end{bmatrix},$$

Με αρχική τιμή, για παράδειγμα,  $\mathbf{x}^{(0)} = [-1, 0.5]^T$  (κοντά στη δεύτερη λύση) έχουμε

$$\mathbf{J}_0^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(-1, 0.5) \approx \begin{bmatrix} 0.4223 & -0.4223 \\ 0.8446 & 0.1553 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{F}(-1, 0.5) = \begin{bmatrix} f_1(-1, 0.5) \\ f_2(-1, 0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1321 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Το πρώτο βήμα της μεθόδου δίνει

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{J}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}(-1, 0.5) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4223 & -0.4223 \\ 0.8446 & 0.1553 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1321 \\ 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} \approx \begin{bmatrix} -0.9278 \\ 0.3944 \end{bmatrix}.$$

### Θέμα 3

(α) Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$P_3(t) = 3 + 6 \cdot (t - 1) - 0.25 \cdot (t - 1)(t - 2) + 0.05 \cdot (t - 1)(t - 2)(t - 4)$$

(β) Παραγωγίζοντας ως προς  $A$  και  $B$  τη  $\sum_{i=1}^4 [u_i - At_i + B/t_i]^2$  παίρνουμε τις κανονικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 u_i t_i &= A \sum_{i=1}^4 t_i^2 + 4B \\ \sum_{i=1}^4 u_i / t_i &= 4A + B \sum_{i=1}^4 1/t_i^2 \end{aligned}$$

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων δίνει

$$\begin{bmatrix} 46 & 4 \\ 4 & 1.3525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 222 \\ 17.295 \end{bmatrix}$$

με λύση  $A \approx 5$  και  $B \approx -2$ .

### Θέμα 4

(α) Ολοκληρώνοντας ακριβώς μέχρι πολυώνυμο 3ου βαθμού έχουμε  $w_1 = 1, w_2 = 1/2$  και  $x_2 = 1/3$ .

(β) Με αλλαγή μεταβλητής  $x = t - 1/2$  έχουμε  $\int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(t - 0.5)^2 + 1} dt \approx f(0) + 0.5f'(1/3) = 4/5 + 0.3155 = 1.1155$ .

(γ) Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 18 σελ. 5-6