

Σημειώσεις για τον Γιώργο Μαραγκάκη
έτσι τον Γιώργο Βαβελιδά.

Θέμα 1(β) | Ιούνιος 2017

ΠΑΡΗΓ. ΣΥΡΑΤΗΣ 2020

Διαιρούμε τον αριθμό $x = 2^6 + 2^{-16} + 2^{-19}$.

- (i) Γράφουμε τον αριθμό αυτό ως αριθμό κινητής υποδιαστολής, έτσι ώστε να τον εισάγουμε σε μορφή $fl(x)$.

$$x = 2^6 + 2^{-16} + 2^{-19} = 2^7 (2^{-1} + 2^{-23} + 2^{-26}) =$$

$$= (0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + \dots + 0 \cdot 2^{-22} + 1 \cdot 2^{-23} + 0 \cdot 2^{-24} + 0 \cdot 2^{-25} + 1 \cdot 2^{-26}) \cdot 2^7$$

$$\Rightarrow fl(x) = \underbrace{(0.10000\dots01001)}_{\substack{21 \text{ ψηφία} \\ 26 \text{ ψηφία}}} \cdot 2^7 : \text{Αριθμός κινητής υποδιαστολής}$$

- (ii) Παι να περάσουμε τον αριθμό αυτό στην υπολογιστή πρέπει να γράψουμε υπόψη μας τον ακριβή $t=24$ αυτού. Άρα:

$$fl(x) = \underbrace{(0.10000\dots010)}_{\substack{21 \text{ ψηφία} \\ 24 \text{ ψηφία}}} \cdot 2^7$$

Δηλ. "κόβουμε" τα τελευταία 2 δεκαδικά ψηφία.

← Είναι ο αριθμός κινητής υποδιαστολής που αναγνωρίζει ο υπολογιστής, δηλ. ο δεχόμενος αριθμός μηχανής.

$$\Leftrightarrow fl(x) = (0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + \dots + 0 \cdot 2^{-22} + 1 \cdot 2^{-23} + 0 \cdot 2^{-24}) \cdot 2^7$$

$$= 2^7 (2^{-1} + 2^{-23}) = 2^6 + 2^{-16}$$

$$\Leftrightarrow fl(x) = 2^6 + 2^{-16}$$

Το απόλυτο σχετικό σφάλμα μεταξύ του πραγματικού αριθμού x & του αριθμού μηχανής $fl(x)$ είναι το ϵ fris:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{|x - fl(x)|}{|x|} = \frac{|2^6 + 2^{-16} + 2^{-19} - (2^6 + 2^{-16})|}{|2^6 + 2^{-16} + 2^{-19}|} = \\ &= \frac{2^{-19}}{2^6 + 2^{-16} + 2^{-19}} = \frac{2^6 \cdot 2^{-25}}{2^6(1 + 2^{-22} + 2^{-25})} = \\ &= \frac{2^{-25}}{\underbrace{1 + 2^{-22} + 2^{-25}}_{>1}} < 2^{-25} \Leftrightarrow \boxed{\epsilon < 2^{-25}}\end{aligned}$$

Υπόψη ότι το μοναδιαίο σφάλμα στρογγυλευσης είναι το ϵ fris:

$$\epsilon_{\text{στροφ.}} = \frac{1}{2} b^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 2^{1-24} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-23} = 2^{-24} \Leftrightarrow \boxed{\epsilon_{\text{στροφ.}} = 2^{-24}}$$

Όπως ισχύει ότι: $\boxed{\epsilon < \epsilon_{\text{στροφ.}}}$



Θέμα 1 / Αύγουστος 2017

α) Διαιρούμε τον αριθμό $y = 2^{-3} + 2^{-24} + 2^{-28}$.

Γράφουμε τον αριθμό αυτό ως αριθμό κινητής υποδιαστολής, έτσι ώστε να τον εισάγουμε σε έναν υπολογιστή σε μορφή $fl(y)$.

$$\boxed{y = 2^{-3} + 2^{-24} + 2^{-28}} = 2^{-3} (1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-21} + 1 \cdot 2^{-25}) =$$

$$= (1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + \dots + 0 \cdot 2^{-20} + 1 \cdot 2^{-21} + 0 \cdot 2^{-22} + 0 \cdot 2^{-23} + 0 \cdot 2^{-24} + 1 \cdot 2^{-25}) \cdot 2^{-3}$$

$$\Leftrightarrow fl(y) = \underbrace{(1.00000\dots010001)}_{\substack{\text{20 ψηφία} \\ \text{25 ψηφία}}} \cdot 2^{-3} : \text{Ο αριθμός κινητής υποδιαστολής που αντιστοιχεί στον αριθμό } y$$

Ποι να περάσουμε τον αριθμό αυτό στον υπολογιστή πρέπει να δώσουμε υπόψη μας την ακρίβεια $t=24$ αυτού. Άρα:

$$fl(y) = \underbrace{(1.00000\dots01000)}_{\substack{\text{20 ψηφία} \\ \text{24 ψηφία}}} 2^{-3}$$

Δηλ. "κόβουμε" το τελευταίο 1 δεκαδικό ψηφίο.

← Ο αριθμός εντός υποδιαστολής που αναγκάζει ο υπολογιστής. Δηλ. είναι ο αριθμός μηχανής.

$$\Leftrightarrow fl(y) = (1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + \dots + 0 \cdot 2^{-22} + 1 \cdot 2^{-21} + 0 \cdot 2^{-22} + 0 \cdot 2^{-23} + 0 \cdot 2^{-24}) \cdot 2^{-3}$$

$$= 2^{-3} (1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-21}) = 2^{-3} + 2^{-24}$$

$$\Leftrightarrow fl(y) = 2^{-3} + 2^{-24}$$

Το απόλυτο σχετικό σφάλμα μεταξύ του πραγματικού αριθμού y & του αριθμού μηχανής $fl(y)$ είναι το εξής:

$$\varepsilon = \frac{|y - fl(y)|}{|y|} = \frac{|2^{-3} + 2^{-24} + 2^{-26} - (2^{-3} + 2^{-24})|}{|2^{-3} + 2^{-24} + 2^{-26}|}$$

$$= \frac{2^{-26}}{2^{-3} + 2^{-24} + 2^{-26}} = \frac{2^{-8} \cdot 2^{-25}}{2^{-8} (1 + 2^{-21} + 2^{-25})} = \frac{2^{-25}}{1 + 2^{-21} + 2^{-25}} < 2^{-25}$$

$$\varepsilon'_{\text{επιπλ.}} = b^{1-t} = 2^{1-24} = 2^{-23}$$

Προφανώς $\varepsilon < \varepsilon'_{\text{επιπλ.}}$

β) Διαδίδουμε τον αριθμό: $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} \neq 0$, διότι $x \neq 0$
 Τον εισάγουμε στο υπολογιστή, όπου προκύπτει το εξής λάθος.

Παρατηρούμε ότι αν $x \gg 1$ (πάρει πολύ μεγαλύτερος του 1)

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \cong 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} \cong x \\ x - \frac{1}{x} \cong x \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} \cong \sqrt{x} - \sqrt{x} = 0.$$

Πρόβλημα!

Για να απαντήσουμε το πρόβλημα αυτό εισάγουμε τον y στον υπολογιστή γραμμένο με διαφορετικό τρόπο:

$$y = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \frac{(\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}})(\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}})}{\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{x + \frac{1}{x} - (x - \frac{1}{x})}{\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}} = \frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}}$$

Αυτός ο αριθμός τιμών
δω είναι προβληματικός για
τον υπολογιστή.

— # —