

Όνοματεπώνυμο :

Αριθμός Μητρώου :

Εξάμηνο :

Σχολή: Μ.Π.Δ.

Οδηγίες

- Συμπληρώσατε, **αμέσως**, τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο.
- Επιτρέπεται μόνο η χρήση υπολογιστή τσέπης.
Παραβίαση του κανόνα αυτού συνεπάγεται σοβαρές συνέπειες πέρα από το μηδενισμό στο μάθημα.
- Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά **όλη** η δουλειά σας. Η **ακρίβεια** των αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.
Σωστές απαντήσεις που δεν δικαιολογούνται από την δουλειά σας δεν θα βαθμολογηθούν.
- Δεν εγκαταλείπετε την θέση σας για κανένα λόγο χωρίς να επικοινωνήσετε πρώτα με επιτηρητή της εξέτασης.
- Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι **2** ώρες.
- Αποχώρηση από την εξέταση επιτρέπεται μετά από 30 λεπτά.

Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 4 δεκαδικά ψηφία στους υπολογισμούς σας.

Σε όλες τις περιπτώσεις παραδίδετε το φυλλάδιο εξέτασης με συμπληρωμένα στοιχεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Θέμα 1

(α)[10] Για την προσέγγιση της ρίζας $x^* = 2$ της $f(x) = (x+1)(x-2)^3$ εφαρμόστε με αρχική τιμή $x_0 = 3$, τρία βήματα μίας επαναληπτικής μεθόδου *τετραγωνικής τάξης* σύγκλισης.

(β)[8] Για την προσέγγιση μίας ρίζας της $f(x) = 3x^2 - e^x$ στο διάστημα $[3, 4]$ θέλουμε να χρησιμοποιούμε την επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = \ln(3x_n^2)$. Αιτιολογήστε πλήρως αν η διαδικασία θα *συγκλίνει ή όχι* αν δώσουμε $x_0 \in [3, 4]$.

(β)[12] Εφαρμόστε 2 βήματα της μεθόδου Newton-Raphson με αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]^T = [1, 1]^T$ για την προσέγγιση της λύσης του παρακάτω *μη-γραμμικού* συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_2^2 &= 8 \\ x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Θέμα 2

(α)[10] Με χρήση *διαμεμένων διαφορών* δείξτε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής στα παρακάτω δεδομένα είναι 3ου βαθμού

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	1	4	11	16	13	-4

(β)[7] Δίνεται η παρακάτω φυσική κυβική *spline* $S(x)$ στο διάστημα $[1, 3]$, που παρεμβάλλει στα δεδομένα $(1, 1)$, $(2, 1)$ και $(3, 0)$. Υπολογίστε τα α , β , γ και δ .

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + \alpha(x-1) - \beta(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ s_1(x) = 1 + \gamma(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \delta(x-2)^3, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

(γ)[14] Στα παρακάτω δεδομένα και με τη *μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων*, χωρίς γραμμικοποίηση, προσαρμόστε τη καμπύλη $y = \alpha/x + \beta\sqrt{x}$.

x	0.1	0.2	0.4	0.5	1	2
y	21	11	7	6	5	6

Θέμα 3

(α)[12] Το μήκος μιας καμπύλης που περιγράφεται από μία συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ ορίζεται ως

$$\mathcal{M} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Έχοντας τις εξής μετρήσεις για την $f(x)$:

x	0	2	4	6	8
$f(x)$	6.2	5.5	4.3	5.6	6.9

χρησιμοποιείτε κατάλληλο *σύν-*

θετο κανόνα ολοκλήρωσης και κατάλληλους τύπους *παραγωγίσης* (επρός, πίσω και κεντρικών διαφορών τάξης $O(h)$ και $O(h^2)$) για τον καλύτερο υπολογισμό του μήκους $\mathcal{M}$.

(β)[8] Υπολογίστε την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{2+x} dx$ εφαρμόζοντας τον κανόνα ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 2 σημείων.

Θέμα 4

(α)[8] Εξηγήστε αναλυτικά πως κατασκευάζονται οι μέθοδοι Euler (*άμεση και πεπληγμένη*) για την προσέγγιση λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών με χρήση κανόνων αριθμητικής παραγωγίσης/ολοκλήρωσης.

(β)[12] Για το Π.Α.Τ. $y' = t - y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$, εφαρμόστε με βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$ τις μεθόδους Euler (*άμεση και πεπληγμένη*) για να προσεγγίσετε τιμή του $y(1)$ γνωρίζοντας ότι $y(t) > 0$. Ποιά από τις δύο προσεγγίσεις θα εμπιστευόσασταν ότι είναι ποιο κοντά στη πραγματική λύση και γιατί;

Λύσεις Θεμάτων

Θέμα 1

(α) Βλέπουμε ότι η ρίζα 2 έχει πολλαπλότητα 3 άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την τροποποιημένη μέθοδο Newton-Raphson (που συγκλίνει τετραγωνικά)

$$x_{n+1} = x_n - 3 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - 3 \frac{(x_n - 2)(x_n + 1)}{4x_n + 1} \quad \text{όπου για } x_0 = 3 \text{ δίνει}$$

$$x_1 = 2.0769, \quad x_2 = 2.0006, \quad x_3 = 2$$

(β) Η συνάρτηση επανάληψης είναι $\phi(x) = \ln(3x^2)$ και έχει $\phi'(x) = 2/x$ και $\phi''(x) = -2/x^2 \neq 0$.

Έχουμε $|\phi'(3)| = 0.066667$ και $|\phi'(4)| = 0.5$, άρα $\max_{x \in [3,4]} |\phi'(x)| < 1$.

Επίσης, $\phi(3) = 3.2958$ και $\phi(4) = 3.8712$ (με $\phi(x)$ αύξουσα). Άρα η $\phi(x) \in [3, 4]$ και συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. συστολής, άρα συγκλίνει.

(γ) Υπολογίζοντας τον Ιακωβιανό πίνακα $\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 & x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$ έχουμε

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{J}^{-1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 \\ 3/10 & -4/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{J}^{-1}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \\ f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.027 & 0.1405 \\ 0.2973 & -0.4541 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.51 \\ 1.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8284 \\ 1.2122 \end{bmatrix}$$

Θέμα 2

(α) Παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα Δ.Δ.

x_i	y_i	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
-2	1					
		3				
-1	4		2			
		7		-1		
0	11		-1		0	
		5		-1		0
1	16		-4		0	
		-3		-1		
2	13		-7			
		-17				
3	-4					

Άρα το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $P(x) = 1 + 3(x+1) + 2(x+1)(x+2) - 1(x+1)(x+2)x$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} s'_0(x) &= \alpha - 3\beta(x-1)^2, & s''_0(x) &= -6\beta(x-1) \\ s'_1(x) &= \gamma - 3/2(x-2) + 3\delta(x-2)^2, & s''_1(x) &= -3/2 + 6\delta(x-2) \end{aligned}$$

Επίσης από τα σημεία παρεμβολής έχουμε $s_0(1) = 1$, $s_0(2) = s_1(2) = 1$, $s_1(3) = 0$ άρα

$$1 + \alpha - \beta = 1 \Rightarrow \alpha = \beta,$$

$$1 + \gamma - 3/4 + \delta = 0 \Rightarrow \gamma + \delta = -1/4$$

Από $s'_0(2) = s'_1(2) \Rightarrow \alpha - 3\beta = \gamma$ και από $s''_0(2) = s''_1(2) \Rightarrow -6\alpha = -3/2$ άρα $\alpha = 1/4 = \beta$. Εφόσον $s''_1(3) = 0 \Rightarrow \delta = 1/4$ και άρα $\gamma = -1/2$. (Η συνοριακή συνθήκη $s''_0(1) = 0$ ικανοποιείται αυτόματα).

(γ) Παραγωγίζοντας ως προς α και β τη $\sum_{i=1}^6 [y_i - \alpha/x_i - \beta\sqrt{x_i}]^2$ παίρνουμε τις κανονικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 \frac{y_i}{x_i} &= \alpha \sum_{i=1}^6 \frac{1}{x_i^2} + \beta \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\sqrt{x_i}} \\ \sum_{i=1}^6 y_i \sqrt{x_i} &= \alpha \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\sqrt{x_i}} + \beta \sum_{i=1}^6 x_i\end{aligned}$$

και από τη λύση του συστήματος $\alpha = 1.9733$ και $\beta = 3.2818$.

Θέμα 3

(α) Ο κανόνας ολοκλήρωσης που πρέπει να εφαρμοστεί είναι ο σύνθετος Simpson 1/3 με $h = 2$ και για να εφαρμοστεί πρέπει να προσεγγιστούν οι παράγωγοι στα σημεία που δίνονται με κανόνες αριθμητικής παραγωγισής.

Εφαρμόζουμε, στο $x = 0$ εμπρός τύπο διαφορών $O(h)$ άρα $f'(0) = \frac{5.5 - 6.2}{2} = -0.35$,

στο $x = 2$ κεντρικό τύπο $O(h^2)$ άρα $f'(2) = \frac{4.3 - 6.2}{\frac{2 \cdot 2}{2}} = -0.475$,

στο $x = 4$ κεντρικό τύπο $O(h^2)$ άρα $f'(4) = \frac{5.6 - 5.5}{\frac{2 \cdot 2}{2}} = 0.025$,

στο $x = 6$ κεντρικό τύπο $O(h^2)$ άρα $f'(6) = \frac{6.9 - 4.3}{\frac{2 \cdot 2}{2}} = 0.650$ και

στο $x = 8$ προς τα πίσω τύπο $O(h)$ άρα $f'(8) = \frac{6.9 - 5.6}{2} = 0.650$. Συνεπώς έχουμε

x	0	2	4	6	8
$f(x)$	6.2	5.5	4.3	5.6	6.9
$f'(x)$	-0.35	-0.474	0.025	0.650	0.650
$[f'(x)]^2$	0.1225	0.2246	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0.4225	0.4225
$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$	1.0595	1.1066	1.0003	1.1927	1.1927

Και με το σύνθετο τύπο του Simpslo 1/3 παίρνουμε $\mathcal{M} = 4.2159 + 4.6425 = 8.8584$.

(β) Κανοντας πρώτα αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{t+1}{4}$, $dx = \frac{dt}{4}$ έχουμε

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{2+x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\sin(\frac{t+1}{4})}{2 + \frac{t+1}{4}} \frac{dt}{4} = \int_{-1}^1 \frac{\sin(\frac{t+1}{4})}{t+9} dt = \int_{-1}^1 g(t) dt = g(-1/\sqrt{3}) + g(1/\sqrt{3}) = 0.052637.$$

Θέμα 4

(α) Θεωρεία.

(β) Άμεση Euler:

$$y^1 = y^0 + hf(t^0, y^0) = 0.5 + 0.5(-0.25) = 0.375$$

$$y^2 = y^1 + hf(t^1, y^1) = 0.375 + 0.5(0.359375) = 0.5546875 \approx y(1)$$

Πεπλεγμένη Euler:

$$y^1 = y^0 + hf(t^1, y^1) = 0.5 + 0.5[0.5 - (y^1)^2] \Rightarrow -0.5(y^1)^2 - y^1 + 0.75 = 0$$

λύνοντας το τριώνυμο ως προς y^1 και επιλέγοντας τη θετική ρίζα, εφόσον δίνεται ότι $y(t) > 0$, $y^1 \approx 0.5811$

$$y^2 = y^1 + hf(t^2, y^2) = 0.5811 + 0.5[1 - (y^2)^2] \Rightarrow -0.5(y^2)^2 - y^2 + 1.081 = 0$$

λύνοντας πάλι το τριώνυμο ως προς y^2 και επιλέγοντας τη θετική ρίζα $y^2 \approx 0.778$

Δεν θα εμπιστευόμασταν καμία από τις δύο γιατί είναι και οι δύο χαμηλής (πρώτης ταξής) ακρίβειας $O(h)$.