Θέμα 1

[26] Απαντήστε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) για τις παρακάτω προτάσεις **αιτιολογώντας πλήρως** την επιλογή σας.

(1) Για $x, y \in \mathbb{R}$ και αριθμούς υπολογιστή $fl(x), fl(y)$ έχουμε $x - y = fl(x) - fl(y)$ και $\frac{x}{y} = \frac{fl(x)}{fl(y)}$.
(2) Στο σύνολο αριθμών ενός υπολογιστή $M(\beta, t, L, U) = M(10, 8 - 7, 8)$ το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης είναι 0.0000001.
(3) Στο σύνολο αριθμών ενός υπολογιστή $M(4, 4, -4, 4)$ ο $fl(33.75) = (0.2013)_4 \cdot 4^3$.
(4) Η μέθοδος της διχοτόμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τις ρίζες της $f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$.
(5) Η μέθοδος της τέμνουσας έχει ταχύτερη σύγκλιση από αυτή της μεθόδου Newton-Raphson.
(6) Η μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ συγκλίνει $\forall x_0 \in [1, 3]$.
(7) Το πολυώνυμο παρεμβολής Newton δεκάτου βαθμού που προσεγγίζει την $\frac{1}{1+25x^2}$ στο $[-1, 1]$ για ομοιόμορφη διαμέριση δίνει μια αποδεκτή προσέγγιση.
(8) Η φυσική κυβική spline είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα παρεμβολής.
(9) $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} + O(h^2)$ για αρκετά μικρό h.
(10) Ο κανόνας ολοκλήρωσης του Simpson 3/8 υπολογίζει ακριβώς το $\displaystyle\int_{-2}^{3} (-3x^3 + 2x^2) dx$.
(11) Ο κανόνας ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 4 σημείων ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα 8ου βαθμού.
(12) Η μέθοδος του Euler για διαφορικές εξισώσεις είναι Α-ευσταθής.
(13) Η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta έχει ακρίβεια $O(h^4)$.

Θέμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - e^x$.
(α)[5] Δείξτε ότι η $f(x)$ έχει 2 ρίζες για $x \geq 0$ και βρείτε κατάλληλα διαστήματα $[a, b]$ όπου αυτές είναι μοναδικές.
(β)[7] Η επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{3} e^{x_n}}$ μπορεί να συγκλίνει σε κάποια ρίζα της $f(x)$;
(γ)[7 + 6] Για την προσέγγιση μίας ρίζας $x^\star$ της $f(x)$, θέλουμε να εφαρμόσουμε την επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = x_n + Cf(x_n)$ με $C \neq 0$. Αποδείξτε για ποιές τιμές του C η διαδικασία θα συγκλίνει στο $x^\star$ και για ποιά τιμή του C θα συγκλίνει τετραγωνικά, για x_0 κοντά στο $x^\star$. Εφαρμόστε κατάλληλα 3 βήματα της μεθόδου τετραγωνικής σύγκλισης που βρήκατε για να προσεγγίσετε μία ρίζα της επιλογής σας.

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $S(x) := \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$.
(α)[5] Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής, $P(x)$, που παρεμβάλλεται την S στα σημεία $-1, 0$ και 1.
(β)[8] Αν θεωρήσουμε ότι η $S(x)$ είναι η γραμμική spline παρεμβολής στο $P(x)$ ποιό είναι το *μέγιστο* σφάλμα $|P(x) - S(x)|$ στο $[-1, 1]$;
(γ)[13] Ο πίνακας περιέχει τις ενδεικτικές τιμές πώλησης ενός προϊόντος τα προηγούμενα έτη μέχρι σήμερα

Ετος(t)	2016	2017	2018	2019	2020
Τιμή (f)	27	50	66	80	90

Με βάση τα δεδομένα κατασκευάστε την συνάρτηση $f(t) = a(t - 2015)e^{b(t-2015)}$, η οποία προσεγγίζει καλύτερα τις τιμές πώλησής του και εκτιμήστε ποιά θα είναι η τιμή πώλησης του προιόντος το 2021.

Θέμα 4

(α)[10] Υπολογίστε τους συντελεστές a_0, a_1 και a_2 ώστε ο παρακάτω κανόνας ολοκλήρωσης να είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού ≤ 3

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x) dx = a_0 f(-1) + a_1 f(0) + a_2 f(1)$$

(β)[13] Υπολογίστε το πλήθος των κόμβων που χρειάζονται για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_{1}^{2} x \ln(x) dx$ με ακρίβεια 10^{-4} με τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3. Για τους κόμβους που βρήκατε προσεγγίστε το ολοκλήρωμα. (Ο τύπος του σφάλματος για το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 είναι $R_S = -\dfrac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$.)

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα 1

(1) (Λ) Εχουμε $x - y = fl(fl(x) - fl(y))$ και $\frac{x}{y} = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right)$.

(2) (Λ) Για $M(\beta, t, L, U) = M(10, 8 - 7, 8)$ το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης είναι $u = 0.5 \cdot \beta^{1-t} = 0.5 \cdot 10^{-7}$.

(3) (Σ) Για $M(4, 4, -4, 4)$ ο $(0.2013)_4 \cdot 4^3 = 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} = 33.75$.

(4) (Λ) Η μέθοδος της διχοτόμησης δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ εφοσον η συνάρτηση δεν αλλάζει πρόσημο (ρίζα άρτιας πολλαπλότητας).

(5) (Λ) Η μέθοδος της τέμνουσας έχει $p \approx 1.6$ και η Newton-Raphson $p = 2$.

(6) (Σ) Η μέθοδος $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ συγκλίνει $\forall x_0 \in [0, 3]$ γιατί ικανοποεί το Θ. συστολής στο $[0, k], k \geq 2$.

(7) (Λ) Το πολυώνυμο Newton δεκάτου βαθμού για την $\dfrac{1}{1 + 25x^2}$ στο $[-1, 1]$ για ομοιόμορφη διαμέριση δεν δίνει μια αποδεκτή προσέγγιση λόγω του φαινομένου Runge (ισχυρες ταλαντώσεις).

(8) (Σ) Η φυσική κυβική spline έχει συνεχείς δεύτερες παραγώγους στους εσωτερικούς κόμβους παρεμβολής.

(9) (Λ) $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$

(10) (Σ) Εξ' ορισμού ο κανόνας ολοκλήρωσης του Simpson 3/8 ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα 3ου βαθμού.

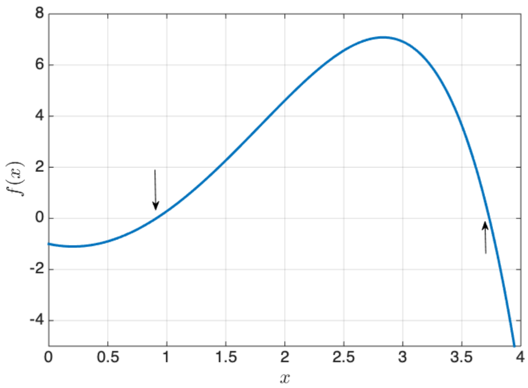
(11) (Λ) Ο κανόνας Gauss-Legendre 4 σημείων ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού $2n - 1 = 7$.

(12) (Λ) Η μέθοδος του Euler δεν είναι A-ευσταθής γιατί βάση του προβλήματος δοκιμής δεν είναι ευσταθής σε όλο το αριστερό μιγαδικό (ή πραγματικό) επίπεδο.

(13) (Σ) Η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta έχει ακρίβεια $O(h^4)$ σαν μέθοδος 4 βημάτων.

Θέμα 2

(α) Η μελέτη της συνάρτησης (μονοτονία, κυρτότητα, ακρότατα κτλ) f δίνει το γράφημα της, π.χ. στο $[0, 4]$. Η μία ρίζα είναι στο $[0, 1]$ κι η άλλη στο $[3, 4]$ (μπορούν να δωθούν και άλλα διαστήματα)



(β) Για τη σύγκλιση της $\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{3}e^{x_n}}$ έχουμε, δοκιμάζοντας το Θ. Συστολής π.χ. στο $[0, 1]$,

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{x/2} \quad \Rightarrow \quad |\phi'(0| = 0.2886 \text{ και } |\phi'(1)| = 0.4759, \quad \phi''(x) \neq 0 \text{ αρα } \max_{x \in [0,1]} |\phi'(x)| = 0.4759 < 1 \text{ και}$$

$$\phi(0) = 0.5773, \ \phi(1) = 0.9518 \text{ συνεπώς, με } \phi(x) \text{ αύξουσα, } \phi([0, 1]) \subset [0, 1].$$

Εναλλακτικά βρίσκουμε σε ποιο διάστημα είναι συστολή δηλ. $|\phi'(x)| < 1 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{x/2} < 1$ $\Rightarrow\; 0 < e^{x/2} < 2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; 0 \le x < 2.48$ και επιλέγουμε ένα κλειστό διάστημα που ικανοποιούνται οι προυποθέσεις π.χ. το $[0,1]$ ή $[0,2]$ ή ακόμη και το $[0.5,1]$.

(γ) Ελέγχουμε που η $\phi(x) = x + Cf(x)$ είναι συστολή δηλ. $|\phi'(x)| < 1$

$$|\phi'(x)| = |1 + Cf'(x)| < 1 \;\Rightarrow\; \text{για } x_0 \text{ κοντά σε ρίζα, συστολή (και σύγκλιση) αν } \frac{-2}{f'(x_0)} < C < 0$$

Αν θέσουμε $C = -1/f'(x_0)$ έχουμε την μέθοδο Nweton-Raphson τετραγωνικής τάξης σύγκλισης.

Αν π.χ. επιλέξουμε $x_0 = 1.$, τοτε με $x_{n+1} = x_n - \dfrac{3x_n^2 - e^{x_n}}{6x_n - e^{x_n}}$ έχουμε

$$x_1 = 0.9142, \quad x_2 = 0.9001, \quad x_3 \approx 0.900$$

Αν π.χ. επιλέξουμε $x_0 = 4$, τοτε

$$x_1 = 3.7843, \quad x_2 = 3.7353, \quad x_3 \approx 3.7330$$

Θέμα 3

(α) Τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = -1, x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ αρα $f(x_0) = 0, f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 0$. Το πολυώνυμο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange (ή με όποια άλλη μέθοδο)

$$P_2(x) = L_0 \cdot f(x_0) + L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2) = L_1 \cdot 1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(-1)} = 1 - x^2$$

(β) Από το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής στο $[0,1]$ (γραμμική λόγω της spline S στη περιπτωσή μας) στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 1-2 ή ΔΙΑΛΕΞΗ 10 σελ. 10) έχουμε

$$\max_{x\in[0,1]}|P_2 - S| = \frac{1}{2!}\max_{x\in[0,1]}|(x - x_1)(x - x_2)|\max_{x\in[0,1]}|P_2''| = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|x(x-1)| \cdot 2 = \max_{x\in[0,1]}|x(x-1)| = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

και

$$\max_{x\in[-1,0]}|P_2 - S| = \frac{1}{2!}\max_{x\in[0,1]}|(x - x_0)(x - x_1)|\max_{x\in[-1,=]}|P_2''| = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|(x+1)x| \cdot 2 = \max_{x\in[-1,0]}|x(x-1)| = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(γ) Θέλουμε να κατασκευάσουμε τη μη-γραμμική συνάρτηση $f(t) = a(t - 2015)e^{b(t-2015)}$ με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (δηλ. να βρούμε τα a και b). Για την γραμμικοποίησή της έχουμε, θέτοντας σαν $\tilde{t} = t - 15$, $f(\tilde{t}) = a\tilde{t}e^{b\tilde{t}}$ άρα μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε ως

$$\ln\left(\frac{f(\tilde{t})}{\tilde{t}}\right) = \ln a + b\tilde{t} \quad\Rightarrow\quad y = A\tilde{t} + B$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

i	$\tilde{t} = t - 15$	$y = \ln(f(t)/\tilde{t})$	$\tilde{t}^2$	$\tilde{t}y$
1	1	$\ln(27)$	1	3.2958
2	2	$\ln(25)$	4	6.4377
3	3	$\ln(22)$	9	9.2731
4	4	$\ln(20)$	16	11.9830
5	5	$\ln(18)$	25	14.4519
$\sum =$	**15**	**15.4918**	**55**	**45.4415**

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων δίνει

$$\begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.4415 \\ 15.4918 \end{bmatrix}$$

με λύση $A = b \approx -0.1$ και $B = \ln a = 3.4085$ και συνεπώς $a \approx 30$.
Συνεπώς η τιμή του προιόντος το 2021 θα ειναι $f(2021) \approx 30(2021 - 2015)e^{-0.1(2021-2015)} = 98$.

Θέμα 4

(α) Έχοντας σαν $f(x)=0, f(x)=1$ και $f(x)=x^2$ στον κανόνα ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^{1} |x|\cdot 1 = a_0+a_1+a_2 \\ 0 &= \int_{-1}^{1} |x|x = -a_0+a_2 \\ 1/2 &= \int_{-1}^{1} |x|x^2 = a_0+a_2 \end{aligned}$$

Από τις 2 τελευταίες εξισώσεις έχουμε $2a_2=1/2$ και άρα $a_2=1/4$, συνεπώς $a_0=1/4$ και τελικά $a_1=1$. Άρα

$$\int_{-1}^{1} |x|f(x)dx \approx \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{4}$$

Βλέπουμε ότι αν $f(x)=x^3$ το $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|x^3dx=0$ και ο κανόνας ολοκλήρωσης δίνει

$$\frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{4}=\frac{-1+0+1}{4}=0 \quad \text{και συνεπώς ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα 3ου βαθμού.}$$

(β) Θέλουμε $|R_S|=||\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(x)||_\infty=\max\limits_{x\in[1,2]}|\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(x)|<10^{-4}$, όπου $f^{(4)}(x)=2/x^3$ (τέταρτη παράγωγος της $f(x)=x\ln(x)$) και $\max\limits_{x\in[1,2]}|2/x^3|=2$, συνεπώς

$$\frac{1}{180}\cdot h^4\cdot 2<10^{-4} \;\Rightarrow\; h^4<\frac{180\cdot 10^{-4}}{2} \;\Rightarrow\; h=\frac{b-a}{n}<0.308 \;\Rightarrow\; n>3.2466$$

Άρα θέλουμε $n=4$ υποδιαστήματα (ακέραιος και άρτιος αριθμός) στο $[1,2]$ άρα 5 σημεία (κόμβους) για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο (με $h=(2-1)/4=0.25$).

Οι κόμβοι είναι $x_0=1, x_1=1.25, x_2=1.5, x_3=1.75$ και $x_4=2$, άρα ο σύνθετος τύπος του Simpson 1/3 μας δίνει

$$I(f)\approx\frac{h}{3}\left[f(1)+4f(1.25)+2f(1.5)+4f(1.75)+f(2)\right]=\ldots=0.636309.$$