

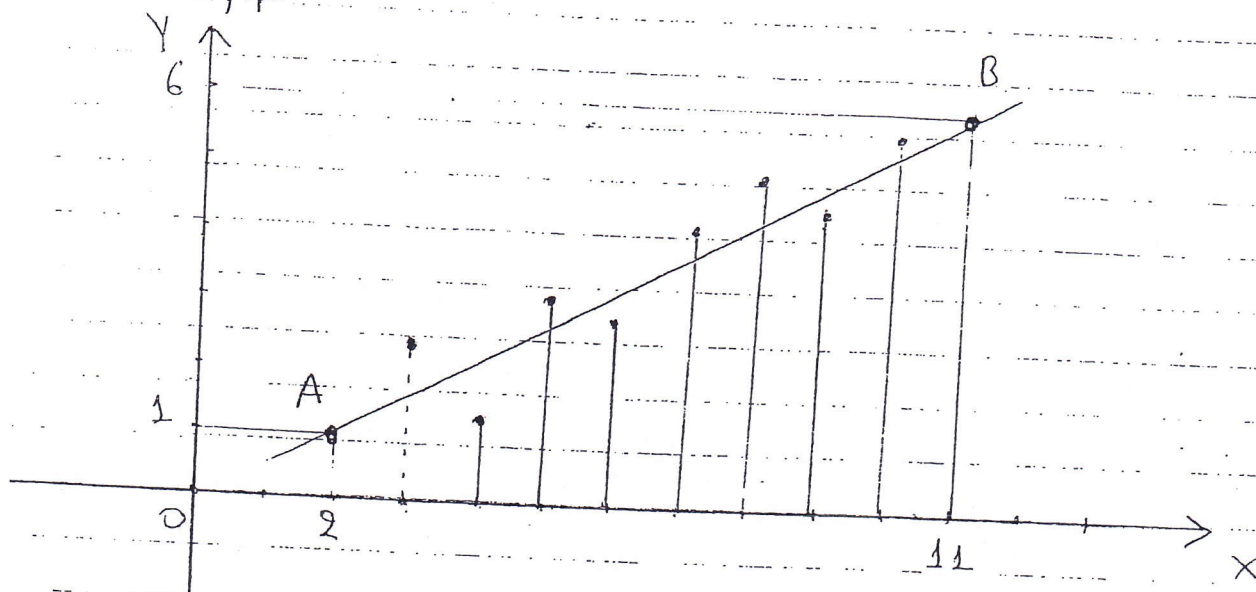
κεβ. 4

-42-

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Η ιδέα  !

Έχουμε ένα "νέφος" σημείων τα οποία έχουμε πάρει από πειραματικά δεδομένα τα οποία είναι ως εξής:



Ενώ θα βρίσκονταν όλα τα σημεία πάνω σε μια ευθεία, έχω μια κάποια "χρυσή" ευχέρεια.

Θα "προβλεψάμε" με ευθεία $y = ax + b$ ένας απλός τρόπος είναι "με το μάτι".

Βρίσκω δύο σημεία A, B τα οποία επαληθεύουν

την ευθεία και έτσι προκύπτει η $y = ax + b$.
Στο παρόν παχ το $A(2, 1)$ το $B(11, 6)$.

Αρα $1 = 2a + b$

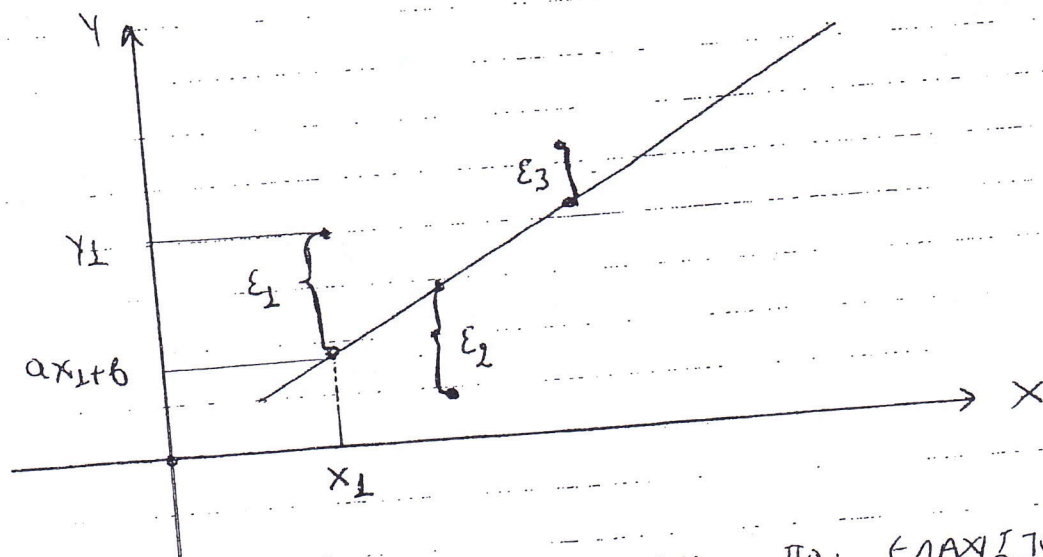
$6 = 11a + b$

Αφαιρώ κατά μέλη $5 = 9a \Leftrightarrow a = \frac{5}{9}$
 $\Rightarrow a = 0,55$ οπότε $b = -0,1$

Αρα

$y = 0,55x - 0,1$ η ευθεία.

Φυσικά, έχουμε βρεθείματα $|E_i| = |y_i - (ax_i + b)|$
 η προεξέτιμη τιμή y που έχει $y = ax + b$ της ευθείας.



Θέλουμε να βρούμε την ευθεία που ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΕΙ
 ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ. Είναι η ΕΥΘΕΙΑ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ
 ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

Είναι η $y = ax + b$ όπου a, b βρίσκονται
 από το σύστημα $\begin{cases} a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \cdot \sum x_i + n \cdot b = \sum y_i \end{cases}$

όπου n το πλήθος των σημείων-κομβών!

-44-

Παραγωγή ελαστικών τενετών

18 ΑΣΚΗΣΗ Από παρατηρητικά δεδομένα πήρατε:

x	2	3	4	5	6
y	1	2	2,5	3	3,5

α) Να βρείτε η ελαστική ελαχίστων τετραγώνων

$$y = ax + b$$

β) Να γίνει εκτίμηση για $x = 7$.

Εχουμε:

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	2	1	4	2
2	3	2	9	6
3	4	2,5	16	10
4	5	3	25	15
5	6	3,5	36	21
σύνολο	20	12	90	54

$$\begin{cases} 90a + 20b = 54 & \sum x_i^2 a + \sum x_i b = \sum x_i y_i \\ 20a + 5b = 12 & \sum x_i a + n b = \sum y_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4,5a + b = 2,7 \\ 4a + b = 2,4 \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχω:

$$0,5a = 0,3 \Leftrightarrow a = \frac{0,3}{0,5} \Leftrightarrow a = 0,6$$

Τότε $b = 0$

Άρα $y = 0,6x$ η ελαστική.

Τότε Για $x=7$, $y=0,67=4,2$

ΣΧΟΛΙΟ: Βρίσκουμε ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.
Έχουμε και περιπτώσεις κατ'όλες όπως

$$y = A \cdot x^B \quad \eta \quad y = Ae^x + B \quad \eta \quad y = Ae^{Bx}$$

Γε όλες τις περιπτώσεις κοιτάμε ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
(ή γραμμικοποίηση) ώστε να προκύψει πάλι
γραμμικός συντελεστής.

(Πχ) 1 Αν έχεις ΕΚΘΕΤΙΚΗ $y = A \cdot e^{Bx}$

$$\text{Τότε } \ln y = \ln(Ae^{Bx}) = \ln A + Bx$$

Πα είναι $Y = \alpha X + \beta$ όπου $Y = \ln y$

$$X = x$$

$$\alpha = B$$

$$\beta = \ln A \Leftrightarrow A = e^\beta$$

ΟΤΕ οι βήτες που θα χρησιμοποιήσουμε είναι

(x_i)	y_i	$\ln y_i = Y_i$	x_i^2	(x_i, y_i)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

και το άνω κομμάτι,

2. Αν έχω Δυναμική $y = A \cdot x^B$ τότε

$$\ln y = \ln A + B \ln x \quad \text{και έχει γραμμική σχέση}$$

$$Y = aX + b \quad \text{όπου} \quad \begin{aligned} Y &= \ln y \\ X &= \ln x \\ a &= B \\ b &= \ln A \Leftrightarrow A = e^b \end{aligned}$$

Αρα, οποιαδήποτε άλλη περίπτωση την γραφικοποιώ!

Παράδειγμα (Θέμα ΔΕΛΗ)

Με προσδιορίστη η ΔΕΔΟΜΕΝΑ

$$y = A \cdot e^{Bx} \quad \text{ή} \quad y = A \cdot x^B$$

(0, 9.532) (0.25 7.983) (0.4 4.826)

και (0.5 5.503) και να υπολογιστεί η τιμή y για $x = 0.7$

$$\text{Έχω} \quad y = A \cdot e^{Bx} \Leftrightarrow \ln y = \ln A + Bx$$

$$\text{ή} \quad \boxed{\ln y = Bx + \ln A} \quad \text{που είναι γραμμική}$$

$$Y = aX + b \quad \text{όπου}$$

$$\begin{aligned} Y &= \ln y \\ X &= x \\ a &= B \\ b &= \ln A \Leftrightarrow A = e^b \end{aligned}$$

ΤΟΤΕ	n	x_i	y_i	$X_i^0 = x_i$	X_i^2	$Y_i = \ln y_i$	$X_i Y_i$
	1	0	9.532	0	0	2.2540	0
	2	0.25	7.983	0.25	0.0625	2.0773	0.5193
	3	0.4	4.826	0.4	0.16	1.5740	0.6296
	4	0.5	5.503	0.5	0.25	1.7053	0.8526
Συνολο		1.15	-	1.15	0.4725	7.6112	2.0015

Από:
$$\begin{cases} 0.4725\alpha + 1.15\beta = 2.0015 \\ 1.15\alpha + 4\beta = 7.6112 \end{cases} \Rightarrow \beta = 1.9028 - 0.2875\alpha$$

και $0.4725\alpha + 2.18822 - 0.330625\alpha = 2.0015$

Τότε: $\boxed{\alpha = -1.316}$ και $\boxed{\beta = 2.281}$

Αρα $B = \alpha = -1.316$ και $A = e^\beta = e^{2.281} = 9.786$

ΤΕΛΙΚΑ: $\boxed{y = 9.786 \cdot e^{-1.316x}}$ και για $x = 0.3$ προκύπτει

$y = 9.786 \cdot e^{-1.316 \cdot 0.3} = 6.594 \quad \checkmark$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δίνονται τα σημεία (1,0) (2,3) (3,5) (4,8) (5,10)
και (6,13) να βρεθεί η ελαχίστη τετραγωνική

Από παραδοτική παρατήρηση προκύπτει τα σημεία
(1, 0.7) (2, 1.7) (3, 3.4) (4, 6.7) (5, 12.6)
Βρείτε την καλύτερη ελαχίστη τετραγωνική

$y = C \cdot x^D$

Στις Splines είδαμε πως ορίζονται
ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ.

Για ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ή ΚΥΒΙΚΕΣ είναι ΑΠΘΑΝΟ
να ζητήσει η ερώτηση τους.
Είναι πολύ πιθανό να τις ζητήσουν να εφευρεθεί
αν με συνάρτηση που δίνεται είναι ΤΕΤΡΑΓΩΝΗ
ή ΚΥΒΙΚΗ spline.

ΓΙΑ ΚΥΒΙΚΗ Spline

Έχουμε $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Πρέπει: 1) $S(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, 1, 2, \dots$ σε όλους
τους κόμβους.

2) Η S να είναι συνεχής στους κόμβους

3) Η S' να είναι συνεχής στους κόμβους

4) Η S'' να είναι συνεχής στους κόμβους

ΕΧΟΥΜΕ Προσπαύει τη συνέχεια για τις S, S', S''
που εφευρέθηκε τους
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ!

- Αν έχω ΤΕΤΡΑΓΩΝΗ Spline έχω τις
3 πρώτες συνθήκες!

ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ (ΔΕΛ42)

Να εξετάσετε αν η δοσμένη $S(x)$ είναι
 τετραγωνική (τετραγωνική) spline όπου

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = -1 + 4x - x^2 & x \in [0, 1] \\ S_1(x) = x & x \in [1, 2] \\ S_2(x) = 1 - x + x^2 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 1^ο Εξετάσω την S ως προς τη
 συνέχεια (όπως εξωτερικά κομβών)

Αντικαθιστώ αν $S_0(1) = S_1(1)$ και $S_1(2) = S_2(2)$

$$\begin{cases} S_0(1) = -1 + 4 - 1 = 4 - 1 = 3 \\ S_1(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow S_0(1) \neq S_1(1) \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} S_1(2) = 2 \\ S_2(2) = 1 - 2 + 2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow S_1(2) \neq S_2(2) \quad \checkmark$$

ΒΗΜΑ 2^ο Εξετάσω την S' ως προς τη
 συνέχεια (όπως εξωτερικά κομβών)

$$S'(x) = \begin{cases} S_0'(x) = 4 - 2x & x \in [0, 1] \\ S_1'(x) = 1 & x \in [1, 2] \\ S_2'(x) = -1 + 2x & x \in [2, 3] \end{cases}$$

Τότε:

$$\left. \begin{aligned} \bullet S_0'(1) &= 4-1=2 \\ S_1'(1) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_0'(1) = S_1'(1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet S_1'(2) &= 2 \\ S_2'(2) &= -1+4=3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_1'(2) \neq S_2'(2)$$

Η S' δεν είναι συνεχής, δεν είναι
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ Spline. ✓

Στη ΜΕΘΟΔΟ των ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ
ΕΙΠΑΜΕ (βλ. 45) ΟΤΙ ΑΝ ΔΕΝ ΕΧΟΥΜΕ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΩΤΕ ΚΑΝΟΥΜΕ
ΓΡΑΜΜΗΤΟΠΟΙΗΣΗ (ή ΓΡΑΜΜΟΠΟΙΗΣΗ)

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ (Διότι καθώς) ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ πω χρησιμοποιούμε
ΓΡΑΜΜΗΤΟΠΟΙΗΣΗ και ΕΧΕΙ ΒΑΡΕΑ Ο
ΔΕΙΜΗΣ Είναι:

1) Όταν γίνονται $y = A e^x + B$

Δω χρησιμοποιούμε να λογαριθμώ, είναι

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ $y = A \bar{x} + B$ όπου πω

$\bar{x} = e^x$ οπότε θα συμπληρώσω τις στήλες
και τα Αθροίσματα:

i	x_i	y_i	$e^{x_i} = \bar{X}_i$	$\bar{X}_i^2$	$\bar{X}_i \cdot y_i$
1					
2					
$\vdots$					
n					

2) Όταν η συνάρτηση

$$y = e^{Ax+B}$$

λογαριθμική

$$\ln y = Ax + B \quad \text{και} \quad \text{επαι}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟ

$$\bar{Y} = A\bar{X} + B \quad \text{ή} \quad \bar{Y}_i = \ln y_i$$

3) Όταν η συνάρτηση

$$y = A \cdot t \cdot e^{Bt}$$

λογαριθμική

$$\ln y = \ln A + \ln t + Bt$$

$$\Leftrightarrow \ln y - \ln t = Bt + \ln A \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{t}\right) = Bt + \ln A$$

Εγινε γραμμικό

$$\bar{Y} = a\bar{X} + b \quad \text{όπου}$$

$$\bar{Y} = \ln\left(\frac{y}{t}\right)$$

$$\bar{X} = t$$

$$a = B$$

$$b = \ln A \Leftrightarrow A = e^b$$

i	L	$X_i = t_i$	y_i	$\frac{y_i}{t_i}$	$\ln\left(\frac{y_i}{t_i}\right) = V_i$	X_i^2	$X_i \cdot V_i$
0							
1							
$\vdots$							
n							

4) Όταν

ήταν

$$y = A \cdot \frac{t}{B+t}$$

Δε χρειαζόμαστε να λογαριθμώ.

$$\text{Έχουμε } y = \frac{At}{B+t} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{B+t}{At} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{B}{At} + \frac{t}{At} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{A}$$

Έχουμε ΓΡΑΜΜΙΚΟ με $\bar{Y} = \frac{1}{y}$, $\bar{X} = \frac{1}{t}$, $a = \frac{B}{A}$, $b = \frac{1}{A}$

οπ: $\bar{Y} = a\bar{X} + b$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ ΕΓΓΡΑΦΙΟΝ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ με
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ + ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ.

1) Έστω η $f(x) = x + \frac{2}{x}$ να βρεθεί το

πρόσθετο ποσότητας Lagrange στους κόμβους
 $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3, 5$.

να υπολογιστεί το $f(1,5)$.

2) Δίνεται η $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ και οι κόμβοι
 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$. Να γίνει ο πίνακας
ήδη φέρων διαφορών και να βρεθεί το πρόσθετο
Newton.

$$y = \frac{x}{(x+D)} \quad \frac{1}{y} = \frac{C \cdot x + D}{x} = D \cdot \frac{1}{x} + C$$

$\bar{Y} = D\bar{X} + C$